21世纪普通高等学校数学系列规划教材

高等数学学习指导

上册

陈克东 主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21 世纪普通高等学校数学系列规划教材

高等数学学习指导

上册

陈克东　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书根据高等学校工科本科高等数学课程教学基本要求，结合硕士研究生入学考试之数学考试大纲的要求编写，与陈克东主编的《高等数学·上册》教材配套，全书共 11 章，分上、下两册. 上册内容包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，向量代数与空间解析几何等 6 章. 每一章均按内容提要、重点与难点、例题分析以及教材中该章部分习题的解答等四部分编写，且以典型例题的分析、解法、评述为主.

本书的宗旨是指导读者同步学习高等数学，也为了帮助读者全面系统地复习高等数学内容. 本书选择的例题范围广，类型多，技巧性强，既有典型性，又由浅入深，具有一定的难度，有助于读者学习高等数学课程，提高数学思维水平和应试能力.

本书适合作为高等院校各理工专业、经济管理类专业师生的教学参考书，也可作为报考硕士研究生的读者的辅导书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导. 上册/陈克东主编. —北京：中国铁道出版社，2008. 10
(21 世纪普通高等学校数学系列规划教材)
ISBN 978-7-113-08823-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 152900 号

书　　名：高等数学学习指导·上册
作　　者：陈克东　主编

策划编辑：李小军
责任编辑：李小军　　编辑部电话：(010)83550579
编辑助理：王　丹
封面设计：付　巍　　封面制作：白　雪
责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街 8 号　　邮政编码：100054)
印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司
版　　次：2008 年10月第 1 版　　2008 年10月第 1 次印刷
开　　本：787mm×960mm　1/16　　印张：15.5　　字数：280 千
印　　数：4000 册
书　　号：ISBN 978-7-113-08823-1/O·176
定　　价：24.00 元

安徽理工大学图書館 藏書

版权所有　侵权必究

本书封面贴有中国铁道出版社激光防伪标签，无标签者不得销售

凡购买铁道版的图书，如有缺页、倒页、脱页者，请与本社计算机图书批销部调换。

前　言

高等数学是高等理工科院校和经济管理类院校一门十分重要的公共必修基础课，也是硕士研究生入学考试的一门国家命题的必试科目.为了指导读者同步学习高等数学，也为了帮助读者全面系统地复习高等数学内容，深刻领会高等数学的思维方法，深入理解高等数学的基本概念和基本理论，切实掌握高等数学的基本方法和解题技巧，认真培养高等数学的素质和能力，进而在总体上提高高等数学的学习水平和应试水平，经过长时间的酝酿，编写了这本教学参考书.

本书根据高等学校工科本科高等数学课程教学基本要求，并结合硕士研究生入学考试之数学考试大纲的要求编写.全书共 11 章，分上、下两册出版.上册内容包括第 1 章函数、极限与连续，第 2 章导数与微分，第 3 章中值定理与导数的应用，第 4 章不定积分，第 5 章定积分及其应用和第 6 章向量代数与空间解析几何等.与我们编写的《高等数学・上册》教材相配套，每一章都按照内容提要、重点与难点、例题分析以及教材中该章部分习题的解答等四个部分编写，且以典型例题的分析、解法、评述为主，期望读者从中得到启迪，以提升其学习效果.

在高等数学的教学过程中，正面临着无法回避且日益突出的矛盾.这就是：一方面高等数学课程的教学时数普遍减少；而另一方面，高等数学课程的教学内容却在不断拓展延伸，教学要求也在相应提高.正是为了较好地解决这一矛盾，我们萌发了编写本书的想法.

