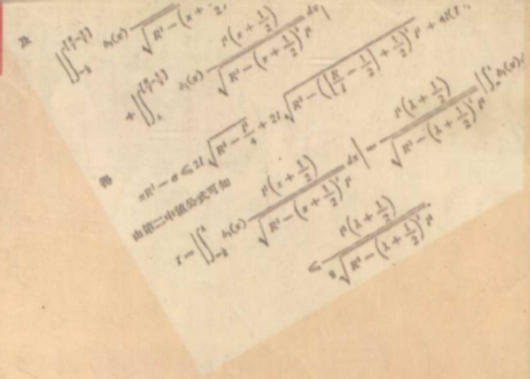
全国高等教育自学考试

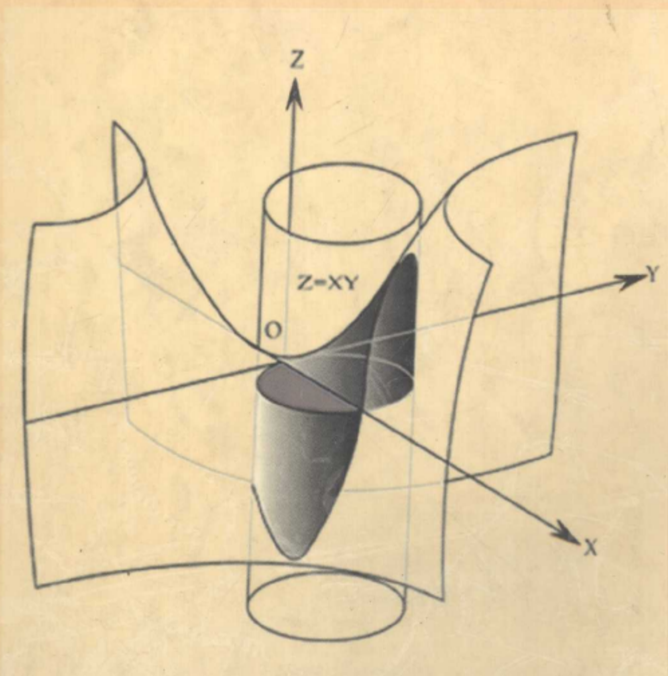


# 高等数学

## 复习指导与考试题型训练及题解

主编 彭富连

编者 李金妹 刘迪芬 许振泽




湖南师范大学出版社

**高等数学**

**复习指导与考试题型训练及题解**

主　　编：彭富连
编　　者：李金妹　刘迪芬　许振泽
责任编辑：伊　妹　鸿　男
责任校对：刘　丰

湖南师范大学出版社出版发行
（长沙市岳麓山）
湖南省新华书店经销　　长沙市银都教育印刷厂印刷
787×1092　16开　15印张　350千字
1999年9月第1版　1999年9月第1次印刷
ISBN7—81031—857—8/O·037
定价：22.80元

## 内容提要

本书根据全国高等教育自学考试《高等数学(理工科类)自学考试大纲》的要求,着重介绍了高等数学的基本理论、基本方法、基本要求,同时结合高教自考题型及考纲要求设计模拟试题并给出详解。

全书由三部分组成:一、基本理论、基本方法与模拟测试题;二、模拟试题分析与解答;三、附录:包括全国统考试卷样卷,标准答案与评分标准,常用的计算公式和法则。

本书与同济大学数学教研室主编的《高等数学》(上、下册)(高等教育出版社出版)配套,注重指导性与实用性,是一本针对性较强,适合于报考高等数学(二)的自考生的辅导用书,同时对于理工科大学生,准备报考理工科研究生的考生,经济、管理、财会类自考生,电大生、夜大生都具有一定的参考价值和指导作用。

# 前言

《高等数学》是理工科各类专业一门重要的基础理论课，在高等教育自学考试中被指定为全国统考科目，也是每年升入高等院校理工科专业的本科、专科、电大、职大、函大、夜大的一大批新生的必修课程。为了使学生扎实学好这门课程，我们组织编写了这本书。旨在能给报考高等数学的自考生在学习高等数学时提供一定的指导；能给各类学校的学生在学习高等数学时提供一定的帮助；能给准备报考研究生的广大考生在复习高等数学过程中有一定的参考价值。

