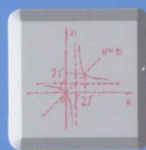
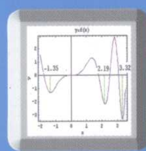
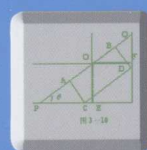
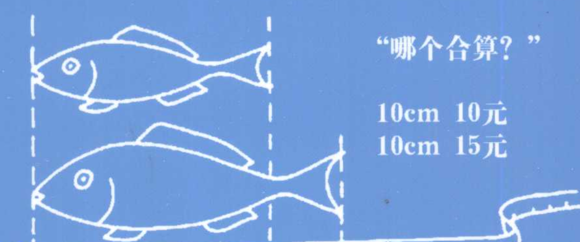
高等院校规划教材

ShuXue JianMo
数学建模

刘瑞芹　王文祥　主编



煤炭工业出版社

ShuXue JianMo

数学建模

高等院校规划教材

数学建模

主　编　刘瑞芹　王文祥
副主编　闫守峰　王　涛
主　审　贾　敬

煤炭工业出版社
·北　京·

内 容 提 要

本书共分7章，内容包括数学建模引论、初等数学方法建模、微分法建模、微分方程与差分方程建模、数学规划方法建模、线性代数与概率方法建模和科技论文写作等。

本书可作为高等院校数学建模、数学文化类课程教材，也可作为在校大学生课外读物或数学建模活动的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模/刘瑞芹，王文祥主编．—北京：煤炭工业出版社，2009.4

高等院校规划教材

ISBN 978-7-5020-3535-8

Ⅰ．数…　Ⅱ．①刘…②王…　Ⅲ．数学模型-高等学校-教材　Ⅳ．O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第039241号

煤炭工业出版社　出版

（北京市朝阳区芍药居35号　100029）

网址：www.cciph.com.cn

北京玥实印刷有限公司　印刷

新华书店北京发行所　发行

*

开本 787mm×1092mm $^{1}/_{16}$　　印张 $5^{3}/_{4}$

字数131千字　　印数1—1,000

2009年4月第1版　　2009年4月第1次印刷

社内编号6345　　定价33.00元

版权所有　违者必究

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，本社负责调换

前　　言

经过多年的发展，大学生数学建模竞赛已成为全国规模最大的课外科技活动。2008年，全国有31个省、市、自治区（包括香港特区）的1022所院校、12836个队（其中甲组10374队，乙组2462队）、38000多名来自不同专业的大学生参加了该项赛事。

华北科技学院自1999年起，开始组织本校学生参加全国大学生数学建模竞赛，至今已有1个队获全国一等奖，8个队获全国二等奖，14个队获河北赛区一等奖，20个队获河北赛区二等奖。为了扩大学生的受益面，提高学生的创新能力、数学应用能力及综合素质，激发学生学习数学的兴趣和欲望，培养学生主动探索、努力进取的学风，华北科技学院组织了具有多年数学建模竞赛教学和培训经验的老师，编写了这本数学建模教材。

本教材力图贯穿现代教育思想，以数学建模的一般方法为主线，着重训练学生运用数学知识建立数学模型、解决实际问题的技能技巧，激发学生的创造性，唤醒学生进行创造性思维的意识和掌握科研论文的写作方法。

本教材共分7章，第1章、第2章和第7章由刘瑞芹编写，第4章和第5章由王文祥编写，第3章由闫守锋编写，第6章由王涛编写。全书由刘瑞芹统稿，贾敬教授主审。

编　者

2009年2月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　次

第一章　数学建模引论

近年来，数学模型和数学建模这两个术语使用的频率越来越高。为解决实际问题，利用数学模型是一个非常重要的方法，比如考虑一个十字路口的交通问题，为使交通顺畅，需设计一个最佳交通流控制方案（是否设置单行道，是否限制载重车通行等）。因此，我们可以收集必要的数据（如车辆的速度、大小、机动性、交通流的密度、十字路口的结构等），用数学和统计学的有关知识进行分析，提炼出这些变量之间的必要的关系式，通过对结果的检验与分析，确定出几种设计方案中最优的一种，这就是数学建模。

本章介绍数学建模的基本概念、步骤和方法，并通过几个典型的建模实例展示其概貌。

第一节　数学建模入门

数学建模，简单地说，就是用数学语言来描述实际问题的过程。要学习数学建模，应该了解如下的基本概念：

一、数学模型

1. 数学模型的概念

模型一般分为具体模型和抽象模型两大类。具体模型有直观模型和物理模型，如汽车模型、展览会里的电站模型、火箭模型等；抽象模型有思维模型、符号模型和数学模型，如地图、电路图、分子结构图和方程等。

