文登考研指定用书

全国硕士研究生入学统一考试

2006版

数学复习指南

经济类

主编

陈文灯

黄先开

曹显兵

基础＋题型＝成功的保证

紧扣考试大纲，汇集了考研教学的所有题型，讲解到位，侧重训练学生的解题思路和发散性思维，实用性极强。

世界图书出版公司

FOCUS 聚焦图书

文登考研指定用书

全国硕士研究生入学统一考试

2006版

数学复习指南

经济类

主编
陈文灯
黄先开
曹显兵

世界图书出版公司

FOCUS 聚焦图书

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 经济类 / 陈文灯等编著. —11 版. — 北京:世界图书出版公司北京公司,
2004. 1

ISBN 7-5062-5213-9

Ⅰ. 数... Ⅱ. 陈... Ⅲ. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 解题 Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002) 第 014885 号

数学复习指南(经济类)

(2006 版)

主　　编: 陈文灯　黄先开　曹显兵
副 主 编: 施明存　殷先军
责任编辑: 武海燕
封面设计: 滕晓娜

出　　版: 世界图书出版公司北京公司
发　　行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话 62198079　邮编 100081)
销　　售: 各地新华书店
印　　刷: 北京市后沙峪印刷厂

开　　本: 787 × 1092 毫米　1/16
印　　张: 33
字　　数: 790 千字
版　　次: 2005 年 2 月第 11 版　2005 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5213-9/O · 334　　定价:47. 80 元

服务热线: 010 - 62198078

前　言

“得数学者得天下”。这句话在广大读者中广为流传。怎么才能考好数学，这是广大读者的迫切愿望。要实现这个愿望，首先要了解考研数学究竟考什么。从87年统考以来18年的试卷及历年考试大纲可以看出，主要是考四个方面：

一、基础。主要是从填空题和单选题两种题型来考核，通过考计算题和证明题也可看出一个读者的基础是否扎实。

二、简单知识点的综合能力。这是和过去很不同的一点。

三、分析问题和解决问题的能力，即解应用题的能力。

四、解题的速度。

针对这四个方面，根据广大读者提出的意见和我们的教学经验，我们对书中有关内容进行了修改，使它与考试更加协调，更加吻合。

本书的特点：

一、对基本概念、基本理论进行剖析，配合精选的例题使学生能够深入理解牢固掌握，考试时避免犯要领性的错误。

二、本书采用“举题型讲方法”代替普遍采用的讲方法举题型的作法，使读者做题时有的放矢、思路畅达。

三、本书介绍了许多新的、快捷的解题方法和技巧，有些技巧是全国各高校从事几十年教学工作的老师给我们提供的，在此表示衷心感谢。

四、普遍采用表格法使广大读者对有些知识点能够一目了然。

五、从大处着手，不做小枝节的分析，使广大读者能够站在比较高的角度掌握题型的解法，而不是引导学生去作无谓的细小问题的分析。

六、本书介绍了两个超纲的内容，一个是广义积分的收敛，另一个是二重积分的换元法，同学们掌握了这两项内容，在做某些题时可以获得思路上的启发。

本书的这六个特点，还不太完善，但是是我们追求的目的和愿望。愿广大读者对本书给予批评和指正。

陈文灯

编辑提示：本书习题详细解答请见 www.kaoshi.tv

目 录

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

注:带*的内容,数四考生不作要求。

考研数学复习策略

一、考研数学对考生知识和能力的要求

数学考试要求考生比较系统地理解数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法,要求考生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

二、考研数学试题的特点

数学考试根据工学、经济学、管理学各学科和专业对硕士研究生入学所应具备的数学知识和能力的不同要求,将数学统考试卷分为数学一、数学二、数学三和数学四。考生具体考哪个卷种,须向所报考院校咨询或查看该校的招生简章。

在题型比例上,填空题和选择题约占40%,其中填空题6道,每道4分,单项选择题8道,每道4分;解答题(包括证明题)约占60%,共9道题。

本书为经济类,涵盖数学三和数学四。数学三和数学四卷中,微积分约占50%,线性代数约占25%,概率论与数理统计约占25%。

试卷满分为150分,考试时间为180分钟,基本上考试时间在考试开始后的第二天的上午。

三、考研数学复习策略

1. 书该怎么读

由于数学考试重点考查考生的基本概念、基本理论、基本方法的掌握,所以考生应重视基础知识的掌握。考生应全面复习考纲要求的基础知识,通过一定量的习题巩固对基本概念及相关定理的理解,特别对定理的条件要熟练掌握,否则容易用错。