本书根据全国高等教育自学考试《高等数学(理工科类)自学考试大纲》的要求，结合近年来编者从事自学考试教学辅导的经验和自学考试学生的实际情况编写的。与全国高等教育自学考试指定教材《高等数学》(上、下册)(同济大学数学教研室主编，高等教育出版社出版)配套。全书共分三大部分：第一部分为高等数学的基本理论、基本方法与模拟测试题，共十三讲。第一讲至第十二讲主要是以教材为准绳，按照高等数学的各知识体系结构分类讲述基本概念、基本理论、基本方法与技巧，内容概括了教材上的知识点，按照考纲要求及最近几年的自考试题，力求以单元强化模拟试题的方式覆盖所有的考点，以达到彻底掌握基础知识、基本技能、基本方法和提高运算能力、逻辑思维能力，以及运用所学知识分析和解决问题的能力。每一讲自成系统，讲与讲之间又互相联系，融成一体，包括：一、重点内容；二、基本要求、基本知识及基本方法；三、模拟试题。第十三讲主要是在前十二讲的基础上，将孤立的知识点之间的横向区别与联系，纵向的内在的逻辑主线串起来，进一步明确重点，形成系统的知识网络结构，把握知识内容之间的联系，从而突破难点，达到知识的整体化、有序化、实用化。本讲采用的方法是“引导回忆法”，即将前十二讲的

内容再按照知识体系的结构对重点理论和解题方法进行分类回忆，步步引导学生通过自学自查把全部注意力集中指向各类理论知识与具体题型及各种解题方法和技巧的结合上，以便能在较短时间内通过反复的回忆理解，达到查漏补缺，融会贯通，迅速提高学生的理解能力和解题技巧，增强记忆，以期取得事半功倍的效果。第二部分为模拟试题分析与解答；第三部分为附录，包括高等数学全国统考试卷样卷、标准答案与评分标准、高等数学常用计算公式及法则。

全书由彭富连副教授拟定编写提纲，并负责全书统稿、定稿。编写具体分工为：许振泽副教授编写第一部分的第一、七、八、九讲，第二部分的模拟试题一、七、八、九；刘迪芬副教授编写第一部分的第二、三、十一、十二讲，第二部分的模拟试题二、三、十一、十二；李金妹副教授编写第一部分的第四、五、六、十讲，第二部分的模拟试题四、五、六、十；彭富连副教授编写第一部分的第十三讲、第三部分。本书编者均长期从事高等数学教学与研究工作，近年来均兼任湖南师范大学举办的"报考高等教育自学考试"助学班的高等数学讲授与辅导工作。

由于编者水平有限，难免有疏漏和错误之处，诚请名家、同行和广大读者批评、指正。

编　者

1999 年 7 月

# 目　录

## 第一部分　基本理论、基本方法与模拟测试题

## 第二部分 模拟试题分析与解答

## 第三部分 附 录

# 第一部分

# 基本理论、基本方法与模拟测试题

## 第一讲　函数　极限　连续性

### 一、重点内容

1. 函数的概念;反函数的概念;基本初等函数的定义域和图形;复合函数的概念和复合步骤

2. 极限的概念;无穷小概念;极限的运算

3. 函数连续性概念;闭区间上连续函数的性质

### 二、基本要求、基本知识及基本方法

1. 深入理解构成函数概念的重要因素:对应关系(或对应法则)和定义域的各种形式

(1) 定义域——使函数 $y$ 有确定值的自变量 $x$ 的所有取值的集合;(2) 对应关系(对应法则)——因变量 $y$ 依赖于自变量的变化规律,用 $f$ 表示;(3) 值域——函数所能取得值的集合.

**注**:两个函数当且仅当(1)、(2) 完全相同时才恒等,否则就是两个不同的函数. (1)、(2) 叫函数的两要素.

2. 掌握基本初等函数的定义、定义域、图形及简单性质(单调性、奇偶性、周期性)

要特别注意以下几个方面:

(1) 反函数的定义域和值域分别是原函数的值域和定义域,因此求反函数的定义域,不能由其解析式来求,而应是原函数的值域.

(2) 若已知函数的解析式较为复杂,求定义域通常根据各种条件列不等式组求解.

