

锻压机械设计基础

中 册

华南工学院主编

华南工学院

一九七八年八月

鍛压机械设计基础

(中册)

目 录

第五章 构件的变形和刚度计算

§ 5.1	构件的变形和刚度计算的意义	(1)
§ 5.2	受拉伸(压缩)作用构件的变形及刚度计算	(1)
§ 5.3	受扭转作用构件的变形及刚度计算	(5)
§ 5.4	受弯曲作用构件的变形及刚度计算	(8)
§ 5.5	压力机的刚度计算	(14)

第六章 动力分析及动应力计算

§ 6.1	零件平移时的动力分析	(20)
§ 6.2	动 静 法	(26)
§ 6.3	回转零件惯性力的平衡	(36)
§ 6.4	冲量和动量	(39)
§ 6.5	构件的动应力计算	(43)
§ 6.6	交变应力	(48)

第七章 功能分析及飞轮设计

§ 7.1	压力机电机功率的选定	(55)
§ 7.2	曲柄压力机的能量消耗	(57)

§ 7.3 压力机飞轮设计计算	(62)
-----------------------	--------

第八章 齿轮传动

§ 8.1 概 述	(68)
§ 8.2 渐开线齿轮有恒定的传动比	(70)
§ 8.3 渐开线齿轮各部分的名称及其尺寸计算	(72)
§ 8.4 一对齿轮的正确啮合	(75)
§ 8.5 齿轮的加工方法	(77)
§ 8.6 齿轮的破坏	(80)
§ 8.7 齿轮材料的选择	(83)
§ 8.8 直齿圆柱齿轮传动的设计计算	(86)
§ 8.9 斜齿圆柱齿轮传动	(101)
§ 8.10 圆柱齿轮的结构	(113)
§ 8.11 圆柱齿轮传动的精度及其公差	(115)
§ 8.12 齿轮工作图	(133)
§ 8.13 圆锥齿轮传动	(135)
§ 8.14 变位齿轮	(139)
§ 8.15 齿轮传动的特点, 应用范围, 使用与维护	(155)

第九章 蜗杆传动

§ 9.1 概 述	(157)
§ 9.2 蜗杆传动的参数选择和几何尺寸计算	(159)
§ 9.3 蜗杆传动的设计计算	(164)
§ 9.4 蜗杆传动的润滑与热平衡计算	(168)

第十章 皮带传动

§ 10.1 皮带传动的基本原理和种类	(172)
§ 10.2 皮带传动的主要型式, 张紧方法和皮带轮	(176)
§ 10.3 皮带传动中的滑动与传动比	(180)
§ 10.4 皮带的传动能力与寿命	(182)
§ 10.5 三角皮带传动的设计计算	(188)
§ 10.6 皮带传动的特点、应用、使用与维护	(191)

第五章 构件的变形和刚度计算

§ 5.1 构件的变形和刚度计算的意义

机器中的构件，在传力的过程中，会发生形状的变化。对于杆件形状的构件来说，通常用两个几何因素来描写构件原来形状的变化：一个是构件横截面位置的变化，另一个是构件轴线形状的变化。构件横截面位置和轴线形状的变化，统称为构件的变形。

设计出来的构件，当它在传力的时候，如果出现过大的变形，那是不容许的。例如压力机的机身，当它在工作的时候，就不容许出现过大的变形，否则会影响工件的精度，也会导致冲模损坏。因此，设计一部机器时，往往根据构件在机器中重要性的不同，提出不同的变形量的要求。对构件进行变形量的限制，这种计算一般称为构件的刚度计算。

本章主要讨论构件的各种基本变形及刚度计算方法，然后讨论压力机开式床身的刚度计算方法。

§ 5.2 受拉伸(压缩)作用构件的变形及刚度计算

我们取矩形截面模型杆件进行试验，研究它的拉伸变形规律。在图5.1中，如果杆件原来的长度为 l ，横截面积为 F ，我们给它施加轴向拉力 P 之后，其轴线仍保持直线形状，但长度却由原来的 l 改变为 l_1 ，增长了一个数量 Δl 。我们发现：当构件截面上的应力在弹性极限以

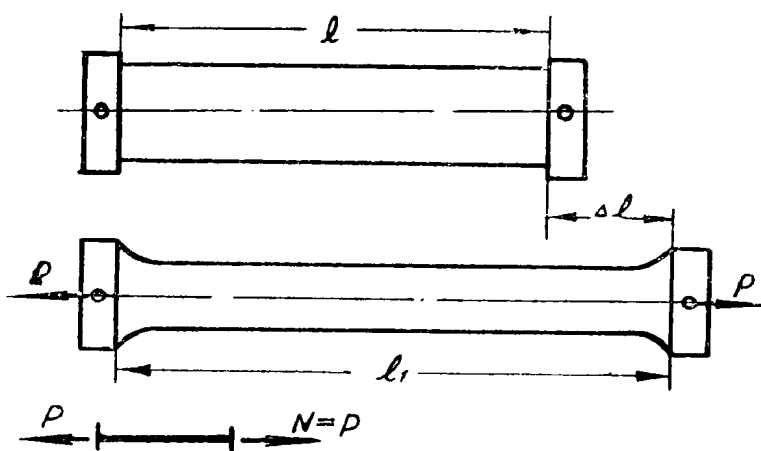


图5.1 构件的拉伸变形

内时，长度改变量 Δl 是依一定规律变化的：它与所施加的轴向力 P 以及杆件原来的长度 l 成正比例关系，而与原来的横截面积 F 成反比例关系。把这样的关系写成数学式就成为：

