学生用书　丛书主编：李瑞坤　海南出版社

高考二轮复习

数学［理］

高考二轮复习

学生用书

丛书主编：李瑞坤

本册主编　易兰桂

副 主 编　李云皇

XUE HAI

学海导航

数学（理）

海南出版社

学海导航·高考二轮复习

学生用书·数　学（理科）

丛书主编　李瑞坤
本册主编　易兰桂
责任编辑　崔修彬

海南出版社　出版发行
海口市金盘开发区建设三横路2号
邮编：570216
湘潭市风帆印务有限公司印刷
各地新华书店经销
2005年12月第1版第2次印刷
开本：850×1168　1/16　　印张：112　　字数：300万
ISBN 7-5443-1451-0/G·520
全套定价：159.00元

前言

《学海导航·高考二轮复习·数学》为 2006 年高考第二轮复习专用。它与第一轮复习紧密衔接，根据教学实际，以专题归类的形式把高中数学主干知识的内容明晰化、条理化、概念化、规律化。关注高考重点、热点、难点，“讲”、“练”结合，使同学们能针对不足，逐点突破，对第一轮复习的薄弱部分进行补充，同时在训练中熟记考试内容，掌握应试技巧，提高综合素质和能力。

本书按高中内容的内在联系，将高考重点内容分为十五个热点专题。每一个专题包含**【高考热点聚焦】**、**【能力高层发展】**、**【常见失误点评】**、**【思维规律提炼】**、**【重点难点突破】**五个栏目。

【高考热点聚焦】 以 2005 年高考命题为着眼点，对近几年的高考试题在相关部分的题型、难易程度进行分析，归纳出本专题的热点、重点、难点，旨在帮助同学们从整体上把握本专题的主要考查内容，消除备考死角。

【能力高层发展】 是专题的核心部分。直接瞄准 2006 年高考，以考点的形式组织复习，以点带面。每个考点的重点先论述，接着是例题精析，包括“解”和“解题点拨”，尽量做到一题多法。“解”对问题给予规范的解答，培养学生对高考的适应能力和规范化、程序化的解题技能。“解题点拨”对各个问题的切入方法、突破技巧从数学思想和解题策略的高度给予启发式的指导，精语点悟，有助于学生形成正确的解题思路，把握解题技巧，快速提升解题能力。每个例题后均附有拓展练习题，这些练习题有的是例题的变式，有的是对例题的补充，目的在于开拓学生视野。本栏目旨在把握高考脉搏，对“怎样考”做到心中有数，切实帮助同学们提高数学应试能力。

【常见失误点评】 针对本专题学习与应试中易犯的错误加以归纳总结，并提出防范策略。

【思维规律提炼】 对本专题的知识规律、解题规律及在高考中的规律进行归纳总结，使学生能在整体上把握本专题的网络结构和解题规律。

【重点难点突破】 本栏目学生用书设计为活页试卷。这一部分把该专题的基本知识和能力编拟成难度适中的习题，题型经过精心设计，训练题的选择特别注重启发性、针对性、典型性和实战性，与例题一道形成相对完整的知识体系，使学生能及时有效地进行针对性训练，迅速提高解题技能和解题水平，力争最大限度提高应试能力。

二轮复习的精髓在于针对性强、态势高、信息灵、综合性好、应用性强，是继一轮复习的面面俱到之后的重点突出，是入木三分，绝不隔靴搔痒，是正确引导，积极强化，对热点、重点、难点问题探究性学习，实用性强。本书以新的教学理念为指导，吸收了许多同类复习资料的优点，备考理念新，考点扣得紧，试题容量大，前沿信息多，知识发掘深，思维方式活，模拟方式真，练习设计巧，训练有效度高，可操作性强，富有时代气息。应该是各校第二轮复习的首选用书。

本书由湖南省第一批示范性高级中学——长沙市雅礼中学多年从事高三教学工作的第一线教师易兰桂主编，由雅礼中学易兰桂、李云皇等高级教师精心编著。

虽然我们在编写过程中，本着近乎苛刻的态度，题题推敲，层层把关，但书中也难免有疏忽和纰漏之处，在此我们恳请广大读者和有关专家不吝指正。相信在你的共同努力下，本书能以其卓越的品质为广大考生的高考成功之路奠定坚实的基础。

编　者

2005 年 11 月

目录

热点专题1　函　　数

伟大的成绩和辛勤的劳动是成正比例的，有一份劳动就有一份收获。日积月累，从少到多，奇迹就可以创造出来。——鲁迅

高考热点聚焦

从近几年新高考试题看，函数问题的考查主要涉及以下几类：

(1)集合的基本概念和运算问题；

(2)命题的四种形式及充要条件的判定问题；

(3)与函数的性质(单调性、奇偶性、周期性、对称性、最值等)有关的问题；

(4)常考的重要函数(二次函数，指、对数函数，抽象函数等)有关的问题；

(5)含参数的函数的讨论问题；

(6)函数综合题和应用问题.

集合与简易逻辑是高考每年必考的知识点之一，其中对命题的判定及充要条件的考查力度较大，还经常以集合为工具考查集合语言和集合思想的运用，考题多为选择题和填空题.

函数是高中数学中极为重要的内容，其观点和方法贯穿高中数学的全过程，是高考考查的重中之重，近几年高考都对函数进行了重点考查，在选择题、填空题、解答题中都有函数试题，分值约占卷面总分的20%～25%，其特点：稳中求变，变中求新、求活，试题设计从传统的套用定义、简单地使用性质，发展到了挖掘本质、活用性质，出现了不少创设新情境、新定义的信息题，与实际密切联系的应用题，以及与其他知识综合交汇的能力题，重点考查考生缜密的逻辑推理能力、基本运算能力和综合解决问题的能力，考查等价转化、分类讨论、数形结合、待定系数法、配方法、换元法、构造法等数学思想方法.

能力高层发展

1. 集合、映射、函数的概念及充要条件的判断

解决此类问题时，要吃透集合、充要条件、函数的概念，熟练进行集合的交、并、补等运算，对充要条件要善于推理判断.

【例1】(1)已知集合 $M=\{x\mid x=\cos\frac{n}{3}\pi,n\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x\mid x=\sin\frac{(2m-3)\pi}{6},m\in\mathbf{Z}\}$，则 M 与 P 满足(B)

A. $M\subsetneqq P$　　B. $M=P$

C. $M\supsetneqq P$　　D. $M\cap P=\varnothing$

分析：考查集合间的关系和对集合的理解，比较分析及解决问题的能力. 可从理解 M 和 P 的意义入手，结合函数的周期性把问题转化.