(3) 由 $y = f(x)$ 的定义域,求复合函数 $y = f[g(x)]$ 的定义域问题,实际上是已知中间变量 $u = g(x)$ 的值域,求自变量的取值范围问题.

(4) 研究函数的单调性必须在定义域内进行. 关于复合函数的单调性:设 $y = f(u), u = g(x)(x \in [a,b], u \in [m,n])$ 都是单调函数,则 $y = f[g(x)]$ 在$[a,b]$上也是单调函数,其单调性由同增异减确定,即:里外函数增减性相同,复合函数为增函数;里外函数增减性相反,复合函数为减函数.

(5) 函数具有奇偶性必须满足:a) 定义域在数轴上关于原点对称;

b) $f(-x) = f(x)$(偶)或 $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x) + f(-x) = 0$(奇)恒成立(奇函数图象关于原点成中心对称,偶函数图象关于 $y$ 轴成轴对称).

3. 正确理解函数极限、数列极限的概念及左右极限概念

注意关系:$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$

(1) 数列$\{x_n\}$的极限:$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ 是指对于任何$\varepsilon > 0$,存在正整数 $N(\varepsilon)$,使当 $n > N(\varepsilon)$ 时,$|x_n - a| < \varepsilon$ 总成立,这里"$n \to \infty$"称为极限过程,定义中 $\varepsilon$ 是预先给定的任意小的正数.

(2) 函数 $f(x)$ 的极限:$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,是指对任何 $\varepsilon > 0$,都存在一个数 $\delta(\varepsilon) > 0$,使得一切满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的$x$,不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 总成立.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 是指对任何$\varepsilon > 0$,都存在一个正数 $X$,使得当 $|x| > X$ 时,不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 总成立. 如同(1)中类似,此处 $\varepsilon$ 是预先给定的任意小的正数,而 $\delta(X)$ 与 $\varepsilon$ 有关. 当 $x \to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 是否有极限及其极限是什么,仅与开区间$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 内的 $x$ 所对应函数值有关,而与 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点的函数值 $f(x_0)$ 无关,甚至 $f(x_0)$ 可以不存在.

(3) 单侧极限 $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$ 或$f(x_0 + 0) = A$ 表示$x$从$x_0$的右侧趋于 $x_0$ 时,$f(x)$ 无限接近常数 $A$;$\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = B$ 或$f(x_0 - 0) = B$ 表示$x$从$x_0$的左侧趋于 $x_0$ 时,$f(x)$ 无限接近常数 $B$;$A(B)$ 称为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的右(左)极限. 可类似定义 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = B$

4. 掌握无穷小的概念及其运算规律,了解无穷小与函数极限的关系;正确理解无穷小的阶和等价无穷小及其在求极限中的应用;了解无穷大量与无穷小量之间的关系.

(1) 无穷小:极限为 0 的变量称为无穷小量,简称无穷小. 即:若 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$,则称$\{x_n\}$当$n \to \infty$ 时是无穷小量;若 $\lim f(x) = 0$ 则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时是无穷小量. 显然0是无穷小(是把0理解为一个常数函数),但除0以外,无穷小是变量,即无论绝对值多么小的数都不是无穷小. 还须注意,一个变量是否为无穷小,除了与变量本身有关以外,还与自变量的变化趋势有关. 如 $f(x) = x^2$ 当 $x \to 0$ 时,$f(x)$ 是无穷小,除此以外 $x$ 的任何变化趋势 $f(x)$ 都不是无穷小.

(2) 无穷小量的阶及比较:设 $\alpha$、$\beta$ 是同一极限过程(如 $x \to \infty$ 或 $x \to x_0$ 等)中的两

个无穷小量，若

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}c(\neq 0,1\text{ 的常数})，\text{则称 }\beta\text{ 与 }\alpha\text{ 为同阶无穷小；}\\ 1，\text{则称 }\beta\text{ 与 }\alpha\text{ 为等价无穷小，记作 }\alpha\sim\beta；\\ 0，\text{则称 }\beta\text{ 是比 }\alpha\text{ 较高阶的无穷小，记作 }\beta=o(\alpha)；\\ \infty，\text{则称 }\beta\text{ 是比 }\alpha\text{ 较低阶的无穷小.}\end{cases}$$

**注**：等价无穷小可用来确定两无穷小的比式$\frac{\beta}{\alpha}$的极限，此时它们中任何一个可以换成任何与它等价的无穷小，而对于极限的存在及数值并无影响．并记住常用的几个等价无穷小：

当 $x\to 0$ 时有 $\sin x\sim x,\arcsin x\sim x,\tan x\sim x,\arctan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,$

$e^x-1\sim x,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}x$

(3) 无穷大：当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时 $|f(x)|$ 无限变大，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时是无穷大量，简称无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 或（$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）．注意无穷大不是数，不可与很大的数混为一谈．

(4) 无穷小与函数极限的关系：

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\alpha=0$.