$$\Delta l \propto \frac{Pl}{F}$$

我们引进一个比例系数 E ，则可以把上式写成一个等式，即：

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}$$

在上式中， P 是作用在构件上沿轴线方向的外力。根据第四章的知识，假设构件截面上的轴向内力为 N ，则用静力平衡条件可求得 $N = P$ 。这样，上式便可写成：

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \quad (5.1)$$

(5.1)式称为虎克定律。当杆件受到轴向压力作用时，式(5.1)的关系仍然正确。在运用式(5.1)时对于受拉伸的杆件，由于其轴力 N 为正值，此时计得的 Δl 也为正值，正值的 Δl 表示杆件受力后伸长；对于受压缩的杆件，由于轴力 N 为负值，此时计得的 Δl 也为负值，负值的 Δl 表示杆件受力后缩短。

在(5.1)式中， E 称为材料的弹性模数。它是反映材料机械性能的一个物理量，是由试验测定的。由(5.1)看出 E 的量纲是：

$$E = \frac{[\text{力}] \times [\text{长度}]}{[\text{长度}]^2 \times [\text{长度}]} = \frac{[\text{力}]}{[\text{长度}]^2}$$

其常用的计算单位为“公斤/厘米²”或“公斤/毫米²”。每一种材料的 E 值都是一定的，例如一般的钢材， $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米²。其它常用材料的 E 值可查表5.1。

EF 称为抗拉(压)刚度，对于长度相同、受力也相同的杆件，其 EF 愈大则杆件的变形愈小。于是，虎克定律的含义是：当构件受拉伸或压缩时，如果应力在弹性范围之内，则构件的绝对变形量 Δl 与轴向内力 N 及构件的长度 l 成正比，而与构件的抗拉(压)刚度成反比。 Δl 的单位常用厘米或毫米。

工程上常用单位长度的变形量来表示构件的变形程度。单位长度的变形通常称为构件的相对变形量。由式(5.1)看出，拉伸(或压缩)时，构件单位长度的变形为：

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EF} \quad (5.2)$$

上式中 ε 称为拉伸(压缩)构件的应变。它是一个无量纲的数值。

至此，我们可以写出拉伸(压缩)时，构件的刚度条件为：

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} \leq [\varepsilon] \quad (5.3)$$

上式中， $[\varepsilon]$ 称为许用变形量，由构件的具体要求来确定。

由式(5.2)，我们可以得到虎克定律的另一种表示式，即是

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (5.4)_1$$

或写成 $\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (5.4)_2$

(5.4)₁式表明，构件受到轴向拉力(或压力)的作用，在材料的弹性极限范围内，应力与应变成正比例关系，其比例系数为 E 。

上面讲了构件受简单(单向)拉伸或压缩时，变形及刚度的计算方法。下面进一步讨论

构件受到多向拉伸或压缩时，变形的计算方法。

由材料的试验研究，我们得到这样一个结果：在材料弹性范围内构件受拉伸或压缩时，其横向应变与轴向应变之比的绝对值是一个常量，即

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right| = \text{常量} \tag{5.5}$$

上式中， ε_1 和 ε 分别表示构件的横向应变和轴向应变； μ 称为构件的横向变形系数（或称为泊桑系数），它是一个表示材料物理性能的无因次量。对于一般钢材， $\mu = 0.2 \sim 0.33$ ，其它材料的 μ 值，可以参照表5.1查用。

把式（5.5）代入式（5.4）₂并考虑到 ε_1 与 ε 之伸长与缩短，于是可得到横向应变的计算式

$$\varepsilon_1 = -\mu \frac{\sigma}{E} \tag{5.6}$$

表 5.1 常用材料的弹性系数和泊桑系数

材 料 名 称		弹性系数 $E(10^8 \text{公斤/厘米}^2)$	泊 桑 系 数 μ
一般钢材		2.0~2.1	0.25~0.33
铸 铁		1.1~1.6	0.23~0.27
铝和硬铝合金		0.69~0.71	0.32~0.36
铸 钢		1.75~2.0	0.25~0.30
铜及其合金		1.0	0.31~0.36
橡 胶		0.00008	0.47
木 材	顺 纹	0.1~0.12	~
	横 纹	0.005~0.01	~

根据式（5.6）和式（5.4）₂，我们可以推导出构件受多向拉伸或压缩时的应变计算式。设单元体的六个面上同时受到 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 的作用(图5.2)，现在要求出各个棱边的应变。