在本书的撰写过程中，我们努力追求编写的质量.本书**既反映了编者在长期高等数学教学实践中积累的一些有益的经验，体现"数学思想方法是数学教学的灵魂"的改革创新理念**，同时吸收了同类教学参考书中某些成功的做法，还考虑到读者对象的一些特点.基于此，**本书对于基本概念的叙述力求深入浅出，清晰准确；对于基本方法的介绍从分析、比较切入，力求阐明数学思维方法的本质特征及其应用技巧；对于例题的选择力求典型规范，内容覆盖面广，题型种类多；有些例题构建成组合题，有些例题给出几种解法，强调内容的融会贯通，以启迪思维，培育读者的创新能力**，并且在各章的最后一节提供了我们编写的教材中这一章部分习题的解答，供读者参阅.

本书由陈克东任主编，黄文韬、张楠任副主编.第 1 章的§1.4 和第 2 章的§2.3 由李光云、唐红武编写，第 3 章的§3.4、第 4 章的§4.2 和第 5 章的§5.5 由曾玲编写，第 6 章的§6.3 由唐生强编写外，其余内容由陈克东编写.全书由陈克东统稿.

在本书编写过程中，得到桂林电子科技大学教务处、数学与计算科学学院的热情支持. 唐清干、刘翠玉、凌琳诸同志给予了不少帮助. 在此特致以衷心感谢.

限于编者的水平，书中难免有错漏或不足之处，恳请同行和读者指正.

陈克东

2008 年 5 月

于桂林电子科技大学仁和苑

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第 1 章

函数、极限与连续

§1.1 函数

1.1.1 内容提要

1. 理解函数的概念、函数的定义域

定义 设 X 与 Y 为两个非空实数集，若存在某一对应规则 f，使得对于 X 中的任意一个实数 x，Y 中都有确定的实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 X 上的函数，记为 $y = f(x)$. 没有特别说明时，函数都是指单值函数.

① 函数概念的本质特征是确定函数的两个要素：定义域和对应法则.

② 在函数记号 $y = f(x)$ 中，记号 f 表示自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则. 此对应法则 f 与自变量、因变量用什么字母表示无关，且不限于表示某一数学表达式，也可以表示几个数学表达式(如分段函数).

2. 理解和掌握函数的几个重要特性：单调性、奇偶性、周期性、有界性

(1) 单调性. 若对于任意的 $x_1 < x_2 \in (a,b)$，都有 $f(x_2) - f(x_1) > 0$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调增加；若 $f(x_2) - f(x_1) < 0$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调减小.

(2) 奇偶性. 设函数 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上有定义. 若 $f(-x) = f(x)$，或 $f(-x) - f(x) = 0$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数，其图像关于 y 轴对称；若 $f(-x) = -f(x)$，或 $f(-x) + f(x) = 0$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数，其图像关于原点对称，并有 $f(0) = 0$.

(3) 周期性. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义. 若存在正数 T，使得 $f(x+T) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 通常所说的周期一般是指最小正周期，但不是任何周期函数都有最小正周期.

(4) 有界性. 设存在正数 M，使得对于一切 $x \in (a,b)$，都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有界.

注意：所谓 $f(x)$ 有界，一定要指出 x 的一个变化范围及一个正数 M. 例如，当 $x \in [1, +\infty)$ 时，函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 有界，因为 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$；当 $x \in (0,1)$ 时，函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 无界，因为此时正数 M 不存在.

一般来说，讨论"某个函数是否具有某个特性"时，一定要将该函数与在哪个区间上研究联系起来，否则会导致错误.

3. 熟练掌握基本初等函数的定义域，性质及其图像的特点

有关内容见主教材。

4. 理解复合函数的概念，理解分段函数的概念，了解反函数、隐函数的概念

(1) 复合函数. 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，则函数 $y = f(\varphi(x))$ 称为由函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数. y 是因变量，x 是自变量，u 是中间变量.

注意：不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.

会熟练分析复合函数的复合过程.

(2) 分段函数. 在定义域的不同区间内，对应法则用不同的数学表达式表示的函数，称为分段函数. 分段函数在高等数学的某些理论与应用的研究中，有着特殊的意义和作用.