解法1：M、P 分别表示函数 $x=\cos\frac{n}{3}\pi$，$x=\sin\frac{(2m-3)\pi}{6}$ 的值域，问题转化为判断两函数值域的关系，因为两函数的最小正周期为6，故取 $n,m=0,1,2,3,4,5$ 得：$M=\{1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\}$，$P=\{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\}$，$\therefore M=P$，故选B.

解法2：$\cos\frac{n\pi}{3}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{3})=\sin\frac{(3-2n)\pi}{6}$. 与 $\sin\frac{(2m-3)\pi}{6}$ 比较，易知 $3-2n$，$2m-3$，$m,n\in\mathbf{Z}$ 均表示奇数集，这样两函数的定义域和解析式(对应法则)相同，故值域必相同，即 $M=P$. 故选B.

点拨：解法1抓住两函数均为三角函数且周期均为6的特点，否则易造成思维不严密的错误；解法2中如果对解析式的化简结果认识不彻底，对集合的意义理解不到位，易错选D.

(2)函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in P\\ -x, & x\in M\end{cases}$，其中 P、M 为实数集 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集，又规定 $f(P)=\{y\mid y=f(x),x\in P\}$，

$f(M)=\{y|y=f(x),x\in M\}$,给出下列四个判断:

①若 $P\cap M=\varnothing$,则 $f(P)\cap f(M)=\varnothing$;②若 $P\cap M\neq\varnothing$,则 $f(P)\cap f(M)\neq\varnothing$;③若 $P\cup M=\mathbf{R}$,则 $f(P)\cup f(M)=\mathbf{R}$;④若 $P\cup M\neq\mathbf{R}$,则 $f(P)\cup f(M)\neq\mathbf{R}$.

其中正确判断有 (B)

A. 1个 B. 2个

C. 3个 D.4个

解:本题突出考查了对数学情境的阅读理解能力,对判断①,若 $P=(0,+\infty)$,$M=(-\infty,0)$,满足 $P\cap M=\varnothing$,但 $f(P)=(0,+\infty)$,$f(M)=(0,+\infty)$,因而 $f(P)\cap f(M)=\varnothing$ 不正确.对②,若 $P\cap M\neq\varnothing$,则 $P\cap M=\{0\}$,若 $P\cap M$ 中含有其它非0数,如1,则 $1\in P$,$1\in M$,$f(1)=1$,$f(1)=-1$,不符合函数值的唯一性,$\therefore f(P)\cap f(M)$ 中一定含有0,是非空的,故②正确.对③,若 $P=\{x|x\leqslant 0\}$,$M=\{x|x>0\}$,则 $P\cup M=\mathbf{R}$,$f(P)\cup f(M)=\{x|x\leqslant 0\}\neq\mathbf{R}$,故③错误.对④,若 $P\cup M\neq\mathbf{R}$,则一定存在一个数 $a\in P\cup M$,若 $a=0$,则 $0\notin f(P)\cup f(M)$,若 $a\neq 0$,则 $|a|$,$-|a|$ 中至少有一个不属于 $f(P)\cup f(M)$,$\therefore f(P)\cup f(M)\neq\mathbf{R}$,故④正确,答案为B.

点拨:首先需要正确理解分段函数及集合表示的这几个符号的含义,这是正确解决此题的前提,根据函数概念,若 $P\cap M\neq\varnothing$,则 $P\cap M=\{0\}$,这是解决②的关键,在否定一个命题时,要善于灵活地构造反例.

【拓展练习】

1.(1)设集合 $M=\{x|x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x|x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\}$,则 ( )

A. $M=N$ B. $M\subsetneqq N$

C. $M\supsetneqq N$ D. $M\cap N=\varnothing$

(2)已知向量集合 $M=\{\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=(1,2)+\lambda(3,4),\lambda\in\mathbf{R}\}$,$N=\{\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=(-2,-2)+\lambda(4,5),\lambda\in\mathbf{R}\}$,则 $M\cap N=$ ( )

A. $\{(1,1)\}$ B. $\{(1,1),(-2,-2)\}$

C. $\{(-2,-2)\}$ D. $\varnothing$

【例2】指出下列各组命题中,p 是 q 的什么条件?

(1)$p:a^2>b^2$;$q:a>b$

(2)$p:\{x|x>-2$ 或 $x<3\}$;$q:\{x|x^2-x-6<0\}$

(3)$p:a$ 与 b 都是奇数;$q:a+b$ 是偶数

(4)$p:0<m<\dfrac{1}{3}$;q:方程 $mx^2-2x+3=0$ 有两个同号且不相等的实根

解:(1)$\because a^2>b^2 \nRightarrow a>b$,如$(-3)^2>(-2)^2$,但$-3>-2$不成立,又 $a>b\nRightarrow a^2>b^2$,如$-2>-3$,但$(-2)^2>(-3)^2$ 不成立.

$\therefore p$ 是 q 的既不充分又不必要条件.

(2)$\because\{x|x>-2$ 或 $x<3\}=\mathbf{R}$,

$\{x|x^2-x-6<0\}=\{x|-2<x<3\}$

$\therefore p$ 是 q 的必要不充分条件.

(3)$\because a,b$ 都是奇数$\Rightarrow a+b$ 为偶数,而 $a+b$ 为偶数 $\nRightarrow a,b$ 都是奇数,比如 $2+4=6$,但2,4为偶数.

$\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件.

(4)若 $0<m<\dfrac{1}{3}$,则 $\Delta=4-12m>0$ 且 $x_1+x_2=\dfrac{2}{m}>0$,$x_1x_2=\dfrac{3}{m}>0$,故方程有两个同号且不相等的实数根.若方程 $mx^2-2x+3=0$ 有两个同号且不相等的实数根,则$\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta=4-12m>0\\ x_1x_2>0\end{cases}$,$\therefore 0<m<\dfrac{1}{3}$.

$\therefore p$ 是 q 的充要条件.

点拨:判断命题 p 是命题 q 的什么条件的基本做法是:①p 能否推出 q;②q 能否推出 p.当所给命题是否定形式的命题时,可利用互为逆否命题的两命题是等价命题转化为肯定形式的命题去判断.要否定一个命题时,只要举一个反例即可.

【拓展练习】

2.(1)命题 p:若 $a,b\in\mathbf{R}$,则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充分不必要条件.