先来确定第 I 边的应变：

由于 σ_1 引起第 I 边的应变为

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}$$

由于 σ_2 引起第 I 边的应变为

$$\varepsilon_1'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}$$

由于 σ_3 引起第 I 边的应变为

$$\varepsilon_1''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}$$

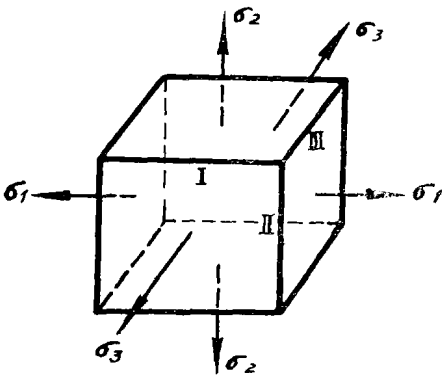


图5.2 三向拉伸图

所以在 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 同时作用下第 I 棱边的总应变为

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}$$

用同样的方法，可以写出其它两棱边的应变为

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E}$$

把上面三条式子归纳起来，就成为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right) \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right) \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

式(5.7)称为广义虎克定律。在计算时，若 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 中有一些是压应力，则必须用负值代入。

例题5.1 长20厘米的钢螺栓，在拧紧螺母时，出现0.15毫米的伸长，钢材的弹性系数取 $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米²，试求螺栓的应力。

解 因为 $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0.15}{200} = 0.00075$

故 $\sigma = \varepsilon E = 0.00075 \times 2.1 \times 10^6 = 1580$ 公斤/厘米²

例题5.2 设一压力机滑块平衡缸活塞杆长度为300毫米，截面直径45毫米，材料为钢材，受到3500公斤拉力的作用。试求出活塞杆的绝对伸长。

解 因为活塞杆的内力为 $N = 3500$ 公斤，
活塞杆受力面积为

$$F = \frac{1}{4} \pi d^2 = \frac{1}{4} \pi \times 4.5^2 = 15.4 \text{ 厘米}^2$$

活塞杆总长度为 $l = 300$ 毫米

又钢材的弹性系数为 $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米²，

故此，由式(5.1)可计算出活塞杆的绝对伸长为

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} = \frac{3500 \times 30}{2.1 \times 10^6 \times 15.4} = 0.0032 \text{ 厘米}$$

例题5.3 如图5.3所示的直杆，若横截面积为 $F = 7.07$ 厘米²，受到两个力的作用： $P_1 = 10$ 吨， $P_2 = 14$ 吨，杆分段长度为 $a = 10$ 厘米， $b = 20$ 厘米，材料的弹性系数为 $E = 2.1 \times 10^6$ 公斤/厘米²，试求此杆受力后的总伸长。

解 (1) 建立计算简图

求出支座A反力 $R_A = 4$ 吨，作出轴力图如附图所示。

(2) 求出各段杆之伸长分量

$$\Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} l_{AC}}{EF} = -\frac{4 \times 10^3 \times 10}{2.1 \times 10^6 \times 7.07} = -0.0028 \text{ 厘米}$$

$$\Delta l_{CB} = \frac{N_{CB} l_{CB}}{EF} = \frac{10 \times 10^3 \times 20}{2.1 \times 10^6 \times 7.07} = 0.014 \text{ 厘米}$$

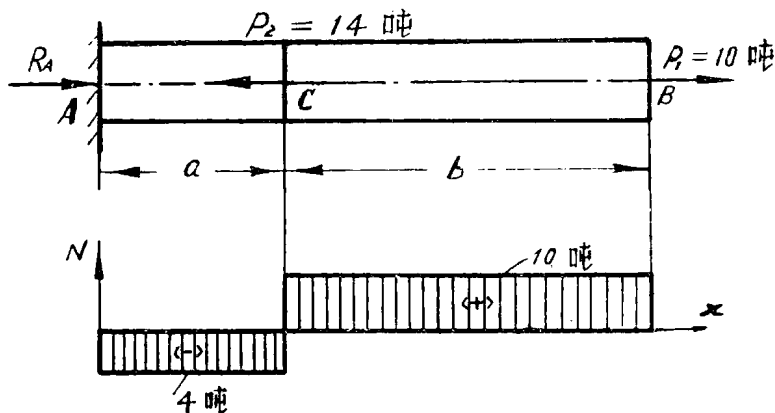


图5.3 例题5.3附图

(3) 求杆的伸长总量

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_{AC} + \Delta l_{CB} \\ &= -0.0028 + 0.014 = 0.0112 \text{ 厘米} \end{aligned}$$