数学模型就是关于部分现实世界为实现某种目的所进行的一个抽象的简化的数学结构。更确切地说：数学模型就是对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定目的，根据对象特有的内在规律，在做出问题分析和一些必要、合理的简化假设后，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构（数学公式、算法、表格和图示等）。

数学模型是连接数学与实际问题的桥梁，是各种应用问题严密化、精确化、科学化的途径，是发现问题、解决问题的工具。随着社会的发展，生物、医学、社会、经济等各学科、各行业都涌现出大量的实际问题，这就要求人们运用数学知识及数学的思维方法去研究、去解决这些问题。在这个过程中，不是为了应用数学去寻找实际问题，而是为了解决实际问题需要应用数学。我们要对复杂的实际问题进行分析，发现其中的可以用数学语言来描述的关系或规律，把这个实际问题转化成一个数学问题，这就是数学模型。

2. 数学模型的特征

（1）实践性。有实际背景，有针对性，能接受实践的检验。

（2）抽象性。数学模型是对客观事物有关属性进行抽象的模拟，是用数学符号、数学公式、程序、图、表等来刻画客观事物的本质属性与内在联系，是现实世界简化而本质的描述。

（3）经济性。用数学模型研究不需要过多的专用设备和工具，可以节省大量的设备运行和维护费用，大大加快研究工作的进度，缩短研究周期，特别是在电子计算机得到广泛应用的今天，这个优越性就更为突出。

（4）应用性。注意实际问题的要求，强调模型的实用价值。

（5）综合性。数学与其他学科知识的综合。

（6）局限性。在简化和抽象过程中必然造成某些失真，而数学模型是为了某个特定目的，将原型的某一部分信息简缩、提炼而成的原型替代物，可以看成原型某一方面的理想化。

3. 数学模型的作用

数学模型的根本作用在于它将客观原型化繁为简、化难为易，便于人们采用定量的方法去分析和解决实际问题。因此，数学模型在科学发展、科学预测、科学管理、科学决策、人口控制、驾控市场经济乃至个人高效工作和生活等众多方面发挥着特殊的重要作用。另外，利用数学模型还可以对事物的发展进行预测，帮助我们对未来作出一些有益的猜想，甚至使我们对未来有所控制。

总之，数学模型具有解释、判断、预测等重要功能，它在各个领域的应用会越来越广泛。其主要原因有：

（1）社会生活的各个方面正在日益数量化，人们对各种问题的要求愈来愈精确。

（2）计算机的发展为精确化提供了条件。

（3）很多无法进行的实验或费用很大的实验问题，可以用数学模型进行研究。

4. 数学模型的分类

（1）按照模型的应用领域（所属学科）分为人口模型、交通模型、环境模型、生态模型、城镇规划模型、水资源模型、再生资源利用模型和污染模型等。

（2）按照建立模型的数学方法（所属数学分支）分为初等数学模型、微积分模型、线性代数模型、微分方程模型、概率统计模型、数学规划模型和图论模型等。

（3）按照模型的表现特性分为确定性模型和随机性模型、静态模型和动态模型、线性模型和非线性模型、离散模型和连续模型等。

（4）按照对模型结构的了解程度分为白箱模型、灰箱模型和黑箱模型。

二、数学建模

1. 数学建模的概念

数学建模是利用数学方法解决实际问题的一种实践。即通过抽象、简化、假设、引进变量等处理方法，将实际问题用数学语言或数学方式建立起数学模型，然后运用先进的数学方法及计算机技术进行求解。简而言之，建立数学模型的过程就称为数学建模。

数学建模不仅是一种定量解决实际问题的科学方法，而且还是一种从无到有的创新活动过程。应用数学知识去研究和解决实际问题，遇到的第一项工作就是建立恰当的数学模型，从这一意义上讲，数学建模是一切科学研究的基础。没有一个较好的数学模型就不可能得到较好的研究结果，所以，建立一个较好的数学模型是解决实际问题的关键所在。数学建模将各种知识综合应用于解决实际问题中，是培养和提高同学们应用所学知识分析问题、解决问题能力的必备手段之一。