注意：分段函数是用几个不同的式子合起来表示的一个函数，而不是表示几个函数，其定义域是每个式子自变量取值范围的并集.

(3) 反函数. 设已知函数为 $y = f(x)$，若由此解出的 $x = \varphi(y)$ 是一个函数，则称它为 $f(x)$ 的反函数，记为 $x = f^{-1}(y)$. 习惯上，将反函数中的自变量 y 改写为 x，而将反函数中的因变量 x 改写为 y，这样，直接函数 $y = f(x)$ 的反函数就记为 $y = f^{-1}(x)$.

注意：直接函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图像是同一条曲线，但是不同的函数；而直接函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像是对称于直线 $y = x$ 的不同的曲线，当然它们是不同的函数.

(4) 隐函数. 若在方程 $F(x,y) = 0$ 中，令 x 取某一区间内的任一确定值，相应地总有满足这个方程的 y 值存在，那么就称方程 $F(x,y) = 0$ 在该区间上确定了 x 的隐函数 y. 习惯上，仍把 x 与 y 分别称为自变量与因变量. 若可以由方程解出 y，称为隐函数的显化. 但是，隐函数的显化有时是困难的，甚至是不可能的.

5. 理解初等函数的概念，掌握建立简单实际问题中的函数关系式

由同一自变量的五类基本初等函数和常量，经过有限次的四则运算和有限次的复合运算，并可用一个数学式子表示的函数，称为初等函数.

注意：分段函数往往不是初等函数；但不能说分段函数都不是初等函数. 如函数

$$f(x) = \begin{cases} x & 当\ x \geqslant 0 \\ -x & 当\ x < 0 \end{cases}$$

虽是分段函数，但也是初等函数. 因为它可以用一个数学式子 $f(x) = \sqrt{x^2}$ 来表示.

1.1.2 重点、难点

(1) 本节的重点是：函数的概念；函数的几个重要特性；分段函数、复合函数、隐函数的

概念. 而分段函数与复合函数在高等数学不少重要概念的研究中常常涉及，尤应正确理解.

(2) 分析复合函数的复合过程是一些读者感到困难的问题，也是本节的一个难点.

(3) 函数的几个重要特性：有界性、单调性、奇偶性、周期性，是在研究函数性态时，常常要研究函数是否具有的特性，切不要以为函数都具有这些特性. 同时，函数的每一个重要特性都要与所讨论的定义域或区间联系在一起，不能只说某函数是否"单调"、"有界"；而应当说，某函数在某个区间上是否"单调"、"有界". 如正弦函数 $y=\sin x$ 在定义域上是周期函数，而正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 或 $[0,\pi]$ 上就不是周期函数.

(4) 分段函数的变形或复合，常常只考虑函数表达式的变形或复合，而忽略了相应区间的变化这个关键点，导致错误的发生. 如设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-\cos x & 当\ x\leqslant 0\\ \ln x & 当\ x>0\end{cases},$$

求 $f(1-x)$.

答：
$$f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x)-\cos(1-x) & 当\ x\leqslant 0\\ \ln(1-x) & 当\ x>0\end{cases}$$

就是错误的. 正确的是

$$f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x)-\cos(1-x) & 当\ 1-x\leqslant 0\\ \ln(1-x) & 当\ 1-x>0\end{cases},$$

即
$$f(1-x)=\begin{cases}\sin(1-x)-\cos(1-x) & 当\ x\geqslant 1\\ \ln(1-x) & 当\ x<1\end{cases}.$$

1.1.3　例题分析

对基本题，要求做到概念清楚，书写规范，计算熟练，结果正确. 且能做到举一反三，触类旁通.

例 1　设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}+\ln(x-3)$，求：

(1) $f(x)$ 的定义域；

(2) $f(\ln x)$ 的定义域；

(3) $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域 $(a>0)$.