§ 5.3 受扭转作用构件的变形及刚度计算

横截面形状不同的构件，受扭转作用后，构件的变形特征和变形的计算方法是不同的。在这里，我们只讨论圆形等截面直杆受扭转作用后的变形特征和变形的计算方法。

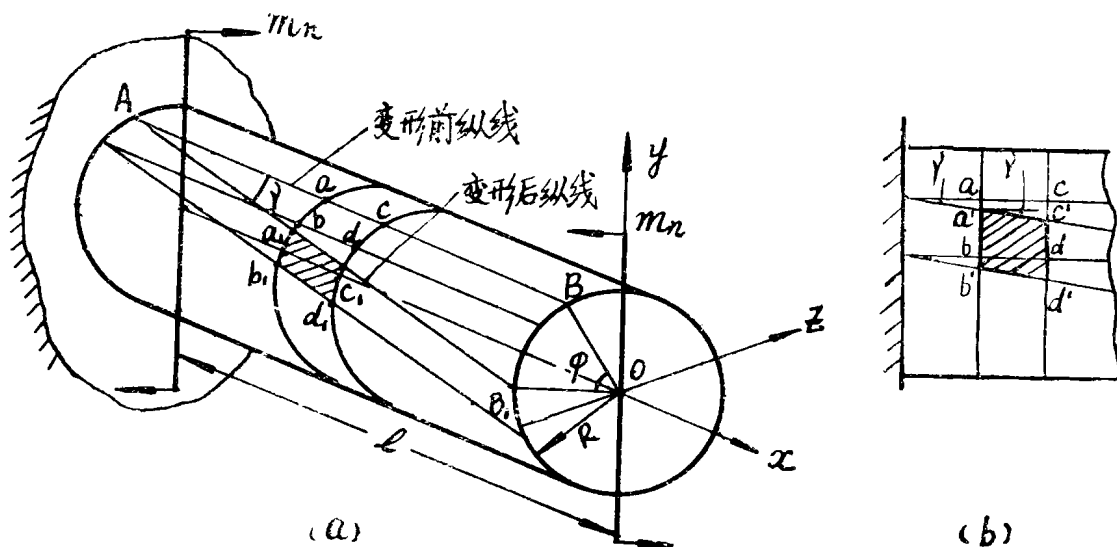


图5.4 受扭转构件的变形分析

取图5.4(a)所示这样一个圆形等截面直杆的构件模型,它的一端固定 另一端自由,并在自由端给构件加上一个外力偶矩 m_n ,使其发生扭转变形。加上 m_n 之前先在构件的表面画上纵向线,加上 m_n 之后,就可以看到,原来的纵向线发生了偏转角 γ ,构件的横截面相应地产生了一个绕 x 轴转动的相对转角 φ 。但此时轴线仍保持原来的直线,长度并无变化。故此,等直圆杆受扭转作用后,其变形的特征可以单纯用截面的相对转角 φ 来表示。 φ 称为扭转角。

现在求这个扭转角 φ 。从图中的几何关系看出:

$$\widehat{BB_1} = \gamma \cdot l = \varphi \cdot R$$

于是
$$\varphi = \frac{\gamma \cdot l}{R} \quad (a)$$

此处的纵向线偏转角 γ ,从图5.4(b)看出,它实质上就是剪应变(在图5.4b中,小矩形 $abcd$ 变为小平行四边形 $a_1b_1c_1d_1$, γ 反映了 ac 与 cb 原来夹角的改变量)。而从材料的扭转试验中,我们已经知道,在材料的弹性范围内,剪应力与剪应变成正比例关系,就是

$$\tau = G\gamma \quad (b)$$

这个关系称为剪切虎克定律。在任何半径的表层中各点,这个关系都是存在的。于是,我们引入在强度计算时的剪应力关系式,由式(4.6),在截面上,半径为 R 处的各点,其剪应力的计算式是:

$$\tau = \frac{M_n \cdot R}{J_p} \quad (c)$$

(c)式中, M_n 是构件受扭转后截面上的内力—扭矩,对于图5.4的情形,显然 $M_n = m_n$ 。 J_p 是截面的极惯性矩。

如果将式(b)移项并引入(c)式,就得到关系式:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{M_n R}{G J_p} \quad (d)$$

再将(d)式代入(a)式经简化后得:

$$\varphi = \frac{M_n l}{G J_p} \quad (5.8)$$

式(5.8)就是长度为 l 的一段杆扭转角的计算公式。式中 G 称为材料的剪切弹性模数,是一个常数,它的计算单位与 E 相同,即是“公斤/厘米²”,或“公斤/毫米²”。对一般钢材, $G = 8.0 \times 10^5$ 公斤/厘米²,其它材料的 G 值,可参照工程手册查用。 $G J_p$ 称为构件的抗扭刚度。

构件的扭转刚度计算,是用单位长度的扭转角来与许用扭转角相比较的。如果用 θ 代表构件单位长度的扭转角,并引入式(5.8),就有

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_n}{G J_p} \quad (e)$$

对于等截面直圆杆,其单位长度扭转角的最大值 $\theta_{\max}$ 显然发生在扭矩绝对值最大值 $|M_n|_{\max}$ 的一段杆上,于是扭转构件的刚度条件可以建立:

$$\theta_{\max} = \frac{|M_n|_{\max}}{G J_p} \leq [\theta] \quad (5.9)$$

式中 $[\theta]$ 为单位长度扭转角的许可值,称为许用扭转角,它根据构件的具体要求给定。

在应用上,由于许用扭转角 $[\theta]$ 一般是用“度/米”表示,而在式(5.9)中, θ 的计算单位是“弧度/厘米”。为了把式(5.9)中的 θ 单位转换为以“度/米”表示,我们将它改写为

$$\theta_{\max} = \frac{|M_n|_{\max}}{GJ_p} \times \frac{180}{\pi} \times 100 \leq [\theta]$$

或写为

$$\theta_{\max} = \frac{|M_n|_{\max}}{GJ_p} \times 57.3 \times 100 = 5730 \frac{|M_n|_{\max}}{GJ_p} \leq [\theta] \quad (5.10)$$