需要说明的是，建立一个数学模型与求解一道数学应用题有极大的差别。其原因是：应用题通常有不多不少恰到好处的条件和数据，求解方法也基本限制在某章或某门课程，往往有唯一正确的答案。数学建模问题经常是由各领域的工作者提出，因而没有明确的计算方法，也不会给出恰到好处的条件（可能有多余的条件，也可能缺少必要的条件和数据），甚至问题本身就含糊不清，没有唯一正确的答案。

数学建模是利用数学工具解决实际问题的重要手段，对同一个实际问题可能建立起若干个不同的模型，模型无所谓“对”与“错”，评价模型优劣的唯一标准是实践检验。一个理想的数学模型必须既能反映系统的全部重要特性，又能在数学上易于处理，即它满足：

（1）模型的合理性：在允许的误差范围内，它能反映出该系统有关特性的内在联系。

（2）模型的易求解性：它易于数学处理和计算。

2. *数学建模的应用*

在国民经济和社会活动的诸多方面，数学建模都有着非常具体的应用。

（1）分析与设计。如描述药物浓度在人体内的变化规律以分析药物的疗效；建立跨音速空气流和激波的数学模型，用数值模拟设计新的飞机翼型。

（2）预报与决策。生产过程中产品质量指标的预报、气象预报、人口预报、经济增长预报等都要有预报模型。使经济效益最大的价格策略、使费用最少的设备维修方案，是决策模型的例子。

（3）控制与优化。电力、化工生产过程的最优控制、零件设计中的参数优化，要以数学模型为前提。

（4）规划与管理。生产计划、资源配置、运输网络规划、水库优化调度、排队策略、物资管理等，都可以用运筹学模型来解决。

3. *数学建模能力培养的意义*

数学建模课程可以培养人们的洞察能力、数学语言翻译能力、综合应用分析能力、联想能力及各种当代科技最新成果的使用能力。

（1）洞察能力。人们提出的许多问题往往不是数学化的，这就需要建模工作者善于从实际工作提供的原形中抓住其数学本质。

（2）数学语言翻译能力。即把经过一定抽象和简化的实际问题用数学语言表达出来，形成数学模型，并对应用数学方法和理论推导（计算）得到的结果，能用大众化的语言表达出来，在此基础上提出解决某一问题的方案或建议。

（3）综合应用分析能力。用已学过的数学思想和数学方法进行综合应用分析，并能学习一些新的知识。

（4）联想能力。对于现实中的实际问题，看起来完全不同，但在一定的简化层次下，它们的数学模型是相同或相似的。这就要培养学生有广泛的兴趣，多思考，勤奋踏实地工作，通过熟能生巧达到触类旁通的能力。

（5）各种当代科技最新成果的使用能力。目前广泛应用的计算机和相应的各种软件包，不仅能节省时间，得到直观形象的结果，而且能够养成自觉应用最新科技成果的良好习惯。

4. *学习数学建模的方法*

学习数学建模就像学习游泳一样必须亲身实践，只欣赏别人的数学模型的人，永远不会拥有让别人欣赏的数学模型。只要你亲身参与了数学建模活动，你就会感到自己数学知识或数学思想方法上的不足，更激起探讨数学的积极性。

数学建模与其说是一门技术，不如说是一门艺术，技术大致有章可循，而艺术无法归纳成普遍适用的准则。一名出色的艺术家需要大量的观摩和前辈的指教，更需要亲身的实践，最终“青出于蓝而胜于蓝”。同样，掌握数学建模这门艺术，培养自己解决实际问题的能力，一要大量阅读、思考别人做过的模型，二要亲自动手，认真实践。在学习过程中，要认真弄懂每一个具体的实例，其内容步骤是什么，用到了哪种建模方法，特别是要知晓它是怎样从实际问题转化为数学模型的。

第二节　数学建模的步骤和方法

一、数学建模的步骤

数学建模的过程并非高深莫测，事实上，在初等数学中我们就有所接触。例如，数学课程中在解应用题时列出的数学式子就是简单的数学模型，而列数学式子的过程就是在建立简单的数学建模。下面用一道应用题的求解过程来说明数学建模的步骤。