(5) 无穷小与无穷大的关系：无穷大的倒数是无穷小；非零无穷小的倒数是无穷大．

(6) 有限个无穷小的和(积)仍是无穷小．

(7) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小．

5. 掌握求极限的初等方法，并能熟练地运用判别极限存在的两个准则和两个重要极限来求一些极限

(1) 两个准则：

a) 单调有界变量必有极限准则；

b) 夹逼准则：若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$．（对函数极限也有类似准则）．

(2) 两个重要极限：若口为某个极限过程的无穷小，则

$$\lim_{\text{某过程}}\frac{\sin\square}{\square}=1,\lim_{\text{某过程}}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e$$

**注 1**：第二个极限特点

a) $1^\infty$ 型未定式；

b) 括号中 1 后的变量(包括符号)与幂互为倒数．

**注 2**：一般讲，对 $1^\infty$ 型未定式，题中第二个特点可能不满足，但为了利用第二个极限，我们可以如下计算：

设 $\lim u(x)=0,\lim v(x)=\infty$，要计算 $\lim(1+u(x))^{v(x)}$，则

$\lim(1+u(x))^{v(x)}=\lim[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}]^{u(x)v(x)}=e^{\lim u(x)v(x)}$

即底为 e，幂为 $\lim u(x)v(x)$．

同时还应记住几个重要的极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(a>0)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$

$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0,(|q|<1),\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a},(a>0,a\neq 1)$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a(a>0)$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha(\alpha$ 为实数)．

6．理解函数在某点连续的三种等价定义，会判断函数在某点的连续性．记住"一切初等函数在其定义域的区间内都是连续的"这个结论

(1) 函数连续的三种等价定义：

a) 若函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 的一个邻域上有定义(包括 $x_0$)，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处是连续的．

b) 若函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 的一个邻域上有定义(包括 $x_0$)，当自变量在点 $x_0$ 处取得增量 $\Delta x$，相应的函数取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，且 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$，则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处是连续的．

c) 设有函数 $y=f(x)$，若对任给的 $\epsilon>0$，总存在一个 $\delta(\epsilon,x_0)>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ 总成立，则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处是连续的．

(2) 若 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 或 $[a,b]$ 上每一点处连续，则称 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 或 $[a,b]$ 上连续．

注：定义 a) 给出了求连续函数的极限的一个重要的法则：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$．

7．掌握极限性质、运算法则和连续函数的运算性质

(1) 极限性质：唯一性　变量若有极限，则极限唯一；有界性　有极限的变量必有界(注：对函数而言是局部有界)；保号性　某时刻以后 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)\Rightarrow\lim\varphi(x)\geqslant\lim\psi(x)$；若 $\lim f(x)>0$ 或 $<0\Rightarrow$ 某时刻以后 $f(x)>0$ 或 $<0$．

(2) 极限运算法则：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$，$(B\neq0)$

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=A^B$，$(A>0)$．

(3) 连续函数的运算性质

a) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}$，$(g(x)\neq0)$ 也在点 $x_0$ 处连续．

b) 设 $u=\varphi(x)$ 在 $x_0$ 处连续，$u_0=\varphi(x_0)$，函数 $y=f(u)$ 在 $u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x_0$ 处连续．

c) 设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，并且是递增的(或递减的) $f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$，则反函数 $x=\varphi(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$(或 $[\beta,\alpha]$) 上也连续，并且也是递增的(或递减的)．

8．了解函数间断点的分类原则以及由连续性定义得出找间断点的方法

(1) 间断点的定义：若上面连续函数定义 a) 中有一个条件不满足，即：或 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处无定义，或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，则称点 $x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点．

(2) 间断点的分类：设 $x_0$ 为间断点，a) 若 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 均存在，但 $f(x_0-$

$0)\neq f(x_0+0)$，则称点 $x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点；其中若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$，则点 $x_0$ 称为可去间断点；b) 不属于第一类的间断点称为第二类的间断点. 若 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 中至少有一个等于符号 $\infty$，则称 $x_0$ 为无穷间断点.