例题5.4 我国第一汽车制造厂制造的解放牌汽车，其传递转动的万向轴是用45号钢无缝钢管制成，轴的截面外径 $D = 90$ 毫米，内径 $d = 83$ 毫米，在使用时受最大扭矩为 $M_n = 150$ 公斤·米。试验算此轴的强度和刚度。给定材料的剪切许用应力为 $[\tau] = 600$ 公斤/厘米²，剪切弹性模数 $G = 8.0 \times 10^5$ 公斤/厘米²，许用扭转角是 $[\theta] = 2$ 度/米。

解 (1) 先计算各有关系数

因为 $M_n = 150$ 公斤·米 $= 15 \times 10^3$ 公斤·厘米

$D = 9$ 厘米， $d = 8.3$ 厘米

故

$$\alpha = \frac{d}{D} = \frac{8.3}{9} = 0.92$$

$$J_p = 0.1D^4(1 - \alpha^4) = 0.1 \times 9^4(1 - 0.92^4) = 184 \text{ 厘米}^4$$

$$W_p = \frac{J_p}{\frac{D}{2}} = \frac{184}{4.5} = 41 \text{ 厘米}^3$$

(2) 强度计算

$$\tau_{\max} = \frac{|M_n|_{\max}}{W_p} = \frac{15 \times 10^3}{41} = 366 \text{ 公斤/厘米}^2 < [\tau] = 600 \text{ 公斤/厘米}^2$$

(3) 刚度计算

$$\theta = 5730 \frac{|M_n|_{\max}}{GJ_p} = 5730 \times \frac{15 \times 10^3}{8 \times 10^5 \times 184} = 0.58 \text{ 度/米} < [\theta] = 2 \text{ 度/米}$$

可见轴的强度和刚度都是足够的。

例题5.5 图5.5是一压力机传动轴的简图及其扭矩图。轴的直径为 $D = 12.9$ 厘米，材料为45号钢。试计算出当飞轮带动轴正常运转后，飞轮与齿轮的相对扭转角。

解 由于 $M_n = 64200$ 公斤·厘米

$l = 44$ 厘米

$G = 8.0 \times 10^5$ 公斤/厘米²

$J_p = 0.1D^4 = 0.1 \times 12.9^4 = 2770 \text{ 厘米}^4$

故飞轮与齿轮的相对扭转角为

$$\varphi = \frac{M_n l}{GJ_p} = \frac{64200 \times 44}{8 \times 10^5 \times 2770} = 127 \times 10^{-5} \text{ 弧度}$$

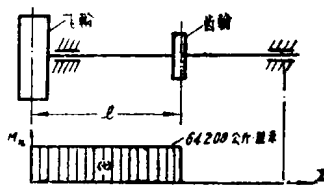


图5.5 例题5.5附图

§ 5.4 受弯曲作用构件的变形及刚度计算

我们首先来研究构件在受弯曲作用时的变形特征。取图5.6所示的悬臂梁为例， AB 表示梁在受力前轴线的位置，经外力 P 作用之后，梁发生弯曲，此时，梁的轴线 AB 由原来的直线状态变为 AB_1 的曲线状态。我们现在忽略去一些次要因素的影响，观察到轴线 AB 上截面 x 发生竖直位移 $y = CC_1$ 和倾角 θ 。我们把 y 称为轴线在截面 x 处的挠度，把 θ 称为截面 x 处的转角。可见，构件受弯曲作用时，其变形特征有两个：一个是构件轴线的挠度，一个是截面的转角。挠度和转角统称为构件的弯曲变形。

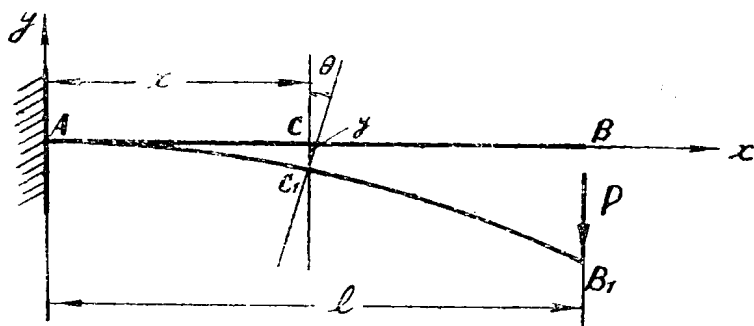


图5.6 构件的弯曲变形

下面介绍几种求解挠度和转角的方法。

(一) 积分法

由图5.6看出，构件弯曲之后，任意截面处轴线的挠度 y 是截面位置 x 的函数，用一般的数学式表示可写为

$$y = f(x) \quad (a)$$

而在任意位置 x 处，截面的斜率为

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} \quad (b)$$

实际上，构件在受弯曲之后，其挠度是很小的，因而 θ 的值也很小，所以可以足够准确地认为

$$\operatorname{tg} \theta \approx \theta \quad (c)$$

比较(b)式和(c)式可得

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (5.11)$$

式(5.11)表明，弯曲构件截面的转角 θ 等于该截面处轴线的挠度 y 对于位置 x 的一阶导数。

现在来寻找(a)式中挠度 y 与位置 x 的关系，从而通过式(5.11)得出挠度 y 和转角的计算方法。

用一条矩形截面的构件来作弯曲试验(图5.7),如果把剪力 Q 忽略去,而把构件理解为单纯的在弯矩 M 作用下发生弯曲变形,则从试验可以看出,

构件在弯曲之后,轴线在任何位置处的曲率 $\frac{1}{\rho}$ 与该位置的弯矩 M 成正比例关系,而与该位置截面的抗弯刚度 EJ_z 成反比例关系。把这种关系写成式子就是