【例 1-1】可口可乐、雪碧、健力宝等饮料罐（易拉罐）顶盖的直径与罐高之比为多少？它们的形状为什么是这样的？

首先，把饮料罐假设为正圆柱体（实际上由于制造工艺的要求，它不可能正好是数学上的正圆柱体）。在这种简化下，我们就可以来明确变量和参数了，我们可以引入以下变量：

V——罐装饮料的体积；r——底面半径；h——圆柱高；b——制罐材料的厚度；k——制造中工艺上必须要求的折边长度。

上面的诸多变量中，我们先不考虑 k 这个因素，于是有 $V=\pi r^2 h$。

由于易拉罐顶的强度必须要大一点，因而罐顶厚度是其他部分厚度的 3 倍。那么制罐用材的总体积近似为

$$A=3\pi r^2 b+\pi r^2 b+2\pi rhb=(4\pi r^2+2\pi rh)b$$

每罐饮料的体积是一样的，因而 V 可以看成是一个常数（参数），则

$$h=\frac{V}{\pi r^2}$$

代入 A 得

$$A=A(r)=2\pi b\left(2r^2+\frac{V}{\pi r}\right)$$

由此我们知，如果用材最省，那么罐的半径 r 应最小，即 $A(r)$ 应达到最小，那么，$A(r)$ 的数学表达式就是一个数学模型。我们可以用多种精确或近似的方法求出 $A(r)$ 的极小值及相应的 r，例如用微积分的办法，有

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}=2\pi b\left(4r-\frac{V}{\pi r^2}\right)$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$$

从而求得

$$h=\frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\left(\frac{4\pi}{V}\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{(4\pi)^2V^3}{\pi^3V^2}}=4\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}=4r$$

即罐高 h 应为半径 r 的4倍。当你对这些饮料罐进行测量时，高 h 和半径 r 的比是不是与上述计算的结果完全一致。其实这一点也不奇怪，这些大饮料公司年生产的罐装饮料多达几百万罐，甚至更多，因而从降低成本和获取利润的角度来看，这些大公司的设计部门一定会考虑在同样工艺条件、保证质量前提下用材最省的问题。大家还可以把折边 k 这一因素考虑进去，然后得到相应的数学模型，并求解之，最后看看与实际符合的程度如何。

根据本例可以得出简单的数学建模步骤：①根据问题的背景和建模的目的做出假设；②用字母表示要求的未知量；③根据已知的常识列出数学式子或图形；④求出数学式子的解答；⑤验证所得结果的正确性。

实际问题往往是很复杂的，而影响它的因素总是很多的，如果想把它的全部影响因素（特性）都反映到模型中来，这样的模型很难甚至无法建立，即使能建立也是不可取的，因为这样的模型太复杂，很难进行数学处理和计算。但如果考虑数学模型处理方法的难易程度，当然模型越简单越好，但这种模型又难于反映系统的有关主要特性。因此，通常所建立的模型往往是这两种互相矛盾要求的折中处理。建模是一种创造性劳动，而现实世界中的事物形形色色，五花八门，不可能用一些条条框框规定出各种模型如何建立，所以数学建模没有固定的模式。但按照建模过程，一般采用以下基本步骤：

第一步：模型准备

模型准备也称问题分析或问题重述。由于数学模型是建立数学与实际现象之间的桥梁，因此，首要的工作是要设法用数学的语言表述实际现象。为此，要充分了解问题的实际背景，明确建模的目的，尽可能弄清对象的特征，并为此搜集必需的各种信息或数据。要善于捕捉对象特征中隐含的数学因素，并将其一一列出。至此，我们便有了一个很好的开端，而有了这个良好的开端，不仅可以决定建模方向，初步确定用哪一类模型，而且对下面的各个步骤都将产生影响。

第二步：模型假设

根据问题的要求和建模目的作出合理的简化假设。模型假设是根据对象的特征和建模目的，在问题分析基础上对问题进行必要的、合理的取舍简化，并使用精确的语言作出假设，这是建模至关重要的一步。进行假设的目的在于从第一步列出的各种因素中选出主要因素，忽略非本质因素，抓住问题的本质，使问题简化以便进行数学处理。这是因为，实际问题往往是复杂多变的，如不经过合理的简化假设，将很难转化成数学模型，即便转化成功，也可能是一个复杂的难于求解的模型，从而使建模失败。另外，为建模需要，在选定的因素里，也常常要进行必要的、合理的简化，诸如线性化、均匀化、理想化等近似化处理。

总之，一个高超的建模者应充分发挥想象力、洞察力和判断力，善于辨别主次，合理对问题进行简化。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第三步：模型建立

根据问题分析与假设，利用适当的数学工具及有关规律建立各个量之间的数量关系，列出表格，画出图形或确定其他数学结构。另外，建模时应尽量采用简单的数学工具，以便让更多的人明白并能加以应用。