命题 q:函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$,则 ( )

A. "p 或 q"为假 B. "p 且 q"为真

C. p 真 q 假 D. p 假 q 真

(2)若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,且 $f(0)=3$,$f(3)=-1$,设 $p=\{x||f(x+t)-1|<2\}$,$Q=\{x|f(x)<-1\}$,若"$x\in P$"是"$x\in Q$"的充分不必要条件,则实数 t 的取值范围是 ( )

A. $t\leqslant 0$ B. $t\geqslant 0$

C. $t\leqslant -3$ D. $t\geqslant -3$

【例3】已知集合 $A=\{x|x^2-x-6<0\}$,集合 $B=\{x|x^2+2x-8>0\}$,集合 $C=\{x|x^2-4ax+3a^2<0\}$,若 $C\supseteq(A\cap B)$,试确定实数 a 的取值范围.

解:$\because A=\{x|-2<x<3\}$,

$B=\{x|x<-4$ 或 $x>2\}$,

$\therefore A\cap B=\{x|2<x<3\}$.

又$\because C=\{x|x^2-4ax+3a^2<0\}$

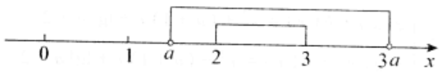
$=\{x|(x-a)(x-3a)<0\}$.

$\therefore$ 当 $a>0$ 时,$C=\{x|a<x<3a\}$;

当 $a<0$ 时，$C=\{x|3a<x<a\}$；

当 $a=0$ 时，$C=\varnothing$，此时 $C\supseteq(A\cap B)$ 不成立.

(1)当 $a>0$ 时，如图所示，



$C\supseteq(A\cap B)\Leftrightarrow\begin{cases}a\leqslant 2\\3a\geqslant 3\end{cases}\Leftrightarrow 1\leqslant a\leqslant 2$.

(2)当 $a<0$ 时，C 是负半轴上的一个区间，而 $A\cap B$ 是正半轴上一个区间，因此 $C\supseteq(A\cap B)$ 是不可能的.

综上所述：$1\leqslant a\leqslant 2$.

点拨：①求交集时，应首先识别集合的元素属性及范围，并化简集合，对于数集可借助于数轴，以形助数得出交集；

②讨论数轴上区间的覆盖时，要处理好端点的取舍，如本题条件 $C\supseteq(A\cap B)$，若判断为等价于 $\begin{cases}a<2\\3a>3\end{cases}$，就缩小了 a 的取值范围.

【拓展练习】

3.(1)已知 $f(x)=x^2$，集合 $A=\{x|f(x+1)=ax,x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cup\mathbf{R}^+=\mathbf{R}^+$，则实数 a 的取值范围是________.

(2)集合 $A=\{x|x>1\}$，$B=\{y|y=\lg\frac{2}{x+1},x\in A\}$，$C=\{y|y=\frac{m^2x-1}{mx+1},x\in A\}$. 若 $C\cap B=C$，求实数 m 的取值范围.

2. 函数的图象与性质

此类问题主要涉及常见函数的图象及图象的变换，函数的定义域、值域(极、最值)、奇偶性、单调性、周期性、对称性和反函数的概念和性质，常以选择题、填空题或中低档函数的综合解答题形式出现.

函数的图象是函数的直观体现，运用函数的图象研究函数的性质非常方便，解这类题要把图象和性质结合起来思考，注意双向交流对比.

【例 4】设 $k>1$，$f(x)=k(x-1)(x\in\mathbf{R})$，在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交于 A 点，它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象与 y 轴交于 B 点，并且这两个函数的图象交于 P 点，已知四边形 $OAPB$ 的面积为 3，则 k 等于　　(　　)

A. 3　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{6}{5}$

解：由 $\begin{cases}y=k(x-1)\\y=0\end{cases}$ 得 $x=1$，即 $A(1,0)$，因 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 关于 $y=x$ 对称. $\therefore B(0,1)$，由 $\begin{cases}y=k(x-1)\\y=x\end{cases}$，得 $x=y=\frac{k}{k-1}$，即 $P(\frac{k}{k-1},\frac{k}{k-1})$.

由题意，$S_{\triangle OAP}=S_{\triangle OBP}=\frac{1}{2}S_{四边形OAPB}$，

$\therefore\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{k}{k-1}=\frac{3}{2}$，解得 $k=\frac{3}{2}$，故选 B.

点拨：利用互为反函数的图象关于直线 $y=x$ 对称，可简捷地求出 B 点、P 点的坐标，且可得到 $S_{\triangle OAP}=S_{\triangle OBP}$，灵活地运用函数性质是迅速解决本题的关键，解题中亦可画图帮助直观思考.

【拓展练习】

4. 函数 $f(x)$ 的图象无论经过平移还是沿直线翻折后仍不能与 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象重合，则 $f(x)$ 是 (　　)

A. $y=2^{-x}$　　B. $y=2\log_4 x$

C. $y=\log_2(x+1)$　　D. $y=\frac{1}{2}\cdot 4^x$

【例 5】若奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，又 $f(-3)=0$，则 $\{x|x\cdot f(x)<0\}$ 等于　　(　　)

A. $\{x|x>3$ 或 $-3<x<0\}$

B. $\{x|0<x<3$ 或 $x<-3\}$

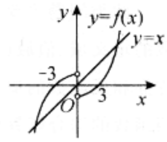
C. $\{x|x>3$ 或 $x<-3\}$

D. $\{x|0<x<3$ 或 $-3<x<0\}$

解法1:由 $f(x)$ 为奇函数且 $f(-3)=0$ 得 $f(3)=0$,

又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,

据上述条件作出满足题意的 $y=f(x)$ 草图和 $y=x$ 的图形(如图a所示).



图a

在图中找出 $f(x)$ 及 x 异号的部分,

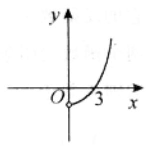
可以看出 $x\cdot f(x)<0$ 的解集为:$\{x|0<x<3$ 或 $-3<x<0\}$.

选D.

解法2:由 $f(-3)=0$ 得 $f(3)=0$,

又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,

$\therefore$ 作出 $y=f(x)(x>0)$ 的草图(如图b所示).



图b

$\because x,f(x)$ 均为**R**上的奇函数,

$\therefore x\cdot f(x)$ 为偶函数,

$\therefore$ 不等式 $x\cdot f(x)<0$ 的解集关于原点对称.

故先解 $\begin{cases}x>0,\\ f(x)<0,\end{cases}$ 借助图象得 $0<x<3$,

由对称性得 $x\cdot f(x)<0$ 的解集为:

$\{x|0<x<3$ 或 $-3<x<0\}$.

故选D.

解法3:借助图a或图b,取特殊值 $x=2$,知适合不等式 $x\cdot f(x)<0$,排除C;又 $x\cdot f(x)$ 为偶函数,解集关于原点对称又可排除A、B.故选D.