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z} \quad (5.12)$$

由于 y 与 x 成函数关系,故式(5.12)又可写为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EJ_z} \quad (d)$$

另一方面,根据高等数学微积分的知识,我们懂得,曲线上任一点的曲率与该点坐标 x 和 y 的关系为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (e)$$

比较(d)式和(e)式,就得出挠度 y 与截面位置 x 、弯矩 $M(x)$ 及抗弯刚度 EJ_z 的关系为

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ_z} \quad (f)$$

(f)式是一个二阶非线性常微分方程式,精确把这方程式解出,是不利于实际应用的,通常把此方程式简化。由于一般构件在弯曲变形时,截面转角 θ 实际很小(不超过 1°),因此 $\tan \theta$ 很小,也即是 $\frac{dy}{dx}$ 很小,这样 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 就更小了,故有理由把 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 略去。于是式(f)可写成

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_z}$$

或写为

$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \quad (5.13)$$

式(5.13)是一个反映挠度 y 与位置 x 函数关系的近似式。由于一般构件的弯曲变形,我们是指在材料弹性范围内的变形,故式(5.13)是在材料弹性变形范围内适用,因此常称式(5.13)为弯曲构件弹性曲线的近似微分方程式。

至此,弯曲构件变形的计算方法基本上已经解决了。因为对于等截面的构件来讲,各个截面的抗弯刚度 EJ_z 的数值相同,是一个常量,而弯矩 $M(x)$ 一般是 x 的简单函数,因此将方程式(5.13)两边乘以 dx ,并进行一次积分,结合式(5.11)来考虑,即可得出截面的转角方程为

$$EJ_z \theta = EJ_z \frac{dy}{dx} = \int M(x) dx + C \quad (5.14)$$

把式(5.14)再积分一次,就得到截面处轴线挠度的方程式为

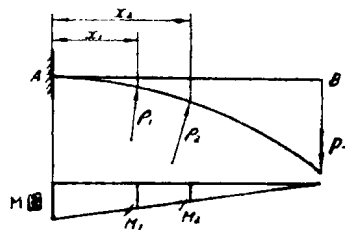


图5.7 曲率与弯矩的关系

$$EJ_z y = \int \int M_x dx dx + Cx + D \quad (5.15)$$

在上两式中, 积分常数 C 和 D 由计算简图的边界情况(通常称为边界条件)来决定。因为利用上面两式来计算构件的弯曲变形是直接利用积分方法来进行的, 故常称为直接积分法。

例题 5.6 求图5.8中简支梁 AB 受均布荷载 q 作用时任意截面的转角和挠度, 并确定其最大值, 梁的跨度为 l 。

解 以 A 为坐标原点, 取直角坐标如图所示。为了应用式(5.14)和(5.13), 必须先找出 M_x 的代数式。

(1) 求支座反力

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$

(2) 求任意截面的弯矩

$$M(x) = R_A \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

(3) 把 M_x 的函数式代入式(5.13)

$$EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

积分一次得

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = EJ\theta = \frac{ql}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + C \quad (a)$$

积分二次得

$$EJ_z y = \frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 + Cx + D \quad (b)$$

(4) 确定积分常数

利用计算简图的边界条件

在支座 A 处, 即 $x=0$ 处, $y=0$

在支座 B 处, 即 $x=l$ 处, $y=0$

代入方程式(b), 即可解出 $D=0$, $C=-\frac{ql^3}{24}$ 。

(5) 求任意截面的转角和挠度

把 C 及 D 的数值代入(a)式及(b)式, 即得出简支梁任意截面的转角和挠度:

$$\theta = -\frac{ql^3}{24EJ_z} \left[1 - 6\frac{x^2}{l^2} + 4\frac{x^3}{l^3} \right] \quad (c)$$

$$y = -\frac{ql^3 x}{24EJ_z} \left[1 - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right] \quad (d)$$