第四步：模型求解

对以上建立的数学模型进行数学上的求解，包括解方程、画图形、证明定理以及逻辑运算等。

第五步：模型分析

首先，对模型解答进行数学上的分析，有时要根据问题的性质分析变量间的依赖关系或稳定状况，有时根据所得结果给出数学上的预报，有时则可能要给出数学上的最优决策或控制，对于各种情况还常常进行误差分析和数据稳定性分析。其次，对模型的解给予检验和实际解释，即把模型求解的结果“翻译”回到实际对象中，用实际现象、数据等检验模型的合理性和适用性，如果检验结果与实际情况相符，则可进行最后的模型应用。若所得的解不符合实际，则所建数学模型有错误，应推倒重建，这是数学建模完全可能出现的情况，其产生原因往往是问题分析错误或假设不合理所至。

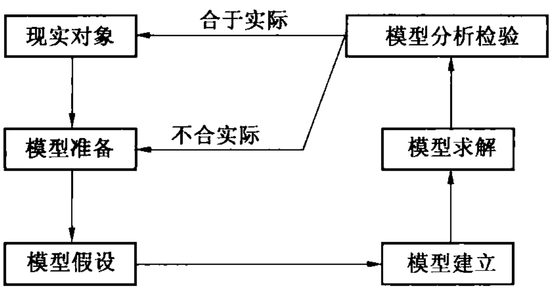


图1－1　数学建模流程图

上述步骤构成了数学建模的一个流程，即模型准备→模型假设→建立模型→求解模型→对模型解的分析、检验、修改与推广，如图1－1所示。应当注意的是，实际建模过程中，其应用是可以有弹性的，不是每个建模问题都要经过这五个步骤，其顺序也不是一成不变的，而且有时各个过程之间并没有明显的界限。因此，建模时不必在形式上按部就班，只要反映出建模的特点即可。一个具体的建模问题要经过哪些步骤并没有一定的模式，通常与实际问题的性质、建模的目的等有关。

在数学建模过程中，有三个最重要的要素，也是三个最大的难点：①怎样从实际情况出发做出合理的假设，从而得到可以执行的合理的数学模型；②怎样求解模型中出现的数学问题；③怎样验证模型的结论是合理、正确、可行的。所以，当你看到一个数学模型时，就一定要问问或者想一想它的假设是什么？是否合理？模型中的数学问题是否很难？数学上是否已经解决？怎样验证该模型的正确与可行性？

另外，在建模过程中还有一条不成文的原则，即从简单到精细，也就是说，首先建立一个比较简单但尽可能合理的模型，对该模型中的数学问题进行合理地解决，从而做到仅仅通过实验观察不可能做到的事情或重要的现象。如果在求解模型的过程中，发现求解结果不合理，甚至完全错误，那么它也有可能告诉我们如何改进的方向。

要想比较成功地运用数学建模去解决实际问题，还要学习“双向翻译”的能力，即把实际问题用数学语言表述出来，而且能够把数学建模得到的（往往是用数学形式表述的）结果，用普通人（或者说要应用这些结果的非数学专业的人士）能够理解的语言表述出来。

同时，我们在建模时还要注意：

（1）数学建模不一定有唯一正确的答案。数学建模的结果无所谓“对”与“错”，但却有优与劣的区别，评价一个模型优劣的唯一标准是实践检验。

（2）数学建模没有统一的方法。对同一个问题，各人因其特长和偏好等方面的差别，所采取的方法可以不同，使用近代数学方法建立的模型不一定就比采用初等数学方法建立的模型好，因为我们建模的目的是为了解决实际问题。

二、数学建模的一般方法

1. 机理分析法

机理分析法是立足于事物内在规律的一种建模方法，主要根据人们对现实对象的了解和已有的知识和经验，分析研究对象中各变量（因素）之间的因果关系，找出其内部机理规律而建立的一种模型方法。使用这种方法的前提是要对研究对象的机理应有一定的了解，模型也要求具有反映内在特征的物理意义。机理分析要针对具体问题来做，因而没有统一的方法。主要包括：

（1）类比法：是数学建模中最常用的一种方法，即把问题归结或转化为我们熟知的模型。如果这个问题与我们熟悉的模型相似，那么我们的建模工作便可省去许多麻烦。实际上，许多来自不同领域的问题在数学模型上看确实具有相类似的甚至相同的结构。