点拨:求解抽象函数不等式,往往先画出符合题意的草图,从图象变化规律、特殊点、定义域、值域、单调性、奇偶性、对称轴等各个角度来对图象进行分析,以寻求最佳解题方案.

【拓展练习】

5.已知函数 $y=f(x)\ (x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x+1)=f(x-1)$,且 $x\in[-1,1]$ 时,$f(x)=x^2$,则 $y=f(x)$ 与 $y=\log_5 x$ 的图象的交点个数为　(　　)

A. 3个　　B. 4个

C. 5个　　D. 6个

【例6】已知函数 $f(x)=x^2+(a+1)x+\lg|a+2|$ $(a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq-2)$

(1)若 $f(x)$ 能表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 之和,求 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的解析式;

(2)命题 p:函数 $f(x)$ 在区间 $[(a+1)^2,+\infty)$ 上是增函数;命题 q:函数 $g(x)$ 是减函数,如果命题 p 且 q 为假,p 或 q 为真,求 a 的取值范围.

解:(1)$\because f(x)=g(x)+h(x),g(-x)=-g(x),h(-x)=h(x)$

$\therefore f(-x)=-g(x)+h(x)$

$\therefore \begin{cases}g(x)+h(x)=x^2+(a+1)x+\lg|a+2|.\\ -g(x)+h(x)=x^2-(a+1)x+\lg|a+2|\end{cases}$

解得 $g(x)=(a+1)x,h(x)=x^2+\lg|a+2|$

(2)$\because$ 函数 $f(x)=(x+\frac{a+1}{2})^2-\frac{(a+1)^2}{4}+\lg|a+2|$ 在区间 $[(a+1)^2,+\infty)$ 上是增函数.

$\therefore (a+1)^2\geqslant-\frac{a+1}{2}$,

解得 $a\geqslant-1$ 或 $a\leqslant-\frac{3}{2}$ 且 $a\neq-2$.

又由函数 $g(x)=(a+1)x$ 是减函数,

$\therefore a+1<0$ 即 $a<-1$ 且 $a\neq-2$.

$\therefore$ 命题 p 为真的条件是 $a\geqslant-1$ 或 $a\leqslant-\frac{3}{2}$ 且 $a\neq-2$.

命题 q 为真的条件是 $a<-1$ 且 $a\neq-2$.

由题意知命题 p、q 有且仅有一个是真命题,

故 $a>-\frac{3}{2}$.

点拨:此题是函数、不等式与命题的综合题,涉及到一、二次函数的单调性,一元二次不等式的解法,集合的交、补集运算,复合命题的真假判断.

【拓展练习】

6.已知 $a>0,a\neq1$,设 p:函数 $y=\log_a(x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,q:曲线 $y=x^2+(2a-3)x+1$ 与 x 轴交于不同的两点.如果 p 且 q 为假命题,p 或 q 为真命题,求 a 的取值范围.

【例 7】已知函数 $f(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}{5}$，$g(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}}{5}$.

(1)证明 $f(x)$是奇函数，并求$f(x)$的单调区间；

(2)分别计算 $f(4)-5f(2)\cdot g(2)$和 $f(9)-5f(3)\cdot g(3)$的值.由此概括出涉及函数 $f(x)$和 $g(x)$的对所有不等于零的实数 x 都成立的一个等式，并加以证明.

解：(1)函数 $f(x)$的定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$关于原点对称.

$$\text{又 } f(-x)=\frac{(-x)^{\frac{1}{3}}-(-x)^{-\frac{1}{3}}}{5}=-\frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}{5}=-f(x).$$

$\therefore f(x)$是奇函数.

设 $x_1<x_2$，$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1^{\frac{1}{3}}-x_1^{-\frac{1}{3}}}{5}-\frac{x_2^{\frac{1}{3}}-x_2^{-\frac{1}{3}}}{5}=\frac{1}{5}(x_1^{\frac{1}{3}}-x_2^{\frac{1}{3}})(1+\frac{1}{x_1^{\frac{1}{3}}\cdot x_2^{\frac{1}{3}}})$$

$\because x_1^{\frac{1}{3}}-x_2^{\frac{1}{3}}<0,1+\dfrac{1}{x_1^{\frac{1}{3}}\cdot x_2^{\frac{1}{3}}}>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

又$\because f(x)$是奇函数，

$\therefore f(x)$在$(-\infty,0)$上也单调递增.

(2)计算，得：$f(4)-5f(2)g(2)=0$，

$f(9)-5f(3)g(3)=0$.

由此概括出对所有不等于零的实数 x，

有 $f(x^2)-5f(x)g(x)=0$.证明如下：

$$f(x^2)-5f(x)g(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}}{5}-5\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}{5}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}}{5}=\frac{1}{5}(x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}})-\frac{1}{5}(x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}})=0.$$

点拨：第(1)问中，证明奇函数和求单调区间均是用定义来解决的，求 $f(x)$的单调区间还可用求导的方法.

$f'(x)=\dfrac{1}{15}(x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{4}{3}})=\dfrac{1}{15}x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{-\frac{2}{3}})>0$

在定义域内恒成立.

$\therefore f(x)$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上均是增函数.

第(2)问就是运用了“计算、归纳、猜想、证明”的似真推理模式，有利于培养创新思维能力，它对我们研究问题很有帮助.

【拓展练习】

7.已知 $f(x)=\log_3\dfrac{x^2+ax+b}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，是否存在实数 a,b，使 $f(x)$同时满足以下两个条件：

①在$(0,1]$上是减函数，在$[1,+\infty)$上是增函数；

②$f(x)$的最小值是 1.

若存在，求出 a,b 的值；若不存在，说明理由.

3.常考重要函数

高考中常考的重要函数有：(1)二次函数；(2)指数函数；(3)对数函数.它们是高考命题的“生长点”，又是解决其他数学问题的有力工具，是函数思想和函数方法的具体体现.要彻底理解和掌握这四种重要函数，必须从图象和性质两个方面进行分析和研究，实现“数”与“形”的完整统一.

【例 8】对于函数 $f(x)$，若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $f(x_0)=x_0$ 成立，则称 x_0 为 $f(x)$的不动点.已知函数 $f(x)=ax^2+(b+1)x+(b-1)(a\neq0)$.

(1)当 $a=1,b=-2$ 时，求函数 $f(x)$的不动点；

(2)若对任意实数 b,函数 $f(x)$恒有两个相异的不动点,求 a 的取值范围;

(3)在(2)的条件下,若 $y=f(x)$图象上 A、B 两点的横坐标是函数$f(x)$的不动点,且 A、B 两点关于直线 $y=kx+\frac{1}{2a^2+1}$对称,求 b 的最小值.

