

文登考研指定用书

全国硕士研究生入学统一考试

2006 版

数学复习指南

经济类

主 编

陈文灯

黄先开

曹显兵

基础+题型=成功的保证

紧扣考试大纲，汇集了考研教学的所有题型，讲解到位，侧重训练学生的解题思路和发散性思维，实用性极强。



013-44
195

文登考研指定用书

全国硕士研究生入学统一考试

2006 版

数学复习指南

经济类

主 编

陈文灯

黄先开

曹显兵

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 经济类 / 陈文灯等编著. —11 版. —北京:世界图书出版公司北京公司, 2004. 1

ISBN 7-5062-5213-9

I. 数... II. 陈... III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002) 第 014885 号

数学复习指南(经济类) (2006 版)

主 编: 陈文灯 黄先开 曹显兵
副 主 编: 施明存 殷先军
责任编辑: 武海燕
封面设计: 滕晓娜

出 版: 世界图书出版公司北京公司
发 行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号 电话 62198079 邮编 100081)
销 售: 各地新华书店
印 刷: 北京市后沙峪印刷厂

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16
印 张: 33
字 数: 790 千字
版 次: 2005 年 2 月第 11 版 2005 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5213-9/O · 334

定价: 47.80 元

服务热线: 010 - 62198078

前言

“得数学者得天下”。这句话在广大读者中广为流传。怎么才能考好数学,这是广大读者的迫切愿望。要实现这个愿望,首先要了解考研数学究竟考什么。从87年统考以来18年的试卷及历年考试大纲可以看出,主要是考四个方面:

一、基础。主要是从填空题和单选题两种题型来考核,通过考计算题和证明题也可看出一个读者的基础是否扎实。

二、简单知识点的综合能力。这是和过去很不同的一点。

三、分析问题和解决问题的能力,即解应用题的能力。

四、解题的速度。

针对这四个方面,根据广大读者提出的意见和我们的教学经验,我们对书中有关内容进行了修改,使它与考试更加协调,更加吻合。

本书的特点:

一、对基本概念、基本理论进行剖析,配合精选的例题使学生能够深入理解牢固掌握,考试时避免犯要领性的错误。

二、本书采用“举题型讲方法”代替普遍采用的讲方法举题型的作法,使读者做题时有的放矢、思路畅达。

三、本书介绍了许多新的、快捷的解题方法和技巧,有些技巧是全国各高校从事几十年教学工作的老师给我们提供的,在此表示衷心感谢。

四、普遍采用表格法使广大读者对有些知识点能够一目了然。

五、从大处着手,不做小枝节的分析,使广大读者能够站在比较高的角度掌握题型的解法,而不是引导学生去作无谓的细小问题的分析。

六、本书介绍了两个超纲的内容,一个是广义积分的收敛,另一个是二重积分的换元法,同学们掌握了这两项内容,在做某些题时可以获得思路上的启发。

本书的这六个特点,还不太完善,但是是我们追求的目的和愿望。愿广大读者对本书给予批评和指正。

陈文灯

目 录

考研数学复习策略	1
篇前篇 微积分解题的四种思维定式	2

第一篇 微积分

第一章 函数·极限·连续	7
第1节 函数	7
知识点精讲	7
题型归纳及思路提示	10
第2节 极限及连续性	17
知识点精讲	17
题型归纳及思路提示	22
本章备忘录	39
精选习题一	39
参考答案	41
第二章 导数与微分	43
第1节 导数与微分	43
知识点精讲	43
题型归纳及思路提示	45
第2节 高阶导数	51
知识点精讲	51
题型归纳及思路提示	52
本章备忘录	55
精选习题二	55
参考答案	57
第三章 一元函数积分学	58
第1节 不定积分	58
知识点精讲	58
题型归纳及思路提示	70
精选习题三(1)	79
参考答案	80
第2节 定积分	82
知识点精讲	82