（2）平衡原理法：自然界的任何物质在其变化过程中会受到某种平衡关系的支配。因此，从物质运动机理的角度发现实际问题中的平衡关系，以此组建数学模型。

（3）微元法：在组建对象随时间或空间连续变化的动态模型时，经常考虑它在时间或空间的微小单元的变化情况，这是因为在这些微元上的平衡关系比较简单，而且容易使用微分学的手段进行处理。这类模型基本上是以微分方程的形式给出的。

2. 测试分析法

测试分析法是一种统计分析法。即把研究对象视为一个“黑箱”系统，对系统的输入、输出数据进行观测，并以这些实测数据为基础进行统计分析，按照一定准则找出与数据拟合最好的模型。当我们对对象的内部规律不清楚或模型不需要反映内部特征时，就可以用测试分析建立数学模型。

3. 综合分析法

对于某些实际问题，人们常将上述两种建模方法结合起来使用，例如用机理分析法确定模型结构，再用测试分析法确定其中的参数等。

第三节　数学建模示例

本节给出几个数学建模的例子，重点说明如何做出合理的、简化的假设，如何选择参数和变量，如何用数学语言确切的表述实际问题，如何分析模型的结果，如何解决或解释实际问题，如何根据实际情况改进模型。

【例 1－2】椅子问题

把椅子置于地面时，如果只有三只脚着地，椅子经常放不稳，通常需要调整几次方可将椅子放稳，试用数学语言对此问题给以表述，并用数学工具说明椅子能否在地面上放

稳？若能，请给予证明并给出做法，否则说明理由。

步骤一　问题分析

所谓椅子能否在地面放稳是指椅子的四只脚能否同时着地，而四只脚是否同时着地是指四只脚与地面的距离是否同时为零，于是我们可以研究四只脚与地面的距离（函数）是否同时等于零。由于这个距离是变化的，于是可视为函数，那么作为函数，它随哪个量的改变而改变？因此构造这个距离函数成为主要建模目的。

为了构造距离函数和设定相关参数，让我们实际操作一下，从中搜集信息，弄清其特征。要想四只脚同时着地，通常有两种方法：其一是将椅子搬离原地，换个位置试验；另一个做法是原地旋转试验，由于前一种方法需要研究的范围可能要很大，这里我们采取第二种做法。通过实地操作，易得出结论：只要地面相对平坦，没有地面大起大落的情况，那么随着旋转角度的不同，三只脚同时落地后，第四只脚与地面距离也不同（不仅如此，旋转中总有两个脚同时着地，另两个脚不稳定）。也就是说，这个距离函数与旋转角度有关，是旋转角度的函数，于是一个确定的函数关系便找到了，不仅如此，我们的问题也顺其自然地转化为是否存在一角度，使得四个距离函数同时为零？

综上分析，问题可以归结为证明函数零点的存在性，遂决定试用函数模型予以处理。

步骤二　模型假设

根据前面的分析，我们可作如下假设：

（1）椅子的四只脚同长。

（2）将椅子的脚与地面接触处看成是一个几何点，四脚连线为正方形。

（3）地面相对平坦，即在旋转所在地面范围内，椅子在任何位置至少有三只脚同时着地。

（4）地面高度连续变化，可视地面为数学上的连续曲面。

步骤三　建立模型

依据假设条件，四只脚连线呈正方形，因而以其中心为对称点，令正方形绕中心旋转便可表示椅子位置的改变，于是可以用旋转角度的变化表达椅子的不同位置。为此，我们以正方形中心为原点建立平面直角坐标系，并假设旋转开始时（角度 $\theta=0$）四个椅脚点 A、B、C、D 中的 A 点和 C 点位于 x 轴上，B 点和 D 点位于 y 轴上。旋转角度 θ 后，点 A、B、C、D 变到点 A'、B'、C'、D'（图 1－2）。显然，随着 θ 的改变，椅子的位置也跟着改变，从而椅脚与地面距离也随之改变。尽管椅子有四只脚，有四个距离，但对于每个角度，总有点 A、点 C 同时着地而点 B、点 D 不同时着地或点 B、点 D 点同时着地，而点 A、点 C 不同时着地，故只要设两个距离函数即可。因此设 A、C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$，B、D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$，且作为距离函数的 $f(\theta)$、$g(\theta)$ 均为非负函数。由假设（4）可知，$f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 均为连续函数，而由假设（3）可知，对任一角度 θ，恒有 $f(\theta)=0$，$g(\theta)\geq 0$ 或 $g(\theta)=0$。故 $f(\theta)\ g(\theta)=0$ 对任意 θ 成立。