(3) 求间断点的方法：若 $f(x)$ 为初等函数，使 $f(x)$ 无定义的点便是间断点；若 $f(x)$ 为分段函数，$f(x)$ 在分段点处是否连续，需用连续函数定义判别之.

9. 了解闭区间上连续函数的基本性质（最值定理；有界定理；介值定理；零点定理）；对函数连续性的概念和在闭区间上连续函数的性质要求形象化的理解.

基本性质：设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则

(1) 函数 $f(x)$ 在闭区间上至少取得最大值和最小值各一次；

(2) 函数 $f(x)$ 在闭区间上有界，即：存在 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M, x\in[a,b]$；

(3) 设 $M$、$m$ 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则对于满足条件 $m\leqslant C\leqslant M$ 的任何实数 $C$，在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 $\xi$，使得 $f(\xi)=C$；

(4) 若 $f(a)f(b)<0$，则在 $(a,b)$ 上至少存在一个点 $\xi$，使得 $f(\xi)=0$，或者说：若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在 $(a,b)$ 内方程 $f(x)=0$ 至少有一个实根（零点定理）.

## 三、模拟试题一

**（一）单项选择题** （在每小题的四个备选答案中选出一个正确的，并将其序号填写在题干后的括号内）

1. 设有集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$，则有 （　　）

(1) $A\supset B$　(2) $A\subset B$　(3) $A\cap B\supset B$　(4) $A\cap B\subset B$

2. 若 $f(\frac{1}{x})=(\frac{1+x}{x})^2$，则 $f(x)=$ （　　）

(1) $\left(\frac{x}{1+x}\right)^2$　(2) $\left(\frac{1+x}{x}\right)^2$　(3) $(1+x)^2$　(4) $(1-x)^2$

3. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数的是 （　　）

(1) $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$　(2) $f(x)=\sin x, g(x)=\frac{x\sin x}{x}$

(3) $f(x)=|x|, g(x)=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$　(4) $f(x)=1, g(x)=x^0$

4. 下列函数中是偶函数的有 （　　）

(1) $\frac{|x|}{x}$　(2) $x^2\cos x$　(3) $\frac{e^x-1}{e^x+1}$　(4) $\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，下列函数中是奇函数的有 （ D ）

(1) $y=-|f(x)|$　(2) $y=|x|f(x^2)$

(3) $y=-f(-x)$　(4) $y=f(x)-f(-x)$

6. 函数 $f(x)=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域是 （ A ）

(1) $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$　(2) $[0,\pi]$　(3) $[-4,4]$　(4) $[-4,\pi]$

7. 已知函数 $f(3-2x)$ 的定义域为 $[-1,2]$，则 $f(x)$ 的定义域为 （ D ）

(1) $\left[-\frac{5}{2},-1\right]$　(2) $[-1,2]$　(3) $(-1,5]$　(4) $[-1,5]$

8. 函数 $y=\sqrt{\frac{2+x}{1-x}}+\lg(x^2-x-2)$ 的定义域是　(　)

(1) $[-2,-1)$　(2) $[-2,1)$　(3) $(2,+\infty)$　(4) $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

9. 设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则函数 $f(x+a)+f(2x+a)$，$(0<a<1)$ 的定义域是　(　)

(1) $\left[-\frac{a}{2},\frac{1-a}{2}\right]$　(2) $\left[-\frac{a}{2},1-a\right]$

(3) $[-a,1-a]$　(4) $\left[-a,\frac{1-a}{2}\right]$

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, 当 x\leqslant 0\\ -x^3, 当 x>0\end{cases}$ 的反函数为 $\varphi(x)$，则 $\varphi(4)=$　(　)

(1) $-2$　(2) $2$　(3) $\sqrt[3]{4}$　(4) $-\sqrt[3]{4}$

11. 函数 $y=\pi+\arctan\frac{x}{2}$ 的反函数是　(　)

(1) $y=2\tan(x-\pi)$，$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$　(2) $y=\tan\frac{x}{2}$，$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