题型归纳及思路提示	88
精选习题三(2)	111
参考答案	112
第3节 广义积分	113
知识点精讲	113
题型归纳及思路提示	114
精选习题三(3)	116
参考答案	116
本章备忘录	117
第四章 微分中值定理	118
知识点精讲	118
题型归纳及思路提示	119
本章备忘录	127
精选习题四	127
参考答案	128
第五章 一元微积分的应用	129
第1节 函数的单调性	129
知识点精讲	129
题型归纳及思路提示	129
第2节 极值与最值	131
知识点精讲	131
题型归纳及思路提示	132
第3节 方程的根	138
题型归纳及思路提示	138
第4节 函数的图形性质	143
知识点精讲	143
题型归纳及思路提示	144
第5节 微元法	147
知识点精讲	147
题型归纳及思路提示	148
本章备忘录	151
精选习题五	151
参考答案	153
第六章 多元函数微分学	154

第1节 二元函数	154
知识点精讲	154
题型归纳及思路提示	154
第2节 二元函数的极限及连续性	155
知识点精讲	155
题型归纳及思路提示	156
第3节 二元函数的偏导数、全导数及全微分	157
知识点精讲	157
题型归纳及思路提示	159
第4节 多元函数的极值及应用	169
知识点精讲	169
题型归纳及思路提示	170
本章备忘录	174
精选习题六	174
参考答案	175
第七章 二重积分	177
知识点精讲	177
题型归纳及思路提示	180
本章备忘录	188
精选习题七	188
参考答案	189
第八章 无穷级数*	191
第1节 常数项级数	191
知识点精讲	191
题型归纳及思路提示	194
第2节 函数项级数与幂级数	200
知识点精讲	200
题型归纳及思路提示	203
第3节 无穷级数的求和	208
题型归纳及思路提示	208
本章备忘录	215
精选习题八	215
参考答案	217
第九章 常微分方程及差分方程	218
第1节 常微分方程	218
知识点精讲	218
题型归纳及思路提示	222
第2节 差分方程*	231

知识点精讲	231
题型归纳及思路提示	233
精选习题九	235
参考答案	236
第十章 函数方程与不等式证明	237
精选习题十	248
参考答案	249
第十一章 微积分在经济中的应用	251
知识点精讲	251
题型归纳及思路提示	253
精选习题十一	259
参考答案	259

第二篇 线性代数

第一章 行列式	260
第1节 排列与逆序	260
知识点精讲	260
题型归纳及思路提示	261
第2节 行列式	262
知识点精讲	262
题型归纳及思路提示	264
本章备忘录	275
精选习题一	275
参考答案	276
第二章 矩阵	277
第1节 矩阵	277
知识点精讲	277
题型归纳及思路提示	278
第2节 逆矩阵	283
知识点精讲	283
题型归纳及思路提示	286
本章备忘录	298
精选习题二	298
参考答案	301
第三章 向量	303
第1节 向量	303
知识点精讲	303