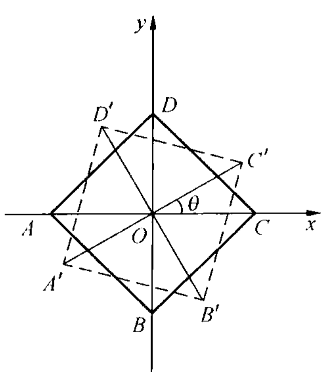


图 1－2　计算模型图

要证明存在角度 θ_0，使 $f(\theta_0)=0$，$g(\theta_0)=0$ 同时成立，

还需要条件支持。注意到在初始位置（$\theta=0$）处，有$f(0)=0$，$g(0)>0$ 或$f(0)>0$，$g(0)=0$，而旋转 90°后，两组条件恰好交换。因此，椅子通过旋转改变位置能放稳的证明，便归结为证明如下的数学命题，即

已知$f(\theta)$、$g(\theta)$ 是θ的连续函数，对任意θ，$f(\theta)\ g(\theta)=0$ 且$f(0)=0$ 时$g(0)>0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$ 时 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$。

求证：存在 $\theta_0\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，使$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

这就是椅子问题的数学模型。由此可见只需引进一个变量θ及其一元函数$f(\theta)$、$g(\theta)$，便把模型条件和结论用简单又精确的数学语言表述出来，从而形成所需要的数学模型。

步骤四　模型求解

容易看出本模型属于一元连续函数的零点存在性问题，使用介值定理便可轻松证明它。

证明　将椅子旋转 90°，对角线 AC 和 BD 互换。

由 $g(0)=0$，$f(0)>0$，知$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$。

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$ 则 $h(0)>0$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$。

由于$f(\theta)$、$g(\theta)$ 是θ的连续函数，则 $h(\theta)\ =f(\theta)-g(\theta)$ 为连续函数，据连续函数的介值定理，必存在 $\theta_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，使 $h\ (\theta_0)=0$，即$f(\theta_0)-g(\theta_0)=0$。

因为$f(\theta)g(\theta)=0$，所以$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

步骤五　模型分析与推广

模型解的意义在于满足假设的前提下，通过转动椅子，必定可把它放稳，而且转动的角度不需超过 90 度（顺时针或逆时针）。同时，请你思考：

（1）若把假设中的“四只脚的连线呈正方形”改为“四只脚的连线呈长方形”，你认为结论成立吗？

（2）若把假设中的“四只脚的连线呈正方形”改为“四只脚共圆”，则结果又如何？

模型评注：本题看起来似乎与数学没有什么关系，不利于用数学建模来解决，但通过上述处理，把问题变为一个数学定理的证明，从而使其可以用数学建模来解决。本题给出的启示是：对于一些表面上与数学没有什么关系的实际问题，也可以用数学建模的方法来解决，且此类问题建模的着眼点是寻找和分析问题中出现的主要对象及其隐含的数量关系，通过适当的简化和联想将其变为数学问题。

【例 1－3】包饺子问题

通常 1kg 面粉和 1kg 馅可包 100 个饺子，如果 1kg 面不变，馅比 1kg 多了，问应多包几个（小一些），还是少包几个（大一些）？

问题分析

问题的实质是问同样多的面粉，多包几个饺子能多包馅，还是少包几个饺子能多包馅？即考虑一个大饺子皮分成 n（$n>1$）个小饺子皮时，所包馅的体积的大小。

模型假设

(1) 饺子皮厚度相同。

(2) 饺子皮大小形状相同，近似以圆代替。

模型建立

引入如下参数：

R——大饺子皮半径； r——小饺子皮半径；S——大饺子皮面积；s——小饺子皮面积；V——大饺子体积；v——小饺子体积。

饺子皮的面积与饺子皮半径的平方成正比，比例常数为 k_1，即 $S=k_1R^2$，$s=k_1r^2$。

饺子皮所包馅的体积与饺子皮半径的立方成正比，比例常数为 k_2，即 $V=k_2R^3$，$v=k_2r^3$。已知 $S=ns$（$n>1$），比较 V 和 nv 的大小。

模型求解

由 $S=ns$（$n>1$）得 $R^2=nr^2$，即$\frac{R}{r}=\sqrt{n}$。从而$\frac{V}{nv}=\frac{1}{n}\frac{R^3}{r^3}=\sqrt{n}>1$（$n>1$），故 $V>nv$。