(6) 求最大转角和最大挠度

在支座 A 及 B 处, 截面发生最大的转角(指绝对值), 用 $x=0$ 及 $x=l$ 分别代入式(c)和式(d)得:

$$\theta_A = -\frac{ql^3}{24EJ_z}$$

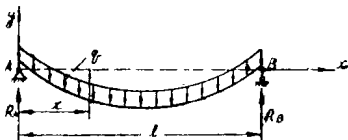


图5.8 例题5.6附图

$$\theta_D = + \frac{ql^3}{24EJ_z}$$

或写为 $|\theta|_{\max} = \frac{ql^3}{24EJ_z}$

在梁的中部, 即 $x = \frac{l}{2}$ 处, 挠度最大, 将 $x = \frac{l}{2}$ 代入式(d)得

$$y_{\text{中}} = - \frac{5ql^4}{384EJ_z}$$

或写为 $|y|_{\max} = \frac{5ql^4}{384EJ_z}$

通过本例的运算, 我们看到, 截面的挠度和转角, 都可以出现正负号。对于转角的正负号我们这样来理解: 如果 θ 为正值, 表示截面反时针方向转动; 如果 θ 为负值, 则表示截面顺时针方向转动。对于挠度的正负号, 我们这样来理解: 在所选取的直角坐标系中, 挠度 y 与纵坐标的方向一致为正值, 反之为负值。

例题5.7 求图5.9所示悬臂梁AB自由端的挠度及转角。梁在自由端受一集中力 P 作用, 跨度为 l 。

解 对于悬臂梁的情况, 不一定先要求出支座反力, 就可以直接写出 $M(x)$ 方程式。

(1) 写出 $M(x)$ 的方程式

选取图示的直角坐标系, 则 $M(x)$ 的代数方程式为

$$M(x) = -P(l-x) = -Pl + Px$$

(2) 把 $M(x)$ 方程式代入式(5.13)

$$EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -Pl + Px$$

一次积分得

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = -Plx + \frac{1}{2} Px^2 + C \quad (a)$$

二次积分得

$$EJ_z y = -\frac{Pl}{2} x^2 + \frac{1}{6} Px^3 + Cx + D \quad (b)$$

(3) 决定积分常数 C 和 D

在 $x=0$ 处, $\theta=0$, $y=0$ 。代入(a)式及(b)式可得 $C=0$, $D=0$ 。

(4) 求出任意截面的挠度和转角

把积分常数 C 和 D 代入(a)式及(b)式得

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{Plx}{2EJ_z} \left(2 - \frac{x}{l} \right)$$

$$y = -\frac{Plx^2}{6EJ_z} \left(3 - \frac{x}{l} \right)$$

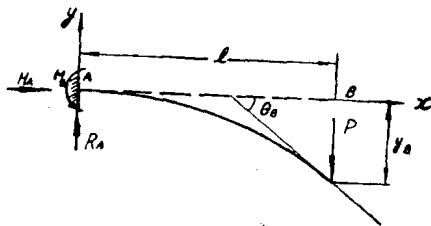


图5.9 例题5.7附图

(5) 求B端的挠度和转角

用 $x=l$ 代入上面两式, 得 B 端的转角和挠度

为

$$\theta_B = -\frac{Pl^2}{2EJ_z}$$

$$v_B = -\frac{Pl^3}{3EJ_z}$$

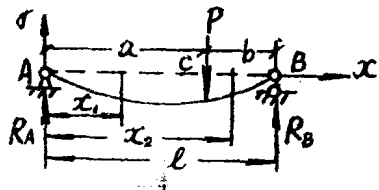


图5.10 例题5.8附图

例题5.8 图5.8示一简支梁, 受集中力 P 作用, 跨度为 l , 要求出其最大的挠度。

解 (1) 求支座反力

由平衡条件, 求出 $R_A = \frac{Pb}{l}$, $R_B = \frac{Pa}{l}$ 。

(2) 写出 $M(x)$ 方程式

取图示的直角坐标系

$$M(x)_1 = R_A x_1 = \frac{Pb}{l} x_1$$

$$M(x)_2 = R_A x_2 - P(x_2 - a) = \frac{Pb}{l} x_2 - P(x_2 - a)$$

(3) 将 $M(x)$ 代入弹性曲线微分方程式并积分

$$a \text{ 段} \quad EJ_z y_1'' = M(x)_1 = \frac{Pb}{l} x_1 \quad (a)$$

$$EJ_z y_1' = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x_1^2}{2} + C_1 \quad (b)$$

$$EJ_z y_1 = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x_1^3}{6} + C_1 x_1 + D_1 \quad (c)$$

$$b \text{ 段} \quad EJ_z y_2'' = M(x)_2 = \frac{Pb}{l} x_2 - P(x_2 - a) \quad (d)$$

$$EJ_z y_2' = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x_2^2}{2} - P \frac{(x_2 - a)^2}{2} + C_2 \quad (e)$$

$$EJ_z y_2 = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x_2^3}{6} - P \frac{(x_2 - a)^3}{6} + C_2 x_2 + D_2 \quad (f)$$