解　(1) 第一项 $\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$ 的定义域是 $5-x>0$，第二项 $\ln(x-3)$ 的定义域是 $x-3>0$. 故函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}+\ln(x-3)$ 的定义域是

$$\begin{cases}5-x>0\\ x-3>0\end{cases},$$

即为
$$3<x<5.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(2) $f(\ln x)$ 的定义域是 $3<\ln x<5$,即为 $e^3<x<e^5$.

(3) $f(x+a)$ 的定义域是 $3<x+a<5$,即为 $3-a<x<5-a$;而 $f(x-a)$ 的定义域是 $3<x-a<5$,即为 $3+a<x<5+a$.故函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域是

$$\begin{cases}3-a<x<5-a\\3+a<x<5+a\end{cases},$$

即为

$$3+a<x<5-a(0<a<1).$$

例 2 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$,$x_1=a+\dfrac{1}{a}(a\neq 0)$,试讨论 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处的函数值.

解 由题设,

$$f(x_1)=\frac{a+\frac{1}{a}}{\sqrt{4-\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}}=\frac{a^2+1}{a-\sqrt{-\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}},$$

要使 $f(x_1)$ 有意义,必须有 $-\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2>0$,这是不可能的.因此 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处的函数值不存在,即 $f(x_1)$ 无意义.

例 3 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{x^4+1}(x\neq 0)$,求 $f(x)$.

解 因为

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2},$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2}.$$

本题的关键是将函数右端的表达式转化为“$x+\dfrac{1}{x}$”的表达式.

例 4 设 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=1-\cos x$,求 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)$.

解 **法 1**:变外面.因为

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right),$$

所以

$$f(x)=2(1-x^2).$$

因此

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)=2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x.$$

法 2:变里面.因为

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right)=f\left(\cos\frac{\pi-x}{2}\right),$$

由题设,于是有 $f\left(\cos\dfrac{\pi-x}{2}\right)=1-\cos(\pi-x)=1+\cos x$,因此

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x.$$

本题这两种方法的核心是“变形”，变形的目的是向已知形式靠近，从而达到解决问题的目的．一题多解是启迪思维，掌握技巧，培育能力，提高素质的好方法，读者应予重视，并且实践之．

例 5　证明 $y=\dfrac{ax+b}{cx-a}$ 的反函数是本身$(a^2+bc\neq 0)$．

证　由 $y=\dfrac{ax+b}{cx-a}$，可得 $cxy-ay=ax+b$，于是，有

$$cxy-ax=ay+b,x=\frac{ay+b}{cy-a}.$$

按习惯记法，得反函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx-a}$．

求反函数分两步来做，第一步解出 x，这一步是关键；第二步改写，就是按习惯记法，以字母 x 表示自变量，字母 y 表示函数．

例 6　设 $f(x)$ 对一切实数 x、y 满足等式 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，且 $f(0)\neq 0$，$f(1)=a$．证明：(1) $f(0)=1$；(2) 对一切自然数 n，有 $f(n)=a^n$．

证　(1) 令 $x=y=0$，则 $f(0)=[f(0)]^2$，因为 $f(0)\neq 0$，所以 $f(0)=1$．

(2) 用数学归纳法，当 $n=1$ 时，$f(1)=a^1$，等式成立．

设 $n=k$ 时，等式成立，即 $f(k)=a^k$，往证 $n=k+1$ 时，等式也成立．因为 $f(k+1)=f(k)\cdot f(1)=a^k\cdot a^1=a^{k+1}$，即 $f(k+1)=a^{k+1}$．所以，对一切自然数 n，有 $f(n)=a^n$．

例 7　设 $f(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x<0\\ x & \text{当 } x\geqslant 0\end{cases}$，$g(x+1)=x^2+x+1$．

求 $g(f(x))$，$f(g(x))$．

解　因为 $g(x+1)=x^2+x+1=(x+1)^2-(x+1)+1$，所以

$$g(x)=x^2-x+1.$$

于是
$$g(f(x))=(f(x))^2-f(x)+1=\begin{cases}1 & \text{当 } x<0\\ x^2-x+1 & \text{当 } x\geqslant 0\end{cases}.$$