2. 题该怎么做

数学中的习题相当多,考生应有针对性地进行练习。大家知道,题目是无限的,但题型是有限的。通过对典型题型的练习,掌握相应的解题方法,能迅速提高你的解题能力,节省考场上的宝贵时间。另外,大家应准确审题,一定要认真仔细。

3. 怎样逐渐提高自己的能力

经常进行自我总结,错题总结能逐渐提高解题能力。我们可以在学完每一章后,自己通过画图的形式回忆这章有哪些知识点,有哪些定理,它们之间有些什么联系,如何应用等;对做错的题分析一下原因:概念不清楚、定理用错了还是计算粗心?数学思维方法是数学的精髓,只有对此进行归纳、领会、应用,才能把数学知识与技能转化为分析问题、解决问题的能力,使解题能力"更上一层楼"。

4. 复习进度安排建议

复习进度因人而异,这只是给同学们的一个建议,供大家参考:

3月—7月	复习大纲规定的基本知识
7月—9月	第一阶段的全面复习
10月—11月	第二阶段的强化练习
12月—第二年1月	冲刺复习,隔两天做一套模拟题并及时查缺补漏

篇前篇　微积分解题的四种思维定式

以下四句话，在考研中能助同学们一臂之力.

第一句话：在题设条件中给出一个函数$f(x)$在某点处的导数值即$f'(a)=k(a,k$均为常数)，“不管三七二十一”，根据所求(证)结论把$f(x)$在该点的导数定义式“凑”出来再说.

【例1】设$f(x)$可微，$f(0)=0,f'(0)=1,F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt$，试求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^4}$.

【解】 对定积分作变量代换$x^2-t^2=u$，则

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\,du,\quad 且\quad F'(x)=xf(x^2).$$

于是由洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{4x^3}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x^2}\ (以下利用导数f'(0)的定义)$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}=\frac{1}{4}f'(0)=\frac{1}{4}.$$

【例2】设$f(x)$在$(0,+\infty)$定义，且对定义域中任何x,y均满足方程$f(xy)=f(x)f(y)$，且$f'(1)=n(n>0)$，求$f(x)$.

【解】 在方程中令$x=y=1$得，$f(1)=f(1)\cdot f(1)$，由此得$f(1)=0$或$f(1)=1$.

(1)若$f(1)=0$，令$y=1$，由函数方程得$f(x)=f(x)\cdot 0=0$，即$f(x)\equiv 0$，但由$f'(1)=n$知不合题意.

(2)若$f(1)=1$，令$y=1+h$，由函数方程得$f(x+hx)=f(x)\cdot f(1+h)$，则(设$h\neq 0$)

$$\frac{f(x+hx)-f(x)}{hx}=\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{f(1+h)-f(1)}{h}.$$

令$h\to 0$，对上式两边取极限，并由$f'(1)=n$，得　$f'(x)=n\frac{f(x)}{x}$.

这是可分离变量的微分方程，解得$f(x)=Cx^n$. 由条件$f'(1)=n$，得$C=1$，即$f(x)=x^n,x>0$.

第二句话：在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时，则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例3】设$f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内二阶可导，且$f(0)=f(\frac{1}{2}),2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx=f(2)$. 证明：存在一个$\xi\in(0,2)$，使$f''(\xi)=0$.

【证】$f(2) = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx \xlongequal{积分中值定理} 2(1-\frac{1}{2})f(\eta) = f(\eta), \frac{1}{2} \leqslant \eta \leqslant 1.$

于是 $f(x)$ 在$[\eta,2]$上满足罗尔定理,即存在一个 $\xi_1 \in (\eta,2)$,使

$$f'(\xi_1) = 0. \qquad ①$$

又 $f(x)$ 在$[0,\frac{1}{2}]$上满足罗尔定理,于是存在一个 $\xi_2 \in (0,\frac{1}{2})$,使

$$f'(\xi_2) = 0. \qquad ②$$

由①,②可知 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. 再对 $f'(x)$ 在$[\xi_2,\xi_1]$上使用罗尔定理,

于是 $\exists \xi \in (\xi_2,\xi_1) \subset (0,2)$,使 $f''(\xi) = 0$.