解:(1)当 $a=1,b=-2$ 时,$f(x)=x^2-x-3$

由题意可知 $x=x^2-x-3$ 得 $x_1=-1,x_2=3$

故当 $a=1,b=-2$ 时,$f(x)$的两个不动点为 $-1,3$;

(2)$\because f(x)=ax^2+(b+1)x+(b-1)(a\neq 0)$恒有两个不动点,

$\therefore x=ax^2+(b+1)x+(b-1)$

即 $ax^2+bx+(b-1)=0$ 恒有两个相异的实数根,得 $\Delta=b^2-4ab+4a>0(b\in\mathbf{R})$恒成立

于是 $\Delta'=(4a)^2-16a<0$,解得 $0<a<1$.

故当 $b\in\mathbf{R}$,$f(x)$恒有两个相异的不动点时,a 的取值范围为 $0<a<1$;

(3)由题意,A、B 两点应在直线 $y=x$ 上,

设 $A(x_1,x_1)$、$B(x_2,x_2)$.

$\because$点 A、B 关于直线 $y=kx+\frac{1}{2a^2+1}$对称,

$\therefore k=-1$.

设 AB 的中点为 $M(x',y')$,

$\because x_1$、x_2 是方程 $ax^2+bx+(b-1)=0$ 的两个根,

$\therefore x'=y'=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$.

于是,由点 M 在直线 $y=-x+\frac{1}{2a^2+1}$上,

得 $-\frac{b}{2a}=\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a^2+1}$,

即 $b=-\frac{a}{2a^2+1}=-\frac{1}{2a+\frac{1}{a}}$.

$\because a>0,\therefore 2a+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{2}$,

当且仅当 $2a=\frac{1}{a}$,即 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}\in(0,1)$时取等号,

故 $b\geqslant-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$,

从而 b 的最小值为 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

【拓展练习】

8.已知函数$f(x)$和 $g(x)$的图象关于原点对称,且 $f(x)=x^2+2x$.

(1)求函数 $g(x)$的解析式;

(2)解不等式 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$;

(3)若 $h(x)=g(x)-\lambda f(x)+1$ 在$[-1,1]$上是增函数,求实数 λ 的取值范围.

【例 9】设 a 为实数,函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1$ $(x\in\mathbf{R})$

(1)讨论 $f(x)$的奇偶性;

(2)求 $f(x)$的最小值.

分析:此式有绝对值符号,必须通过讨论去掉绝对值,方能利用二次函数讨论其奇偶性.

解:(1)解法 1:常规思路利用定义,

$f(-x)=x^2+|x+a|+1$,

$-f(x)=-x^2-|x-a|-1$.

若 $f(x)$为奇函数,则 $f(-x)=-f(x)$,

即 $2x^2+|x+a|+|x-a|+2=0$,此等式对 $x\in\mathbf{R}$都不成立,故 $f(x)$不是奇函数;

若 $f(x)$为偶函数,则 $f(-x)=f(x)$,

即 $x^2+|x+a|+1=x^2+|x-a|+1$,

要使此等式对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,只能是 $a=0$,

故 $a=0$ 时,$f(x)$为偶函数,$a\neq 0$ 时,$f(x)$既不是奇函数也不是偶函数.

解法 2:从特殊考虑,

$\because f(0)=|a|+1$,又 $x\in\mathbf{R}$,

故 $f(x)$不可能是奇函数.

若 $a=0$,

则 $f(x)=f(-x)=x^2+|x|+1$,$f(x)$为偶函数;

若 $a\neq0$，

则 $f(a)=a^2+1,f(-a)=a^2+2|a|+1$，

知 $f(-a)\neq f(a)$，

故 $f(x)$ 在 $a\neq0$ 时，既不是奇函数又不是偶函数.

(2)①当 $x\leqslant a$ 时，

$f(x)=x^2-x+a+1=(x-\frac{1}{2})^2+a+\frac{3}{4}$，

由二次函数图象及其性质知：

若 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上单调递减，从而函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的最小值为 $f(a)=a^2+1$；

若 $a>\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的最小值为

$f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}+a$ 且 $f(\frac{1}{2})\leqslant f(a)$；

②当 $x\geqslant a$ 时，

函数 $f(x)=x^2+x-a+1=(x+\frac{1}{2})^2-a+\frac{3}{4}$.

若 $a\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的最小值为

$f(-\frac{1}{2})=\frac{3}{4}-a$ 且 $f(-\frac{1}{2})\leqslant f(a)$；

若 $a>-\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，从而函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的最小值为 $f(a)=a^2+1$.

综上所述：

当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值是 $\frac{3}{4}-a$；

当 $-\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 a^2+1；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 $a+\frac{3}{4}$.

点拨：①解决函数奇偶性问题要真正理解定义，注意考察函数的定义域以及 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 是否具有相等或相反的关系.含参数的函数的奇偶性判断要选择分类讨论标准，合理地讨论.

②若对函数奇偶性的概念清楚，性质明了于心，则从特殊考虑去解更为简捷具体.

【拓展练习】

9.已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a、b、c$ 均为实数)，且同时满足下列条件：① $f(-1)=0$；②对于任意的实数 x，都有 $f(x)-x\geqslant0$；③当 $x\in(0,2)$ 时，有 $f(x)\leqslant(\frac{x+1}{2})^2$.

(1)求 $f(1)$ 的值；

(2)求 $a、b、c$ 的值；

(3)当 $x\in[-1,1]$ 时，函数 $g(x)=f(x)-mx(m\in\mathbf{R})$ 是单调函数，求 m 的取值范围.

【例 10】已知函数 $f(x)=\log_b(x+\sqrt{x^2-2})$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$，其中 $b>0,b\neq1$，设 $g(n)=\frac{\sqrt{2}}{2}f^{-1}(n+\log_b\sqrt{2})$，若 $g(n)<\frac{3^n+3^{-n}}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，求 b 的取值范围.

解：由 $y=\log_b(x+\sqrt{x^2-2})$ 得：

$x+\sqrt{x^2-2}=b^y$　①

两边同乘 $x-\sqrt{x^2-2}$，

有 $x-\sqrt{x^2-2}=2b^{-y}$，　②

①②两式相加得：$x=\frac{b^y+2b^{-y}}{2}$，

再由 $x+\sqrt{x^2-2}>0$ 得 $x\geqslant\sqrt{2}$.

$\therefore x+\sqrt{x^2-2}\geqslant\sqrt{2}$.

故当 $b>1$ 时，$y\geqslant\log_b\sqrt{2}$；

当 $0<b<1$ 时，$y\leqslant\log_b\sqrt{2}$.