而
$$f(g(x))=\begin{cases}0 & \text{当 } g(x)<0\\ g(x) & \text{当 } g(x)\geqslant 0\end{cases},$$

由于
$$g(x)=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

所以
$$f(g(x))=x^2-x+1,x\in(-\infty,+\infty).$$

求复合函数的解析表达式，通常是从内层到外层，逐层复合．而求包含分段函数复合而成的复合函数，关键在于求出复合过程变量的变化范围．对此，读者必须予以足够的注意，否则将导致错误．同时，在这种情况下的复合函数可能不再是分段函数，本题的 $f(g(x))$ 就

不是分段函数，而是初等函数了.

例 8 判定函数 $f(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$ 的奇偶性.

解 为判定函数 $f(x)$ 的奇偶性，必先求出 $f(-x)$.

$$f(-x)=(2+\sqrt{3})^{-x}+(2-\sqrt{3})^{-x}=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^x}+\frac{1}{(2-\sqrt{3})^x}$$

$$=\frac{(2-\sqrt{3})^x}{[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]^x}+\frac{(2+\sqrt{3})^x}{[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})]^x}$$

$$=(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x,$$

故 $f(-x)=f(x)$，函数 $f(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$ 为偶函数.

判定一个函数 $f(x)$ 是偶函数，可以用 $f(-x)=f(x)$，也可以用 $f(-x)-f(x)=0$；同样，判定一个函数 $f(x)$ 是奇函数，可以用 $f(-x)=-f(x)$，也可以用 $f(-x)+f(x)=0$，有时用后者还比较简捷，如要证明函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数，用 $f(-x)+f(x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})+\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\ln[(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})]=\ln1=0$ 来证明，就比较简捷、自然. 对于类似问题，读者不妨一试.

例 9 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是奇函数，证明复合函数 $f(g(x))$ 及 $g(f(x))$ 也是奇函数.

证 由题设，有 $f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=-g(x)$. 令 $F(x)=f(g(x))$，于是

$$F(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=-f(g(x))=-F(x).$$

故 $f(g(x))$ 为奇函数.

同样，可证明 $g(f(x))$ 也是奇函数.

若函数 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数时，读者应能证明复合函数 $f(g(x))$ 及 $g(f(x))$ 都是偶函数. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是偶函数时，复合函数 $f(g(x))$ 及 $g(f(x))$ 仍是偶函数，读者应能证明之. 上述三类复合函数奇偶性的结论，读者应当牢记. 进一步，若 $f(x)$ 是偶函数，只要 $g(x)$ 处处有定义，则 $g(f(x))$ 就是偶函数，如 $e^{\cos x}$ 为偶函数.

例 10 设 $f(0)=0$，且 $x\neq0$，$|a|\neq|b|$ 时，$f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx+\frac{d}{x}$ (a、b、c、d 均为常数)，证明 $f(x)$ 为奇函数.

证 当 $x\neq0$ 时，令 $x=\frac{1}{t}$，得

$$af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=\frac{c}{t}+dt,$$

将 t 改写为 x，并与原表达式联立，得

$$\begin{cases} af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{c}{x}+dx & (1)\\ af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx+\frac{d}{x} & (2)\end{cases}$$

它们是关于 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的方程组，由(2) 式 $\times a-$(1) 式 $\times b$，得

$$(a^2-b^2)f(x)=(ac-bd)x+\frac{ad-bc}{x}.$$

因为 $|a|\neq|b|$，所以 $a^2-b^2\neq 0$，得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left[(ac-bd)x+\frac{ad-bc}{x}\right],$$

而
$$f(-x)=-\frac{1}{a^2-b^2}\left[(ac-bd)x+\frac{ad-bc}{x}\right],$$

于是 $f(-x)=-f(x)$，且 $f(0)=0$，故知 $f(x)$ 为奇函数.