由此可知：饺子包大一些或少包几个饺子能多包馅，例如若 100 个饺子包 1kg 馅，则 50 个饺子可以包 1.41kg 馅。

模型分析

(1) 同样的面粉包 n_1 个饺子和 n_2 个饺子所包馅的体积之比约为$\sqrt{n_2}:\sqrt{n_1}$。

(2) 对于经营饺子的店，饺子应做得小巧而精致，以降低成本；而对于家庭，饺子应略大一些，可以多吃到馅而增加营养。

(3) 本模型可以用来解释为什么实际生活中人们买鸡蛋或买西瓜要挑大的买。

【例 1-4】设一农夫有一片草地用于放牛，经观察发现，3 头牛在 2 个星期中就能吃完 2 亩地上的草，2 头牛在 4 个星期中也能吃完 2 亩地上的草，那么要多少头牛能在 6 个星期中吃完 6 亩地上的草？

问题分析

根据题目可知，一片地上的草被吃完并不意味着草的高度不存在，而草被牛吃之前其高度也未必一致，草是随吃随长的且各处的生长速度也不尽相同，同时每头牛的吃草量也不相同。

模型假设

据问题分析，我们假设：

(1) 牛吃不到的草高为吃完高度，假定此时草高为零。

(2) 在牛吃草前，各处草的高度是一致的，设为 h_0（在原草高基础上）。

(3) 每头牛的吃草量均为 a（亩/星期）。

(4) 草的生长速度各处相同且是均匀生长的，即生长速度为常数 v（亩/星期）。

模型建立

设需要 x 头牛才能在 6 个星期中吃完 6 亩地上的草，则有

$$a\cdot x\cdot 6=6(h_0+6v)$$

又由题设，得

$$a\cdot 3\cdot 2=2(h_0+2v)$$
$$a\cdot 2\cdot 4=2(h_0+4v)$$

即得问题的数学模型为

$$\begin{cases} a \cdot x \cdot 6 = 6(h_0 + 6v) \\ a \cdot 3 \cdot 2 = 2(h_0 + 2v) \\ a \cdot 2 \cdot 4 = 2(h_0 + 4v) \end{cases}$$

模型求解

后两个方程消参数得 $a = 2v$，$h_0 = 4v$。

代入第一个方程，得 $x = 5$。即5头牛才能在6个星期中吃完6亩地上的草。

模型分析与推广

本题中所作假设的合理性值得研究，事实上，每头牛的吃草量、草的生长速度等均非常量，但在简单情形下，这些假设应该被认为是合理的，否则本题需要微分方程等方法才能解释。

同时，可以将本问题的提法更一般化，从而使其更具一般性，即设 x_1 头牛在 n_1 个星期中吃完 m_1 亩地上的草，x_2 头牛在 n_2 个星期中吃完 m_2 亩地上的草，则要多少头牛才能在 n 个星期中吃完 m 亩地上的草，其模型应为

$$\begin{cases} a \cdot x \cdot n = m(h_0 + nv) \\ a \cdot x_1 \cdot n_1 = m_1(h_0 + n_1 v) \\ a \cdot x_2 \cdot n_2 = m_2(h_0 + n_2 v) \end{cases}$$

【例 1-5】漂洗衣服问题

洗衣服时，衣服用肥皂或洗衣粉搓洗过后，衣服上总带着污物，需要用清水来漂洗，如果现在有一定量的清水，试建立数学模型，分析如何安排清洗程序（漂洗多少次，每次用多少水），使得用这些水漂洗的衣服最干净。

模型假设

该问题是实际生活中的优化问题，为使问题简化，给出下面的假设：

（1）每次漂洗后，污物能均匀分布在水中。

（2）衣服在第一次漂洗前有一定含水量，其含水量与以后每次漂洗后衣服的含水量相同。

（3）忽视水温、水质等对漂洗结果的影响。

（4）在漂洗过程忽略时间耗费，衣服磨损。

模型建立

（1）符号说明

a_0——初始的污物质量（单位：kg），是一常数；

a_i——漂洗 i 次后衣服上残留的污物质量（单位：kg），$i = 1, 2, \cdots, n$；

n——漂洗的次数，$n \in \mathbf{N}$；

M——总用水量，在本问题中是一常数（单位：kg）；

m_i——第 i 次漂洗的用水量，$i = 1, 2, \cdots, n$，显然 $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$；

λ——每次漂洗后，衣服上仍留下水的质量，是一常数（单位：kg）。

（2）模型的建立

由假设可知，第一次放水后，$a_0$kg 污物均匀分布于 $\lambda + m_1$kg 水中，衣服上残留的污

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com