$\because n+\log_b\sqrt{2}\geqslant\log_b\sqrt{2},\therefore b>1$，

从而 $f^{-1}(x)=\frac{b^x+2b^{-x}}{2}(x\geqslant\log_b\sqrt{2})$，

而 $g(n)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{b^{n+\log_b\sqrt{2}}+2b^{-n-\log_b\sqrt{2}}}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}b^n+2b^{-n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{b^n+b^{-n}}{2}$，

$\therefore$ 由 $g(n)<\frac{3^n+3^{-n}}{2}$ 得：$b^n+b^{-n}<3^n+3^{-n}$，

即 $(b^n-3^n)[1-\frac{1}{(3b)^n}]<0$.

又 $\because (3b)^n>1, b>1$，

$\therefore 1<b^n<3^n$，

$\therefore 1<b<3$，这就是 b 的取值范围.

点拨：①本题关键是确定反函数的解析式及定义域，进行指数对数式的转化.要注意对字母 b 的分类讨论.

②指数运算是每年高考题中必考的基本技能，它常常与等比例数结合，考查指数运算.

【拓展练习】

10.已知函数 $f(x)=\log_a\frac{1-mx}{x-1}$ 是奇函数（$a>0$，$a\neq1$）.

(1)求出 m 的值；

(2)判断 $f(x)$在$(1,+\infty)$上的单调性并加以证明；

(3)当 $x\in(r,a-2)$时，$f(x)$的值域恰为$(1,+\infty)$，求 a,r.

4.抽象函数

抽象函数是指没有给出具体的函数解析式或图象，只给出一些函数符号及其满足的条件的函数.如函数的定义域、解析递推式，特定点的函数值，特定的运算性质等.它是高中函数部分的难点，也是大学高等数学函数部分的一个衔接点.由于抽象函数没有具体的解析表达式作为载体，因此理解研究起来比较困难.但由于此类试题既能考查函数的概念和性质，又能考查学生的思维能力，所以备受命题者的青睐.求解抽象函数的问题，我们可以利用"特殊模型法"、"函数性质法"、"特殊化方法"、"联想类比转化法"等多种方法.

(1)特殊模型法

高中数学，常见抽象函数模型所对应的具体函数模型归纳列表如下：

抽象函数 $y=f(x)$具有性质	具体初等函数模型
$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$	$f(x)=kx(k\neq0)$
$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ $f(x_1-x_2)=f(x_1)\div f(x_2)$	$f(x)=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)
$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ $f(\frac{x_1}{x_2})=f(x_1)-f(x_2)$	$f(x)=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)
$f(x_1)+f(x_2)=$ $2f(\frac{x_1+x_2}{2})\cdot f(\frac{x_1-x_2}{2})$	$f(x)=\cos x$

(2)函数性质法

函数的特征是通过其性质（如奇偶性、单调性、周期性、特殊点等）反应出来的，抽象函数也是如此.只有充分挖掘和利用题设条件和隐含的性质，灵活进行等价转化，抽象函数问题才能峰回路转，化难为易，常用的解题方法有①利用奇偶性整体思考；②利用单调性等价转化；③利用周期性回归已知；④利用对称性数形结合；⑤借助特殊点，布列方程(组)等.

(3)特殊化方法

①在求函数解析式或研究函数性质时，一般用"代换"的方法，将 x 换成 $-x$ 或将 x 换成$\frac{1}{x}$等；

②在求函数值时，可用特殊值(如 0 或 1 或 -1)"代入"；

③研究抽象函数的具体模型，用具体模型解选择题、填空题，或由具体模型函数对综合题的解答提供思路和方法.

总之，抽象函数问题求解，用常规方法一般很难凑效，但我们如果能通过对题目的信息分析与研究，采用特殊的方法和手段求解，往往会收到事半功倍的功效.

【例 11】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒有 $f(x+y)-f(x-y)=2f(x)f(y)$且 $f(0)\neq0$.

(1)求证：$f(0)=1$；

(2)判断 $f(x)$的奇偶性；

(3)若存在非零数 c，使 $f(\frac{c}{2})=0$，

①证明对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+c)=-f(x)$成立；

②函数 $f(x)$是不是周期函数？为什么？

解：(1)证明：令 $x=y=0$，则 $x+y=x-y=0$，
$\therefore 2f(0)=2f(0)f(0)$ 即 $f(0)[f(0)-1]=0$，
$\because f(0)\neq 0$，$\therefore f(0)=1$.

(2)令 $x=0$，则 $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)$，
$\because f(0)=1$，$\therefore f(-y)=f(y)$，$\therefore f(x)$是偶函数.

(3)①证明：用 $x+\frac{c}{2}$ 代换 x，$\frac{c}{2}$ 代换 y 得：

$f(x+c)+f(x)=2f(x+\frac{c}{2})f(\frac{c}{2})$

$\because f(\frac{c}{2})=0$，$\therefore f(x+c)=-f(x)$

②由①知 $f(x+c)=-f(x)$，

$\therefore f(x+2c)=f[(x+c)+c]=-f(x+c)$
$=-[-f(x)]=f(x)$，

$\therefore f(x)$是周期函数，且 $2c$ 是它的一个周期.

点拨：抽象函数常见处理策略是代换法，证明函数的奇偶性、周期性都必须紧扣定义.

【拓展练习】

11.已知函数 $f(x)$是定义在$[-1,1]$上的奇函数，且 $f(1)=1$，若 $m、n\in[-1,1]$，$m+n\neq 0$，$\frac{f(m)+f(n)}{m+n}>0$.

(1)证明：$f(x)$在$[-1,1]$上是增函数；

(2)解不等式 $f(x+\frac{1}{2})<f(\frac{1}{x-1})$；

(3)若 $f(x)\leqslant t^2-2at+1$ 对所有 $x\in[-1,1]$且 $a\in[-1,1]$恒成立，求实数 t 的范围.

【例 12】设函数 $y=f(x)$定义在 **R** 上，对于任意实数 m,n，恒有 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$. 且当 $x>0$ 时，$0<f(x)<1$.

(1)求证：$f(0)=1$. 且当 $x<0$ 时，$f(x)>1$；

(2)求证：$f(x)$在 **R** 上递减；

(3)设集合 $A=\{(x,y)|f(x^2)\cdot f(y^2)>f(1)\}$，$B=\{(x,y)|f(ax-y+2)=1,a\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的取值范围.

分析：第(1)问我们可采取特殊值法，第(2)问采用作差或作商的方法讨论单调性；第(3)问可以根据其几何意义利用代数的方法加以解决.