【例4】设 $f(x)$ 在$[0,1]$上是非负、单调递减的连续函数,且 $0 < a < b < 1$. 证明:

$$\int_0^a f(x)\,dx \geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,dx.$$

【证】由积分中值定理

$$\int_0^a f(x)\,dx = af(\xi_1) \geqslant af(a), \quad \xi_1 \in [0,a],$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi_2) \leqslant (b-a)f(a), \quad \xi_2 \in [a,b].$$

于是 $\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx \geqslant f(a) \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{b}\int_a^b f(x)\,dx.$

故 $\int_0^a f(x)\,dx \geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,dx.$

【另证】$\int_0^a f(x)\,dx \geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,dx \Leftrightarrow b\int_0^a f(x)\,dx \geqslant a\int_a^b f(x)\,dx.$

令 $F(x) = b\int_0^x f(t)\,dt - x\int_x^b f(t)\,dt,$

则 $F'(x) = bf(x) - \int_x^b f(t)\,dt + xf(x) = \int_x^b f(x)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt + 2xf(x)$

$= \int_x^b [f(x) - f(t)]\,dt + 2xf(x) \geqslant 0$,(由于 $f(x) \geqslant f(t) \geqslant 0$).

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0) = 0$,

故 $F(a) > F(0) = 0$,即 $b\int_0^a f(x)\,dx - a\int_a^b f(x)\,dx > 0$,

亦即 $\int_0^a f(x)\,dx \geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,dx.$

第三句话:在题设条件中函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 或 $f(a) = f(b) = 0$,则"不管三七二十一"先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x) \xlongequal{f(a)=0} f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad a < \xi < x.$$

或 $f(x) \xlongequal{f(b)=0} f(x) - f(b) = f'(\xi)(x-b), \quad x < \xi < b.$

若 $f(a)=f(b)=0$，则 $\begin{cases} f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a), & a<\xi_1<x, \\ f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b), & x<\xi_2<b. \end{cases}$

【例 5】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$，试证：

$$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M.$$

【证】 $f(x) \xlongequal{f(a)=0} f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi_1)$，$a<\xi_1<x$，

则 $|f(x)|=(x-a)|f'(\xi_1)|\leqslant (x-a)M.$

同理 $|f(x)|\leqslant (b-x)M.$

于是 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

$$\leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)M\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)M\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

故 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}M.$

即 $\displaystyle\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M.$

【例 6】 已知在 $[0,a]$ 上 $|f''(x)|\leqslant M$，且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取最大值，试证：

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

【证】 设 $f(c)=\max\limits_{x\in(0,a)}\{f(x)\}$，则 $f'(c)=0$.（费尔马定理）

对 $f'(x)$ 在 $[0,c]$ 与 $[c,a]$ 内分别用拉格朗日中值定理，有

$$f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)c,\quad 0<\xi_1<c,$$
$$f'(a)-f'(c)=f''(\xi_2)(a-c),\quad c<\xi_2<a.$$

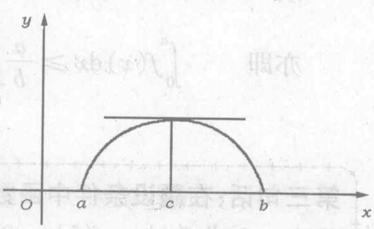
于是 $|f'(0)|=|f''(\xi_1)c|\leqslant Mc,$

$|f'(a)|=|f''(\xi_2)(a-c)|\leqslant M(a-c).$

故 $|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Mc+M(a-c)=Ma.$

【例 7】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 $f''(x)$，且 $f''(x)<0$，$f(a)=f(b)=0$，则在 (a,b) 上 $f(x)>0$，且

$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{4}{b-a}.$$



【证】 由 $f''(x)<0$ 可知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹函数（图形上凸）；由凹函数性质知，$f(x)$ 大于连接 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为 $y=0$（x 轴），所以在 (a,b) 上 $f(x)>0$. 再由 $f''(x)<0$ 知，$f'(x)$ 是严格单调减少的，从而知 $f(x)$ 在 (a,b) 内有惟一的极大值点，记为 $x=c$. 此时 $f'(c)=0$，如右图所示，而在 (a,c) 上，$f'(x)>0$，在 (c,b) 上 $f'(x)<0$. 由拉格朗日中值定理，

当 $x\in[a,c]$ 时，$f(x)=f'(\xi_1)(x-a)+f(a)$，$\xi_1\in(a,x)$.