为了证明 $f(x)$ 是奇函数，必须先求出 $f(x)$，为求 $f(x)$，关键在于发现并利用 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 在结构上的特点.

读者可能已经发现，例 10 的结论可以推广到更为一般的情况. 为此，我们介绍下例.

例 11 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 定义在某对称区间上，且 $|a|\neq|b|$. 若 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(-x)=cg(x)$（a、b、c 均为常数），试证：(1) 当 $g(x)$ 为偶函数时，$f(x)$ 为偶函数. (2) 当 $g(x)$ 为奇函数，$f(x)$ 为奇函数.

证 (1) 以 $-x$ 代入原表达式，并与原表达式联立，得

$$\begin{cases} af(-x)+bf(x)=cg(-x) & (1)\\ af(x)+bf(-x)=cg(x) & (2)\end{cases}.$$

它们是关于 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的方程组，可用完全类似于例 10 的方法予以证明.

这里，给出更为简捷的证法.

由题设，当 $g(x)$ 为偶函数时，由(1)、(2) 两式相减，得

$$af(-x)+bf(x)-af(x)-bf(-x)=0,$$

即
$$(a-b)f(-x)=(a-b)f(x).$$

因为 $|a|\neq|b|$，所以 $a-b\neq 0$，因此有

$$f(-x)=f(x),$$

故知，函数 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 证明方法类似，读者自己完成.

例 12 试问：(1) 函数 $f(x)=\cos x, 0\leqslant x\leqslant\pi$ 是周期函数吗？

(2) 函数 $\varphi(x)=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi$ 是奇函数吗？若不是，能否将 $\varphi(x)$ 延拓成奇函数？延拓成偶函数？

解 (1) 函数 $f(x)=\cos x, 0\leqslant x\leqslant\pi$ 不是周期函数. 因为判别一个函数是否是周期函数，必须考察这个函数的定义域是什么，且在该定义域上是否满足 $f(x+T)=f(x)$.

(2) 函数 $\varphi(x)=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi$ 不是奇函数. 因为判别一个函数是否是奇函数（或偶函数），必须考察这个函数的定义域是什么，是否关于 $x=0$ 对称，且在该定义域上是否满足

$f(-x)=-f(x)$(或 $f(-x)=f(x)$).

可以将 $\varphi(x)$ 延拓成奇函数,只要构造出如下函数

$$\Phi(x)=\begin{cases}-\varphi(-x) & 当 -\pi\leqslant x<0\\ \varphi(x) & 当 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases},$$

即

$$\Phi(x)=\begin{cases}\sin x & 当 -\pi\leqslant x<0\\ \sin x & 当 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}.$$

还可以将 $\varphi(x)$ 延拓成偶函数,只要构造出函数

$$\psi(x)=\begin{cases}\varphi(-x) & 当 -\pi\leqslant x<0\\ \varphi(x) & 当 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases},$$

即

$$\psi(x)=\begin{cases}-\sin x & 当 -\pi\leqslant x<0\\ \sin x & 当 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}.$$

注意:(1) 本题的两问是不少读者容易产生错误的问题,读者应当清楚产生错误的原因.(2) 从本题的第(2) 问,读者应当懂得某个函数可能既可以延拓成奇函数,也可以延拓成偶函数.(3) 定义在对称区间上的函数 $f(x)$,都可以表示成偶函数$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$与奇函数$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$之和.

例 13 设存在两实数 a 与 b,且 $a<b$. 对任意 x,函数 $f(x)$ 适合 $f(a-x)=f(a+x)$,$f(b-x)=f(b+x)$. 试证 $f(x)$ 是以 $T=2(b-a)$ 为周期的周期函数.