第2节 向量的线性组合、线性表示及线

性相关性 304

知识点精讲 304

题型归纳及思路提示 305

第3节 向量组的秩和矩阵的秩 314

知识点精讲 314

题型归纳及思路提示 317

本章备忘录 323

精选习题三 324

参考答案 325

第四章 线性方程组 327

知识点精讲 327

题型归纳及思路提示 330

本章备忘录 350

精选习题四 351

参考答案 352

第五章 特征值和特征向量 354

第1节 矩阵的特征值和特征向量 354

知识点精讲 354

题型归纳及思路提示 356

第2节 相似矩阵、对称矩阵及矩阵的对

角化 362

知识点精讲 362

题型归纳及思路提示 364

本章备忘录 374

精选习题五 375

参考答案 376

第六章 二次型* 378

第1节 二次型 378

知识点精讲 378

题型归纳及思路提示 380

第2节 二次型的正定性及正定矩阵 ... 386

知识点精讲 386

题型归纳及思路提示 387

本章备忘录 391

精选习题六 391

参考答案 392

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率 393

第1节 随机试验和随机事件 393

知识点精讲 393

题型归纳及思路提示 396

第2节 条件概率与事件的独立性 402

知识点精讲 402

题型归纳及思路提示 404

本章备忘录 409

精选习题一 409

参考答案 411

第二章 随机变量及其分布 412

第1节 一维随机变量与分布函数 412

知识点精讲 412

题型归纳及思路提示 415

第2节 二维随机变量与分布函数 425

知识点精讲 425

题型归纳及思路提示 428

本章备忘录 443

精选习题二 443

参考答案 446

第三章 随机变量的数字特征 449

第1节 一维随机变量的数字特征 449

知识点精讲 449

题型归纳及思路提示 451

第2节 二维随机变量的数字特征 458

知识点精讲 458

题型归纳及思路提示 460

本章备忘录 475

精选习题三 475

参考答案 477

第四章 大数定律和中心极限定理 478

第1节 切比雪夫不等式与大数定律 ... 478

知识点精讲 478

题型归纳及思路提示 479

第2节 中心极限定理 481

知识点精讲	481
题型归纳及思路提示	482
本章备忘录	485
精选习题四	485
参考答案	485
第五章 数理统计的基本概念*	486
第1节 总体、样本和统计量	486
知识点精讲	486
题型归纳及思路提示	487
第2节 抽样分布	489
知识点精讲	489
题型归纳及思路提示	491
本章备忘录	493
精选习题五	493
参考答案	494
第六章 参数估计*	495

注:带*的内容,数四考生不作要求。

第1节 点估计	495
知识点精讲	495
题型归纳及思路提示	496
第2节 区间估计	503
知识点精讲	503
题型归纳及思路提示	505
本章备忘录	507
精选习题六	507
参考答案	509
第七章 假设检验*	510
知识点精讲	510
题型归纳及思路提示	512
本章备忘录	514
精选习题七	514
参考答案	515



考研数学复习策略

一、考研数学对考生知识和能力的要求

数学考试要求考生比较系统地理解数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法,要求考生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

二、考研数学试题的特点

数学考试根据工学、经济学、管理学各学科和专业对硕士研究生入学所应具备的数学知识和能力的不同要求,将数学统考试卷分为数学一、数学二、数学三和数学四。考生具体考哪个卷种,须向所报考院校咨询或查看该校的招生简章。

在题型比例上,填空题和选择题约占40%,其中填空题6道,每道4分,单项选择题8道,每道4分;解答题(包括证明题)约占60%,共9道题。

本书为经济类,涵盖数学三和数学四。数学三和数学四卷中,微积分约占50%,线性代数约占25%,概率论与数理统计约占25%。

试卷满分为150分,考试时间为180分钟,基本上考试时间在考试开始后的第二天的上午。

三、考研数学复习策略

1. 书该怎么读

由于数学考试重点考查考生的基本概念、基本理论、基本方法的掌握,所以考生应重视基础知识的掌握。考生应全面复习考纲要求的基础知识,通过一定量的习题巩固对基本概念及相关定理的理解,特别是对定理的条件要熟练掌握,否则容易用错。

2. 题该怎么做

数学中的习题相当多,考生应有针对性地进行练习。大家知道,题目是无限的,但题型是有限的。通过对典型题型的练习,掌握相应的解题方法,能迅速提高你的解题能力,节省考场上的宝贵时间。另外,大家应准确审题,一定要认真仔细。

3. 怎样逐渐提高自己的能力

经常进行自我总结,错题总结能逐渐提高解题能力。我们可以在学完每一章后,自己通过画图的形式回忆这章有哪些知识点,有哪些定理,它们之间有些什么联系,如何应用等;对做错的题分析一下原因:概念不清楚、定理用错了还是计算粗心?数学思维方法是数学的精髓,只有对此进行归纳、领会、应用,才能把数学知识与技能转化为分析问题、解决问题的能力,使解题能力“更上一层楼”。

4. 复习进度安排建议

复习进度因人而异,这只是给同学们的一个建议,供大家参考:

3月—7月

复习大纲规定的基本知识

7月—9月

第一阶段的全面复习

10月—11月

第二阶段的强化练习

12月—第二年1月

冲刺复习,隔两天做一套模拟题并及时查缺补漏

篇前篇 微积分解题的四种思维定式

以下四句话,在考研中能助同学们一臂之力.