由 $f'(x)$ 严格递减，$f'(\xi_1)<f'_+(a)$，注意到 $f(a)=0$，有

$$f(x)<f'_+(a)(c-a),\ x\in[a,c].$$

当 $x\in[c,b]$ 时，同理可得

$$f(x) < [-f'_-(b)](b-c), x \in [c,b].$$

于是 $\dfrac{1}{f(x)} > \dfrac{1}{(c-a)f'_+(a)}, x \in [a,c],$

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(b-c)[-f'_-(b)]}, x \in [c,b].$$

则
$$\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx = -\int_a^b \frac{f''(x)}{f(x)}dx = \int_a^c \frac{-f''(x)}{f(x)}dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{f(x)}dx$$

$$> \int_a^c \frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)}dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{(b-c)[-f'_-(b)]}dx$$

$$= \frac{1}{(c-a)f'_+(a)}[f'_+(a) - f'(c)] + \frac{1}{(b-c)[-f'_-(b)]}[f'(c) - f'_-(b)]$$

$$= \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} > (b-a)\frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4}{b-a}.$$

第四句话：对定限或变限积分，若被积函数或其主要部分为复合函数，则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例 8】求下列函数的导数（设 $f(u)$ 是 u 的连续函数）：

（1）$F(y) = \int_0^y f(x-y)dx$，求 $F'(y)$；（2）$F(x) = \int_0^{x^2} tf(x-t)dt$，求 $F'(x)$；

（3）$F(x) = \int_0^1 f(te^x)dt$，求 $F'(x)$；　（4）$F(x) = \int_0^{x^2} xf(x+t)dt$，求 $F'(x)$.

【解】（1）$F(y) \xlongequal{令 u = x-y} \int_{-y}^0 f(u)du$，则 $F'(y) = -f(-y)\cdot(-1) = f(-y)$.

（2）$F(x) \xlongequal{令 u = x-t} \int_x^{x-x^2} (x-u)f(u)(-du)$

$$= -x\int_x^{x-x^2} f(u)du + \int_x^{x-x^2} uf(u)du,$$

则
$$F'(x) = -\int_x^{x-x^2} f(u)du - x[f(x-x^2)\cdot(1-2x) - f(x)]$$
$$+ (1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - xf(x)$$
$$= \int_{x-x^2}^x f(u)du + x^2(2x-1)f(x-x^2).$$

（3）$F(x) \xlongequal{令 u = te^x} \int_0^{e^x} f(u)\frac{1}{e^x}du = \frac{1}{e^x}\int_0^{e^x} f(u)du = e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)du,$

则 $F'(x) = -e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)du + e^{-x}f(e^x)\cdot e^x = f(e^x) - e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)du.$

（4）$\int_0^{x^2} f(x+t)dt \xlongequal{令 u = x+t} \int_x^{x+x^2} f(u)du$，于是有 $F(x) = x\int_x^{x+x^2} f(u)du,$

则 $F'(x) = \int_x^{x+x^2} f(u)du + x[f(x+x^2)\cdot(1+2x) - f(x)].$

【例 9】* 设 $f(x)$ 可微，且满足 $x = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t-x)dt$，求 $f(x)$.

【解】 $\int_0^x tf(t-x)\,\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令 } u=t-x} \int_{-x}^0 (u+x)f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_0^{-x} uf(u)\,\mathrm{d}u + x\int_{-x}^0 f(u)\,\mathrm{d}u.$

于是原方程变为 $x = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{-x} uf(u)\,\mathrm{d}u - x\int_0^{-x} f(u)\,\mathrm{d}u.$

两边对 x 求导,得 $1 = f(x) - (-x)f(-x)(-1) - \int_0^{-x} f(u)\,\mathrm{d}u - xf(-x)(-1).$

整理,得 $1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u)\,\mathrm{d}u,$

两边再对 x 求导,得 $0 = f'(x) - f(-x)(-1),$

即 $f'(x) = -f(-x),$ ①

上式两边对 x 求导,得 $f''(x) = f'(-x),$ ②

由 ①,② 得 $f''(x) = -f(x),$

即 $f''(x) + f(x) = 0,$

解此方程得 $f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x.$

注意到 $f(0) = 1, f'(0) = -1$,故 $f(x) = \cos x - \sin x.$

第一篇 微积分

第一章 函数·极限·连续

第1节 函数

知识点精讲

一、基本概念

1. 函数

设有两个变量x和y,变量x的变域为D,如果对于D中的每一个x值,按照一定的法则,变量y有一个确定的值与之对应,则称变量y为变量x的函数,记作:$y=f(x)$.