(3) $y=2\tan\frac{x}{2}$，$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$　(4) $y=\frac{1}{2}\tan x$，$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

12. 设 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(bc-ad\neq 0)$，其反函数为　(　)

(1) $\frac{d-bx}{cx+a}$　(2) $\frac{b-dx}{cx-a}$　(3) $\frac{d-bx}{a-cx}$　(4) $\frac{b-dx}{a-cx}$

13. 设当 $0<x\leqslant 3$ 时，$f(x)=x^3$，又已知 $f(x)$ 以 3 为周期，则 $f(-5)=$　(　)

(1) $-125$　(2) $1$　(3) $-8$　(4) $(-8)^3$

14. 设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，则 $f[f(x)]=$　(　)

(1) $\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$　(2) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$　(3) $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$　(4) $\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

15. 下列结论错误的是　(　)

(1) 若 $y=y(u)$ 为偶函数，$u=u(x)$ 为奇函数，则 $y=y(u(x))$ 为偶函数

(2) 两个单调增函数之和仍为单调增函数

(3) 两个单调增(减)函数之积必为单调增(减)函数

(4) 设 $y=f(x)$ 为单调增函数，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 必为单调增函数

16. $f(x)=\cos x^2$ 在 $xoy$ 平面上的图形　(　)

(1) 关于 $y$ 轴对称　(2) 关于 $x$ 轴对称

(3) 关于座标原点对称　(4) 关于直线 $x=y$ 对称

17. 使函数 $y=\ln(x-1)$ 在下面区间中为有界的区间是　(　)

(1) $(1,+\infty)$　(2) $(2,+\infty)$　(3) $(1,2)$　(4) $(2,3)$

18. 下列函数为初等函数的是　(　)

A

(1) $y=\left[\frac{\sin(e^x-1)}{\ln(1+x^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$ (2) $y=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, x\neq 1\\ 0, x=1\end{cases}$

(3) $y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ (4) $y=\sqrt{-2-\cos x}$

19. 若 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=2, \lim\limits_{x\to-0}f(x)=A$，又 $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\frac{|x|}{x}\right]$ 存在，则 $A=$ ( )

(1) $-2$ (2) 1 (3) 0 (4) 2

20. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+3, x>3\\ 0, x=3\\ x^2-3, x<3\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=$ ( )

(1) 0 (2) $-6$, (3) 6, (4) 不存在

21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{kx}=2$，则 $k=$ ( )

(1) 6 (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x^2+x}{\cos^2 x-x}=$ ( )

(1) $\infty$ (2) $-1$ (3) 振荡不存在 (4) 1

23. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+kx)^{\frac{m}{x}}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ( )

(1) $e^m$ (2) $e^k$ (3) $e^{-km}$ (4) $e^{km}$

24. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\leqslant 0\\ \lg x, x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-\cos x, x\leqslant 0\\ 1-\sqrt{x}, x>0\end{cases}$，则 $g[f(-1)]=$ ( )

(1) 0 (2) 1 (3) $2-\cos 1$ (4) $\lg(1-\cos 1)$

25. 当 $x\to 0$ 时与 $x$ 是等价无穷小量的是 ( )

(1) $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ (2) $\frac{(x+1)x}{4+\sqrt[3]{x}}$ (3) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ (4) $x^2(x+1)$

26. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, x\geqslant 0\\ x^3, x<0,\end{cases}$ $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，则 $\varphi(-8)=$ ( )

(1) $e^{-8}$ (2) $-8^3$ (3) $-2$ (4) $3\ln 2$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta)=0$，则 ( )

(1) $\alpha=1, \beta=0$ (2) $\alpha=-1, \beta=1$

(3) $\alpha=1, \beta=-1$ (4) $\alpha=1, \beta=1$

28. 下列函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断的有 ( )

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0,\\ 0, x=0\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$　　(4) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x$

29. 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$,则必有　( )

(1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$　　(2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=0$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$　　(4) $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=\infty,(k\neq 0)$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+a_3^n)^{\frac{1}{n}}=$　( 4 )

(1) $a_1$　(2) $a_2$　(3) $a_3$　(4)$\max\{a_1,a_2,a_3\}$ 其中 $a_1,a_2,a_3$ 都大于零

31. 下列结论正确的有　( )