第一句话:在题设条件中给出一个函数 $f(x)$ 在某点处的导数值即 $f'(a) = k$ (a, k 均为常数),“不管三七二十一”,根据所求(证)结论把 $f(x)$ 在该点的导数定义式“凑”出来再说.

【例1】设 $f(x)$ 可微, $f(0) = 0, f'(0) = 1, F(x) = \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt$, 试求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4}$.

【解】对定积分作变量代换 $x^2 - t^2 = u$, 则

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du, \quad \text{且} \quad F'(x) = x f(x^2).$$

于是由洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{4x^3} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \quad (\text{以下利用导数 } f'(0) \text{ 的定义}) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2 - 0} = \frac{1}{4} f'(0) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

【例2】设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 定义, 且对定义域中任何 x, y 均满足方程 $f(xy) = f(x)f(y)$, 且 $f'(1) = n$ ($n > 0$), 求 $f(x)$.

【解】在方程中令 $x = y = 1$ 得 $f(1) = f(1) \cdot f(1)$, 由此得 $f(1) = 0$ 或 $f(1) = 1$.

(1) 若 $f(1) = 0$, 令 $y = 1$, 由函数方程得 $f(x) = f(x) \cdot 0 = 0$, 即 $f(x) \equiv 0$, 但由 $f'(1) = n$ 知不合题意.

(2) 若 $f(1) = 1$, 令 $y = 1 + h$, 由函数方程得 $f(x + hx) = f(x) \cdot f(1 + h)$, 则(设 $h \neq 0$)

$$\frac{f(x + hx) - f(x)}{hx} = \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}.$$

令 $h \rightarrow 0$, 对上式两边取极限, 并由 $f'(1) = n$, 得 $f'(x) = n \frac{f(x)}{x}$.

这是可分离变量的微分方程, 解得 $f(x) = Cx^n$. 由条件 $f'(1) = n$, 得 $C = 1$, 即 $f(x) = x^n, x > 0$.

第二句话:在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时,则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例3】设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 且 $f(0) = f(\frac{1}{2}) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$. 证

明:存在一个 $\xi \in (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.



【证】 $f(2) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \xrightarrow{\text{积分中值定理}} 2(1 - \frac{1}{2})f(\eta) = f(\eta), \frac{1}{2} \leq \eta \leq 1.$

于是 $f(x)$ 在 $[\eta, 2]$ 上满足罗尔定理, 即存在一个 $\xi_1 \in (\eta, 2)$, 使

$$f'(\xi_1) = 0. \quad (1)$$

又 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上满足罗尔定理, 于是存在一个 $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$, 使

$$f'(\xi_2) = 0. \quad (2)$$

由 ①, ② 可知 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. 再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_1]$ 上使用罗尔定理,

于是 $\exists \xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【例 4】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是非负、单调递减的连续函数, 且 $0 < a < b < 1$. 证明:

$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【证】由积分中值定理

$$\int_0^a f(x) dx = af(\xi_1) \geq af(a), \quad \xi_1 \in [0, a],$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi_2) \leq (b-a)f(a), \quad \xi_2 \in [a, b].$$

$$\text{于是 } \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \geq f(a) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq \frac{1}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{故 } \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【另证】 $\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_a^b f(x) dx.$

$$\text{令 } F(x) = b \int_0^x f(t) dt - x \int_x^b f(t) dt,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } F'(x) &= bf(x) - \int_x^b f(t) dt + xf(x) = \int_x^b f(x) dt - \int_x^b f(t) dt + 2xf(x) \\ &= \int_x^b [f(x) - f(t)] dt + 2xf(x) \geq 0, \quad (\text{由于 } f(x) \geq f(t) \geq 0). \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0) = 0$,