(4) 定积分常数

由上面积分看出, 分段积分后出现四个积分常数, 它们必须根据边界条件和连续条件确定

在 $x_1 = x_2 = a$ 处, $\theta_1 = \theta_2$, $y_1 = y_2$ 。

于是有 $EJ_z y_1' = EJ_z y_2'$

$$EJ_z y_1 = EJ_z y_2$$

根据这两个关系式, 并结合上面积分式(b)、(c)、(e)、(f)来考虑, 就得到

$$C_1 = C_2 \quad D_1 = D_2$$

在 $x_1 = 0$ 处, $y_1 = 0$, 代入(c)式得

$$D_1 = D_2 = 0$$

在 $x_2 = l$ 处, $y_2 = 0$, 代入(f)式得

$$C_2 = C_1 = -\frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2)$$

(5) 求出任意截面的挠度及转角

将上面求得的四个积分常数分别代入式(b)、(c)、(e)、(f)各式, 得

$$\theta_1 = y_1' = \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{Pb}{l} \cdot \frac{x_1^2}{2} - \frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2) \right] \quad (g)$$

$$y_1 = \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{Pbx_1^3}{6l} - \frac{Pbx_1}{6l}(l^2 - b^2) \right] \quad (h)$$

$$\theta_2 = y_2' = \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{Pb}{l} \cdot \frac{x_2^2}{2} - P \cdot \frac{(x_2 - a)^2}{2} - \frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2) \right] \quad (i)$$

$$y_2 = \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{Pbx_2^3}{6l} - P \cdot \frac{(x_2 - a)^3}{6} - \frac{Pbx_2}{6l}(l^2 - b^2) \right] \quad (j)$$

(6) 求出最大挠度

根据高等数学可知, 在 $\theta = \frac{dy}{dx} = 0$ 的截面, y 出现最大值(指绝对值)。但数学上的最大值, 与最大挠度又常常不是一回事。现在先来弄清楚这个截面在两段梁中的那一段。

在截面A, 即 $x_1 = 0$ 处,

$$\theta_1 = \theta_A = -\frac{Pbl}{6EJ_z} \left[1 - \frac{b^2}{l^2} \right] < 0$$

在截面C, 即 $x_1 = a$ 处,

$$\theta_1 = \theta_C = -\frac{Pb}{6lEJ_z} (3a^2 - l^2 + b^2) = -\frac{Pab}{3lEJ_z} (a - b)$$

若 $a > b$, 则在截面C处, $\theta_C > 0$ 。

由此可见: 自A至C, θ_1 改变符号, 即可以肯定, $\theta = 0$ 的截面在A与C之间, 也即挠度的最大值发生在梁的a段内。于是, 以 $x_1 = x$ 代入方程式(g), 并令其为零, 得

$$\frac{1}{EJ_z} \left[\frac{Pb}{l} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2) \right] = 0$$

故
$$x_1 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$$

即在 $x_1 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$ 处, 发生挠度的最大值。将此值代入(h)式有

$$|y|_{\max} = \frac{Pbl^2\sqrt{3}}{27EJ_z} \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right)^3}$$

若 P 作用在梁的中部, 即 $b = \frac{l}{2}$, 则

$$|y|_{\max} = \frac{Pl^3}{48EJ_z}$$

(二) 迭加法

由前面的几个例题可见, 构件的挠度和转角与构件上的荷载成线性关系。这是因为构件的材料服从虎克定律, 而且构件的变形很小, 其跨长的改变可以略去不计。在上述前提下, 当梁上同时受几个荷载作用时, 由每一个荷载所引起的梁的变形将不受其它荷载的影响。于是, 就可以按迭加原理来计算构件的变形, 即先分别计算每一荷载所引起的构件的变形 (挠度或转角), 然后求出诸变形的代数和, 即得在这些荷载共同作用下的变形。

为实用上的方便, 一些简单荷载作用下的弯曲变形, 已经预先计算完好, 并列于表5.2中, 可参考查用。

例题5.9 用迭加法求图5.11所示梁AB在A端处的转角和跨中的挠度。

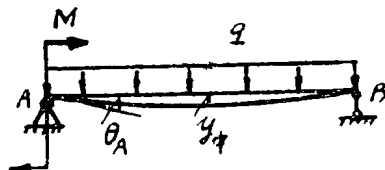


图5.11 例题5.9附图

解 查表5.2

在均布荷载 q 单独作用下, A端的转角为

$$\theta_{Aq} = -\frac{ql^3}{24EI_z}$$

在力偶 M 单独作用下A端的转角为

$$\theta_{AM} = -\frac{Ml}{3EI_z}$$

故此, A端转角的总量为

$$\theta_A = \theta_{Aq} + \theta_{AM} = -\frac{ql^3}{24EI_z} - \frac{Ml}{3EI_z}$$

用同样的方法查表 (5.2) 可得梁跨中的挠度为

$$y_{\text{中}} = -\frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI_z} - \frac{Ml^2}{16EI_z}$$

(三) 弯曲变形构件的刚度计算

为了保证机器能正常工作和保证工件的加工精度, 需要限制构件的弯曲变形在一定范围之内。因此刚度条件可写为

$$\begin{cases} f \leq [f] \\ \theta \leq [\theta] \end{cases} \quad (5.16)$$

上式中 f 和 θ 分别表示受弯曲构件挠度及转角的最大计算值; 而 $[f]$ 和 $[\theta]$ 分别表示挠度及转角的许可量, 并分别称为许用挠度及许用转角。

对于 $[f]$ 和 $[\theta]$, 要根据构件在机器中位置的重要性来确定, 一般由设计提出要求, 也可在有关手册查阅参考选用。

§ 5.5 压力机的刚度计算

1. 压力机的刚度及其对工作性能的影响

曲柄压力机的刚度是指压力机受荷载变形时, 封闭高度每增加单位长度的相当外荷载之