解：(1)证明：$\because f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$，
令 $m=1,n=0$，得 $f(1)=f(1)\cdot f(0)$，
又 $\because 0<f(1)<1$，$\therefore f(0)=1$. 设 $x<0$，则 $-x>0$，
令 $m=x,n=-x$，代入 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$ 有：

$f(0)=f(x)\cdot f(-x)$，而 $f(0)=1$，$0<f(-x)<1$，

$\therefore f(x)=\frac{1}{f(-x)}>1$.

(2)证法 1：设 $x_1<x_2$，
则 $x_2-x_1>0$，由题意可得 $0<f(x_2-x_1)<1$，

$$\begin{aligned}\therefore f(x_2)-f(x_1)&=f[(x_2-x_1)+x_1]-f(x_1)\\&=f(x_2-x_1)\cdot f(x_1)-f(x_1)\\&=f(x_1)[f(x_2-x_1)-1].\end{aligned}$$

由已知与(1)可知，$f(x_1)>0$，$f(x_2-x_1)-1<0$，
$\therefore f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_2)<f(x_1)$，
$\therefore f(x)$为 **R** 上的减函数.

证法 2：设 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，
由题意可得 $0<f(x_2-x_1)<1$.
令 $m=x_1$，$m+n=x_2$，
即 $n=x_2-x_1$，代入 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$，得：

$f(x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2-x_1)$，即 $0<\frac{f(x_2)}{f(x_1)}<1$，

$\therefore f(x_2)<f(x_1)$，$\therefore f(x)$在 **R** 上是减函数.

(3)解法 1：由 $f(x^2)\cdot f(y^2)>1$，
有 $f(x^2+y^2)>f(1)$.
又 $\because$ 由(2)知 $f(x)$为 **R** 上的减函数，
$\therefore x^2+y^2<1$，
$\therefore$点(x,y)表示圆 $x^2+y^2=1$ 的内部一点，即集合 A 中的元素均为圆 $x^2+y^2=1$ 的内部的点.
由 $f(ax-y+2)=1$，得 $ax-y+2=0$，
$\therefore$点集 B 表示直线 $ax-y+2=0$.
$\because A\cap B=\varnothing$，
$\therefore$直线 $ax-y+2=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相离或相切.

∴ $\frac{2}{\sqrt{a^2+1}}\geqslant 1$，即 $a^2+1\leqslant 4$，

∴ $-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$

解法2：由 $\begin{cases}x^2+y^2<1\\ ax-y+2=0\end{cases}$ 消去 y，得：

$(a^2+1)x^2+4ax+3<0$，

∵ $A\cap B=\varnothing$，∴ $\Delta=(4a)^2-4(a^2+1)\cdot 3\leqslant 0$，

∴ $a^2-3\leqslant 0$，∴ $-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$.

点拨：本题考查了利用函数、集合的概念解决问题的综合能力；在利用恒成立条件：$f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$ 时要灵活地取特殊值，以有利于解决问题；解决第(3)问关键是采取数形结合，化难为易.

【拓展练习】

12. 定义在 $(-1,1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足：

①对任意 $x,y\in(-1,1)$ 都有

$f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1+xy})$；

②当 $x\in(-1,0)$ 时有 $f(x)>0$.

(1)判断 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

(2)判断 $f(x)$ 的单调性，并说明理由；

(3)求证：$f(\frac{1}{5})+f(\frac{1}{11})+\cdots+f(\frac{1}{n^2+3n+1})>f(\frac{1}{2})$.

▶ 5. 函数的实际应用

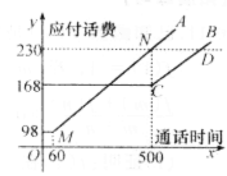
函数的应用是一类重要题型，是近年高考的一个热点.由于数学来源于人类的社会实践，又服务于人类的社会实践，所以要培养自己“学数学，用数学”的意识和能力.应用题的文字较多，解题时常有畏难情绪，因此必须心平气和地去读题，一遍不行，再读一遍，把已知什么、要求什么理出一个头绪，从而建立它们之间的关系.题中常有若干变量，而变量与变量又存在某种相依关系，从中选定自变量，注出其变化范围，建立函数关系式（建模），然后根据要求求解.

【例13】电信局为了配合客户不同需要，设有 A、B 两种方案.这两种方案应付话费（元）与通话时间（分钟）之间的关系如下图所示（$MN\parallel CD$）.

(1)若通话时间为2小时，按方案 A，B 各付话费多少元？

(2)方案 B 从500分钟以后，每分钟收费多少元？

(3)通话时间在什么范围内方案 B 才会比方案 A 优惠？



解：由图知，$M(60,98)$，$C(500,168)$，$N(500,230)$.

∵ $MN\parallel CD$，

设这两方案的应付话费与通话时间的函数关系式分别为 $f_A(x)$、$f_B(x)$，

则 $f_A(x)=\begin{cases}98, & 0\leqslant x\leqslant 60,\\ \frac{3}{10}x+80, & x>60,\end{cases}$

$f_B(x)=\begin{cases}168, & 0\leqslant x\leqslant 500,\\ \frac{3}{10}x+18, & x>500.\end{cases}$

(1)通话两小时的费用分别是116元和168元.

(2) $f_B(x+1)-f_B(x)=0.3(x>500)$，或由直线 CD 的斜率的实际意义知方案 B 从500分钟以后每分钟收费0.3元.

(3)由图知：当 $0\leqslant x\leqslant 60$ 时，$f_A(x)<f_B(x)$；当 $x>500$ 时，$f_A(x)>f_B(x)$；当 $60<x\leqslant 500$ 时，由 $f_A(x)>f_B(x)$ 得 $500\geqslant x>\frac{880}{3}$.综合可得通话时间在 $(\frac{880}{3},+\infty)$ 时方案 B 较优惠.

点拨：《考试大纲》中尽管强调了能够运用指数函数和对数函数的性质解决某些简单的实际问题，但在实际命题时，很少命制指数函数和对数函数模型的应用题，多以一次函数、二次函数、分段函数为模型来命制试题，特别是分段函数模型的应用题往往是高考对应用题考查的重点.