故 $F(a) > F(0) = 0$, 即 $b \int_0^a f(x) dx - a \int_a^b f(x) dx > 0$,

$$\text{亦即 } \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

第三句话: 在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 或 $f(a) = f(b) = 0$, 则“不管三七二十一”先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x) \xrightarrow{f(a)=0} f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad a < \xi < x.$$

$$\text{或 } f(x) \xrightarrow{f(b)=0} f(x) - f(b) = f'(\xi)(x-b), \quad x < \xi < b.$$



若 $f(a) = f(b) = 0$, 则 $\begin{cases} f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a), & a < \xi_1 < x, \\ f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b), & x < \xi_2 < b. \end{cases}$

【例5】设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, 试证:

$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【证】 $f(x) = \frac{f(a) - f(x)}{a-x} (x-a) = (x-a)f'(\xi_1), a < \xi_1 < x$,

$$\text{则 } |f(x)| = (x-a)|f'(\xi_1)| \leq (x-a)M.$$

$$\text{同理 } |f(x)| \leq (b-x)M.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)M dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)M dx = \frac{(b-a)^2}{4} M. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{(b-a)^2}{4} M.$$

$$\text{即 } \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【例6】已知在 $[0, a]$ 上 $|f''(x)| \leq M$, 且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取最大值, 试证:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma.$$

【证】设 $f(c) = \max_{x \in (0, a)} \{f(x)\}$, 则 $f'(c) = 0$. (费尔马定理)

对 $f'(x)$ 在 $[0, c]$ 与 $[c, a]$ 内分别用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1)c, \quad 0 < \xi_1 < c,$$

$$f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c), \quad c < \xi_2 < a.$$

$$\text{于是 } |f'(0)| = |f''(\xi_1)c| \leq Mc,$$

$$|f'(a)| = |f''(\xi_2)(a-c)| \leq M(a-c).$$

$$\text{故 } |f'(0)| + |f'(a)| \leq Mc + M(a-c) = Ma.$$

【例7】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的 $f''(x)$, 且 $f''(x) < 0, f(a) = f(b) = 0$, 则在 (a, b) 上 $f(x) > 0$, 且

$$\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > \frac{4}{b-a}.$$

【证】由 $f''(x) < 0$ 可知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹函数 (图形上

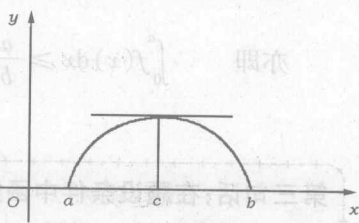
凸); 由凹函数性质知 $f(x)$ 大于连接 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为 $y = 0$ (x 轴), 所以在 (a, b) 上 $f(x) > 0$. 再由 $f''(x) < 0$ 知, $f'(x)$ 是严格单调减少的, 从而知 $f(x)$ 在 (a, b) 内有唯一的极大值点, 记为 $x = c$. 此时 $f'(c) = 0$, 如右图所示, 而在 (a, c) 上 $f'(x) > 0$, 在 (c, b) 上 $f'(x) < 0$. 由拉格朗日中值定理,

当 $x \in [a, c]$ 时, $f(x) = f'(\xi_1)(x-a) + f(a), \quad \xi_1 \in (a, x)$.