(1) 在某过程中,若 $f(x)$ 有极限,$g(x)$ 无极限,则 $f(x)g(x)$ 必无极限

(2) 若数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都发散,则数列$\{x_n+y_n\}$也发散

(3) 若 $f(x)\geqslant 0$,$\lim f(x)=A$, 则 $A\geqslant 0$

(4) 若 $f(x)>g(x)$,又 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 均存在,则 $\lim f(x)>\lim g(x)$

32. 下列结果中错误的有　( )

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且$A>0$ ($A<0$), 则存在 $x_0$ 一个去心邻域,使得在此邻域中 $f(x)>0$ ($f(x)<0$)

(2) 数列$\{u_n\}$中任意去掉(或增加)有限多项,不影响数列的敛散性

(3) 在某过程中,若 $f(x)$ 有极限,$g(x)$ 无极限,则 $f(x)+g(x)$ 必无极限

(4) 无穷小是比任何正数都小的一个数

33. 下列结果中正确的有　( )

(1) 设 $f(x)$ 在$(a,b)$内连续,则 $f(x)$ 在$(a,b)$内必有界

(2) 设 $f(x)$ 在$(a,b)$上连续,则 $f(x)$ 在$(a,b)$上可取得最大值和最小值

(3) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上有定义,在$(a,b)$内连续,且 $f(a)f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$

(4) 无穷小与有界量之积为无穷小

34. 求$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$,下列几种做法,你认为正确的是　( 4 )

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=0\cdot 1$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\dfrac{x}{\sin x}=0\cdot 1=0$

(4) $\because x^2\to 0$(当 $x\to 0$),又$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$, $\therefore$ 有$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$

35. a　收敛数列一定有界；b　有界数列一定收敛；c　无界函数一定是无穷大量；d　无穷大量一定无界；e　零是无穷小；f　无穷小就是零；g　单调有界数列一定收

敛. 下列结论正确的有： ( )

(1) a b d 正确 (2) a c d e 正确

(3) a d e g 正确 (4) d e f g 正确

36. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=$ ( )

(1) 1 (2) $\dfrac{\pi}{2}$ (3) 0 (4) $\dfrac{1}{2}$

37. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}=$ ( )

(1) 0 (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) 1 (4) $\infty$

38. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{\pi}{x}=$ ( )

(1) 1 (2) $\pi$ (3) 不存在 (4) 0

39. $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=$ ( )

(1) 1 (2) $-1$ (3) 0 (4) 2

40. $\lim\limits_{x\to0}(x^2\sin\dfrac{1}{x^2})=$ ( )

(1) 0 (2) 1 (3) $-1$ (4) 不存在

41. $\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{x-1}}=$ ( )

(1) 0 (2) 1 (3) $\infty$ (4) 不存在但不是 $\infty$

42. 当 $x\to0$ 时，下列各函数都是无穷小量，其中为 $x$ 高阶无穷小的是 ( )

(1) $\sin2x$ (2) $\sin^2x$ (3) $x+\sin x$ (4) $x$

43. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin3x}{\tan5x}=$ ( )

(1) $\dfrac{3}{5}$ (2) $-\dfrac{3}{5}$ (3) 1 (4) $-1$

44. 设 $a>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\dfrac{a}{n})^{n^2}=$ ( )

(1) $-\dfrac{a^2}{2}$ (2) $\dfrac{a^2}{2}$ (3) $e^{\frac{a^2}{2}}$ (4) $e^{-\frac{a^2}{2}}$

45. 下列极限存在的有 ( )

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)}{x^2}$ (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2^x-1}$ (3) $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$ (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$

46. 函数 $y=\dfrac{x(x-1)\sqrt{x+1}}{x^3-1}$ 在下述过程中不是无穷小量的是 ( )

(1) $x\to0$ (2) $x\to\infty$ (3) $x\to-1+0$ (4) $x\to1$

47. 若 $\lim\limits_{x\to a}(x-a)f(x)=0$，则 $f(x)$ 是 ( )

(1) 任意函数 (2) 有极限的函数 (3) 正无穷大量 (4) 负无穷大量

48. $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有定义是当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 有极限的 ( )

(1) 必要条件 (2) 充分条件 (3) 充要条件 (4) 无关条件