【拓展练习】

13. 某旅游点有 50 辆自行车供游客租赁使用，管理这些自行车的费用是每日 115 元．根据经验，若每辆自行车的日租金不超过 6 元，则自行车可以全部租出；若超过 6 元，则每超过 1 元，租不出去的自行车就增加 3 辆．为了便于结算，每辆自行车的日租金 x(元)只取整数，并且要求出租自行车一日总收入必须高于这一日的管理费用，用 y(元)表示出租自行车的日净收入(即一日中出租自行车的总收入减去管理费后的所得)．

(1)求函数 $y=f(x)$的解析式及其定义域；

(2)试问当每辆自行车的日租金定为多少元时，才能使一日的净收入最多？

(必要时可参考以下数据：$28^2=784$，$29^2=841$)．

【例 14】用水清洗一堆蔬菜上残留的农药，对用一定量的水清洗一次的效果作如下假定：用 1 个单位量的水可洗掉蔬菜上残留农药量的 $\frac{1}{2}$，用水越多洗掉的农药量也越多，但总还有农药残留在蔬菜上，设用 x 单位量的水清洗一次以后，蔬菜上残留的农药量与本次清洗前残留的农药量之比为函数 $f(x)$．

(1)试规定 $f(0)$的值，并解释其实际意义；

(2)试根据假定写出函数 $f(x)$应该满足的条件和具有的性质；

(3)设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，现有 $a(a>0)$单位量的水，可以清洗一次，也可以把水平均分成 2 份后清洗两次，试问哪种方案清洗后蔬菜上残留的农药量比较少？说明理由．

分析：(1) $f(0)=1$ 表示没有水洗时，蔬菜上的农药量将保持原样；(2)由假设易知：函数 $f(x)$应满足的条件和具有的性质：$f(0)=1$，$f(1)=\frac{1}{2}$，由“水越多，残留的药量越少”知：在$[0,+\infty)$上函数 $f(x)$单调递减，且 $0<f(x)\leqslant 1$；(3)根据题意分别算出将清洗一次和分两次清洗后残留的农药量 f_1 和 f_2，然后作差 $f_1-f_2=\frac{a^2(a^2-8)}{(1+a^2)(4+a^2)^2}$，讨论 a 的值．

解：(1) $f(0)=1$ 表示没有用水清洗时，蔬菜上的农药量将保持原样；

(2)函数 $f(x)$应满足的条件和具有的性质是：

$f(0)=1$，$f(1)=\frac{1}{2}$，在$[0,+\infty)$上 $f(x)$单调递减，且 $0<f(x)\leqslant 1$．

(3)设仅清洗一次，残留的农药量为 $f_1=\frac{1}{1+a^2}$；将 a 单位量的水平分成两次清洗后，残留的农药量为 $f_2=\left[\frac{1}{1+(\frac{a}{2})^2}\right]^2=\frac{16}{(4+a^2)^2}$，

则 $f_1-f_2=\frac{1}{1+a^2}-\frac{16}{(4+a^2)^2}=\frac{a^2(a^2-8)}{(1+a^2)(4+a^2)^2}$．

①当 $a>2\sqrt{2}$时，$f_1>f_2$；

②当 $a=2\sqrt{2}$时，$f_1=f_2$；

③当 $0<a<2\sqrt{2}$时，$f_1<f_2$．

因此，当 $a>2\sqrt{2}$时，分两次清洗后残留的农药量较少；

当 $a=2\sqrt{2}$时，两种清洗方法具有相同的效果；

当 $0<a<2\sqrt{2}$时，只洗一次残留的农药量较少．

点拨:本题主要考查运用函数知识解决实际问题的能力,考查分析问题的能力和数学思维能力.充分体现了数学建模思想,在解题思维中蕴含着分类讨论思想以及灵活应用比较法.

【拓展练习】

14.某化妆品生产企业为了占有更多的市场份额,拟在2006年度进行一系列的促销活动.经过市场调查和测算,化妆品的年销量 x 万件与年促销费用 t 万元之间满足:$3-x$ 与 $t+1$ 成反比例.如果不搞促销活动,化妆品的年销量只能是1万件,已知2006年生产化妆品的固定投资为3万元,每生产1万件化妆品需再投资32万元,当将每件化妆品的零售价定为"年平均成本的150%"与"年平均每件所占促销费的一半"之和,则当年的产销量相等.

(1)将2006年的年利润 y 万元表示为促销费 t 万元的函数;

(2)该企业2006年的促销费投入多少万元时,企业的年利润最大?(注:利润 = 收入 - 生产成本 - 促销费)

6.函数的综合问题

近年高考试题中以函数为主干的综合题主要有函数与方程问题,函数与不等式问题,函数与向量、导数问题,函数与数列问题,函数与解几问题,函数与立几问题等,有时还出现函数与多学科知识的综合应用,此类型是高考的重点考查内容,经常出现在压轴题位置上.

解函数综合题首先要仔细审题,弄清题意,其次是把握问题的主要部分,抽象问题的实质,展开广泛的联系,再是要运用转化和化归等数学思想,将生疏的、复杂的、抽象的问题转化为熟悉的、简单的、具体的问题去解决.

【例15】设 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1-ax}{x-1}$ 为奇函数,a 为常数.

(1)求 a 的值;

(2)证明 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内单调递增;

(3)若对于区间 $[3,4]$ 上的每一个 x 的值,不等式 $f(x)>\left(\frac{1}{2}\right)^x+m$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

解:(1)$\because f(x)$ 是奇函数,$\therefore f(-x)=-f(x)$,

即:$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1+ax}{-x-1}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x-1}{1-ax}$

$\therefore \frac{1+ax}{-1-x}=\frac{x-1}{1-ax}$,

化简得:$(a^2-1)x^2=0$,$\therefore a^2-1=0$,$a=\pm1$,

经检验 $a=-1$ 时,$f(x)$ 是奇函数,

$\therefore a=-1$.

(2)证明:由(1)得,$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{x-1}$,

设 $1<x_1<x_2$,

则 $\frac{x_1+1}{x_1-1}-\frac{x_2+1}{x_2-1}=\frac{2(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}>0$,

$\therefore \frac{x_1+1}{x_1-1}>\frac{x_2+1}{x_2-1}>0$,从而 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x_1+1}{x_1-1}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{x_2+1}{x_2-1}$,

即 $f(x_1)<f(x_2)$,

$\therefore f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递增.

(3)原不等式可化为 $f(x)-(\frac{1}{2})^x>m$,

令 $\varphi(x)=f(x)-(\frac{1}{2})^x$,

则 $\varphi(x)>m$ 对于区间 $[3,4]$ 上的每一个 x 都成立等价于 $\varphi(x)$ 在 $[3,4]$ 上的最小值大于 m.

$\because \varphi(x)$ 在 $[3,4]$ 上为增函数,

$\therefore$ 当 $x=3$ 时,$\varphi(x)$ 取得最小值,

$\log_{\frac{1}{2}}2-(\frac{1}{2})^3=-\frac{9}{8}$,

$\therefore m<-\frac{9}{8}$.

点拨:恒成立的条件下求参数的范围,常常采取把参