由 $f'(x)$ 严格递减, $f'(\xi_1) < f'_+(a)$, 注意到 $f(a) = 0$, 有

$$f(x) < f'_+(a)(c-a), \quad x \in [a, c].$$

当 $x \in [c, b]$ 时, 同理可得





$$\begin{aligned}
 & f(x) < [-f'_-(b)](b-c), x \in [c, b]. \\
 \text{于是 } & \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(c-a)f'_+(a)}, x \in [a, c], \\
 & \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(b-c)[-f'_-(b)]}, x \in [c, b]. \\
 \text{则 } & \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx = - \int_a^b \frac{f''(x)}{f(x)} dx = \int_a^c \frac{-f''(x)}{f(x)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{f(x)} dx \\
 & > \int_a^c \frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{(b-c)[-f'_-(b)]} dx \\
 & = \frac{1}{(c-a)f'_+(a)} [f'_+(a) - f'_-(c)] + \frac{1}{(b-c)[-f'_-(b)]} [f'_-(c) - f'_-(b)] \\
 & = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} > (b-a) \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4}{b-a}.
 \end{aligned}$$

第四句话:对定限或变限积分,若被积函数或其大部分为复合函数,则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例8】求下列函数的导数(设 $f(u)$ 是 u 的连续函数):

$$\begin{aligned}
 (1) & F(y) = \int_0^y f(x-y) dx, \text{求 } F'(y); \quad (2) F(x) = \int_0^{x^2} tf(x-t) dt, \text{求 } F'(x); \\
 (3) & F(x) = \int_0^1 f(te^x) dt, \text{求 } F'(x); \quad (4) F(x) = \int_0^{x^2} xf(x+t) dt, \text{求 } F'(x).
 \end{aligned}$$

【解】(1) $F(y) \xrightarrow{\text{令 } u = x-y} \int_{-y}^0 f(u) du$, 则 $F'(y) = -f(-y) \cdot (-1) = f(-y)$.

$$\begin{aligned}
 (2) F(x) & \xrightarrow{\text{令 } u = x-t} \int_x^{x-x^2} (x-u)f(u)(-du) \\
 & = -x \int_x^{x-x^2} f(u) du + \int_x^{x-x^2} uf(u) du,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } F'(x) & = - \int_x^{x-x^2} f(u) du - x[f(x-x^2) \cdot (1-2x) - f(x)] \\
 & \quad + (1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - xf(x) \\
 & = \int_{x-x^2}^x f(u) du + x^2(2x-1)f(x-x^2).
 \end{aligned}$$

$$(3) F(x) \xrightarrow{\text{令 } u = te^x} \int_0^{e^x} f(u) \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{e^x} \int_0^{e^x} f(u) du = e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du,$$

$$\text{则 } F'(x) = -e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du + e^{-x} f(e^x) \cdot e^x = f(e^x) - e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du.$$

$$(4) \int_0^{x^2} f(x+t) dt \xrightarrow{\text{令 } u = x+t} \int_x^{x+x^2} f(u) du, \text{于是有 } F(x) = x \int_x^{x+x^2} f(u) du,$$

$$\text{则 } F'(x) = \int_x^{x+x^2} f(u) du + x[f(x+x^2) \cdot (1+2x) - f(x)].$$

【例9】* 设 $f(x)$ 可微,且满足 $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x tf(t-x) dt$,求 $f(x)$.



【解】 $\int_0^x t f(t-x) dt \xrightarrow{\text{令 } u=t-x} \int_{-x}^0 (u+x) f(u) du = - \int_0^{-x} u f(u) du + x \int_{-x}^0 f(u) du.$

于是原方程变为 $x = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{-x} u f(u) du - x \int_0^{-x} f(u) du.$

两边对 x 求导, 得 $1 = f(x) - (-x)f(-x)(-1) - \int_0^{-x} f(u) du - xf(-x)(-1).$

整理, 得 $1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u) du,$

两边再对 x 求导, 得 $0 = f'(x) - f(-x)(-1),$

即 $f'(x) = -f(-x),$

上式两边对 x 求导, 得 $f''(x) = f'(-x),$

由 ①, ② 得 $f''(x) = -f(x),$

即 $f''(x) + f(x) = 0,$

解此方程得 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

注意到 $f(0) = 1, f'(0) = -1$, 故 $f(x) = \cos x - \sin x.$

①

②

第一篇 微积分

第一章 函数·极限·连续

第1节 函数

■ 知识点精讲

一、基本概念

1. 函数

设有两个变量 x 和 y , 变量 x 的变域为 D , 如果对于 D 中的每一个 x 值, 按照一定的法则, 变量 y 有一个确定的值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记作: $y = f(x)$.