其中x—— 自变量,y—— 因变量,变域D为定义域,记为D_f,变量y的取值的集合称为函数的值域,记作Z_f.

函数概念的两要素:

① 定义域 $\triangleq$ 自变量x的变化范围(若函数是解析式子表示的,则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域).

② 对应关系 $\triangleq$ 给定x值,求y值的方法.

记住下列简单函数的定义域：

$y=\frac{1}{x}$,	$D_f: x\neq 0$,	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
$y=\sqrt[2n]{x}$,	$D_f: x\geqslant 0$,	$[0,+\infty)$
$y=\log_a x$,	$D_f: x>0$,	$(0,+\infty)$
$y=\tan x$,	$D_f: x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,	$k\in Z$
$y=\cot x$,	$D_f: x\neq k\pi$,	$k\in Z$
$y=\arcsin x$（或 $\arccos x$）,	$D_f: \|x\|\leqslant 1$,	$[-1,1]$

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Z_f，如果对于 Z_f 中任一 y 值，从关系式 $y=f(x)$ 中可确定惟一的一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为：$x=\varphi(y)$，其中 $\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记为：$y=f^{-1}(x)$.

注　① $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图形重合；$y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

② 只有一一对应的函数才有反函数.

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若 $D_f\cap Z_\varphi\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

其中 x—— 自变量，　u—— 中间变量，　y—— 因变量.

4. 初等函数

由常数 C 及基本初等函数通过有限次的四则运算或复合而成的只能用一个式子表示的函数，称为初等函数. 基本初等函数包括五类函数：幂函数：$y=x^\mu(\mu\in R)$；指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$；对数函数：$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$；三角函数：如 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ 等；反三角函数：如 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$ 等.

5. 分段函数

如果一个函数在其定义域内，对应于不同的区间段有着不同的表达形式，则该函数称为分段函数.

常见的分段函数：

① 符号函数　$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & 当\ x>0,\\ 0 & 当\ x=0,\\ -1 & 当\ x<0.\end{cases}$

② y 是 x 的最大整数部分，记为 $y=[x]$.

③ 狄利克莱(Dirichlet) 函数 $y=f(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时,}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时.}\end{cases}$

注　一般而言,分段函数不是初等函数.

二、基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义,如果对于 $\forall x\in X$ 恒有

$$f(x)=f(-x)\quad(\text{或} f(x)=-f(-x))$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

图形特征: 偶函数 $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称,奇函数 $f(x)$ 的图形关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

① 奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数.

② 偶数个奇(或偶) 函数之积为偶函数;奇数个奇函数的积为奇函数.

③ 一奇一偶函数的乘积为奇函数.

常见的偶函数: $|x|$, $\cos x$, x^{2n}(n 为正整数), $e^{|x|}$, e^{x^2},…

常见的奇函数: $\sin x$, $\tan x$, $\dfrac{1}{x}$, x^{2n+1}, $\arcsin x$, $\arctan x$,…

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义,若存在一个与 x 无关的正数 T,使对于任一 $x\in X$,恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

周期函数的运算性质:

① 若 T 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

② 若 $f(x)$,$g(x)$ 均是以 T 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

③ 若 $f(x)$,$g(x)$ 分别是以 T_1,T_2,$T_1\neq T_2$ 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1,T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期: $\sin x$,$\cos x$,其周期 $T=2\pi$;
$\tan x$,$\cot x$,$|\sin x|$,$|\cos x|$,其周期 $T=\pi$.

3. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义,如果 $\exists M>0$,使得对于一切 $x\in X$,恒有: $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界;若不存在这样的 $M>0$,则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

注　函数 $f(x)$ 有无界是相对于某个区间而言的.