证 由题设,因为 $f(a-x)=f(a+x)$,所以有

$$f(x)=f(2a-x). \tag{1}$$

又因为 $f(b-x)=f(b+x)$,所以有

$$f(x)=f(2b-x). \tag{2}$$

在(2) 式中,以 $2a-x$ 代替 x,得

$$f(2a-x)=f(2b-2a+x). \tag{3}$$

再由(1) 式、(3) 式,得

$$f(x)=f(2b-2a+x)=f(x+2(b-a)).$$

上式表明 $f(x)$ 是以 $T=2(b-a)$ 为周期的周期函数.

说明:函数(x) 满足 $f(a-x)=f(a+x)$ 表明其图像关于 $x=a$ 对称;满足 $f(b-x)=f(b+x)$,表明其图像关于 $x=b$ 对称. 本题表明,若函数 $f(x)$ 定义在$(-\infty,+\infty)$,其图像既关于 $x=a$ 对称,又关于 $x=b$ 对称,则该函数一定是周期函数,且周期为 $T=2(b-a)$. 在一些问题的求解过程中,如果将抽象思维与形象思维(含几何意义及图像)相结合,则得益匪浅,可使问题迎刃而解.

例 14 证明 $f(x)=x\cos x$ 不是周期函数.

证 法 1:反证法. 设 $f(x)=x\cos x$ 是以 $T>0$ 为周期的周期函数,则有

$$(x+T)\cos(x+T)=x\cos x.$$

令 $x=0$，有
$$T\cos T=0. \tag{1}$$

再令 $x=\frac{\pi}{2}$，有
$$\left(T+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(T+\frac{\pi}{2}\right)=0. \tag{2}$$

由(1)、(2)式可得
$$\begin{cases}\cos T=0\\ \sin T=0\end{cases}.$$

这样的 T 是不存在的.故 $f(x)=x\cos x$ 不是周期函数.

法 2：$f(x)=x\cos x$ 是一个连续无界的振荡函数，且振幅越来越大.所以 $f(x)=x\cos x$ 不是周期函数.

例 15　设 $f(x)$ 为奇函数，$f(1)=a$，且
$$f(x+2)-f(x)=f(2).$$

(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$；

(2) 问 a 取何值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

解　(1) 令 $x=-1$，得
$$f(2)=f(1)-f(-1)=2f(1)=2a.$$

令 $x=1$，得
$$f(2)=f(3)-f(1), \tag{1}$$

再令 $x=3$，得
$$f(2)=f(5)-f(3), \tag{2}$$

由(1)式＋(2)式，可得
$$f(5)-f(1)=2f(2),$$

即
$$f(5)=2f(2)+f(1)=5a.$$

(2) 要使 $f(x)$ 以 2 为周期，则对任何 x 都有
$$f(x+2)=f(x).$$

由题设
$$f(x+2)-f(x)=f(2)$$

得 $f(2)=0$，由(1)式知，$f(2)=2a$，故有 $f(2)=2a=0$，即 $a=0$.

例 16　设 $OABC$ 是一个正方形，O 是坐标原点，A、B、C 三点的坐标如图 1-1 所示.另有一直线 $x+y=t$，求正方形与平面区域 $x+y\leqslant t$ 的公共部分的面积 $S(t)$.

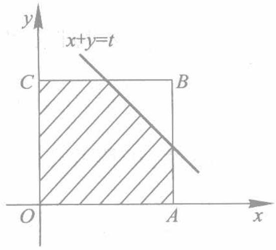

图 1-1

解　当 $t<0$ 时，$x+y\leqslant t$ 所表示的平面区域与正方形 $OABC$ 没有公共部分，于是 $S(t)=0$；

当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$x+y\leqslant t$ 所表示的平面区域与正方形 $OABC$ 的公共部分为一直角三角形，于是 $S(t)=\frac{1}{2}t^2$；

当 $1\leqslant t<2$ 时，$x+y\leqslant t$ 所表示的平面区域与正方形 $OABC$ 的公共部分为一个五边

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com