其中 x ——自变量, y ——因变量, 变域 D 为定义域, 记为 D_f , 变量 y 的取值的集合称为函数的值域, 记作 Z_f .

函数概念的两要素:

- ① 定义域 $\triangleq$ 自变量 x 的变化范围(若函数是解析式子表示的, 则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域).
- ② 对应关系 $\triangleq$ 给定 x 值, 求 y 值的方法.



记住下列简单函数的定义域:

$y = \frac{1}{x},$	$D_f: x \neq 0, \quad (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = \sqrt[n]{x},$	$D_f: x \geq 0, \quad [0, +\infty)$
$y = \log_a x,$	$D_f: x > 0, \quad (0, +\infty)$
$y = \tan x,$	$D_f: x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$
$y = \cot x,$	$D_f: x \neq k\pi, \quad k \in Z$
$y = \arcsin x \text{ (或 } \arccos x),$	$D_f: x \leq 1, \quad [-1, 1]$

2. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的值域为 Z_f , 如果对于 Z_f 中任一 y 值, 从关系式 $y = f(x)$ 中可确定惟的一个 x 值, 则称变量 x 为变量 y 的函数, 记为: $x = \varphi(y)$, 其中 $\varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记为: $y = f^{-1}(x)$.

注 ① $y = f(x)$ 的图形与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图形重合; $y = f(x)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

② 只有一一对应的函数才有反函数.

3. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ , 若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \emptyset$, 则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

其中 x ——自变量, u ——中间变量, y ——因变量.

4. 初等函数

由常数 C 及基本初等函数通过有限次的四则运算或复合而成的只能用一个式子表示的函数, 称为初等函数. 基本初等函数包括五类函数: 幂函数: $y = x^\mu (\mu \in R)$; 指数函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$; 对数函数: $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$; 三角函数: 如 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 等; 反三角函数: 如 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等.

5. 分段函数

如果一个函数在其定义域内, 对应于不同的区间段有着不同的表达形式, 则该函数称为分段函数.

常见的分段函数:

① 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0, \\ 0 & \text{当 } x = 0, \\ -1 & \text{当 } x < 0. \end{cases}$

② y 是 x 的最大整数部分, 记为 $y = [x]$.



③ 狄利克莱(Dirichlet)函数 $y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$

注 一般而言,分段函数不是初等函数.

二、基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义,如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x))$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

图形特征:偶函数 $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称,奇函数 $f(x)$ 的图形关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

- ① 奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数.
- ② 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数;奇数个奇函数的积为奇函数.
- ③ 一奇一偶函数的乘积为奇函数.

常见的偶函数: $|x|$, $\cos x$, x^{2n} (n 为正整数), $e^{|x|}$, e^{x^2} , ...

常见的奇函数: $\sin x$, $\tan x$, $\frac{1}{x}$, x^{2n+1} , $\arcsin x$, $\arctan x$, ...

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义,若存在一个与 x 无关的正数 T ,使对于任一 $x \in X$, 恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

周期函数的运算性质:

- ① 若 T 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.
- ② 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.
- ③ 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2, T_1 \neq T_2$ 为周期的函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期: $\sin x, \cos x$, 其周期 $T = 2\pi$;

$\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$, 其周期 $T = \pi$.

3. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义,如果 $\exists M > 0$,使得对于一切 $x \in X$,恒有: $|f(x)| \leq M$,则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界;若不存在这样的 $M > 0$,则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

注 函数 $f(x)$ 有无界是相对于某个区间而言的.