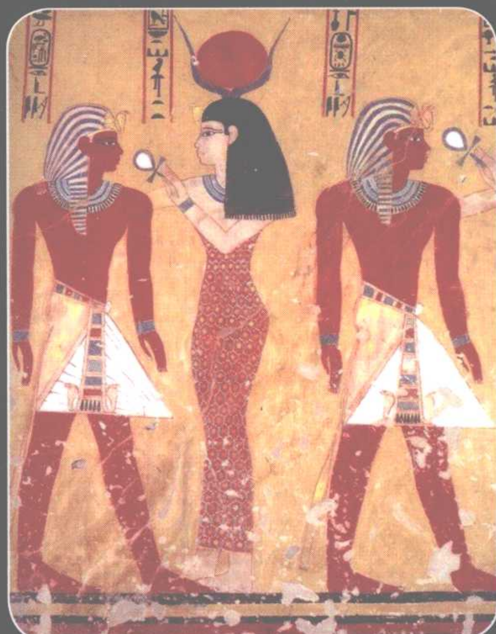
21世纪高等学校计算机规划教材
21st Century University Planned Textbooks of Computer Science

离散数学（第2版）

Discrete Mathematics (2nd Edition)

李盘林 赵铭伟 徐喜荣 李丽双 编著

- 概念严谨精炼
- 叙述简明清晰
- 推理详尽严格



名家系列

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

21世纪高等学校计算机规划教材

21st Century University Planned Textbooks of Computer Science

离散数学（第2版）

Discrete Mathematics

李盘林 赵铭伟 徐喜荣 李丽双 编著

名家系列

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（C I P）数据

离散数学／李盘林等编著．—2版．—北京：人民邮电出版社，2009.4

21世纪高等学校计算机规划教材

ISBN 978-7-115-19525-8

I．离… II．李… III．离散数学－高等学校－教材

IV．O158

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第024121号

内 容 提 要

本书共12章，内容包括命题逻辑、谓词逻辑、集合、关系、函数、代数结构的概念及性质、半群与群、环和域、格与布尔代数、图的概念与表示、几类重要的图以及数论。

全书编写力求通俗、简明、扼要。各章都配有典型例题和大量的习题，便于读者理解与掌握内容。

本书可作为高等学校计算机及相关专业的教材，也可供相关技术人员学习参考。

21世纪高等学校计算机规划教材

离散数学（第2版）

◆ 编　著　李盘林　赵铭伟　徐喜荣　李丽双

责任编辑　刘　博

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街14号

邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn

网址　http://www.ptpress.com.cn

三河市海波印务有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16

印张：16.25

字数：425千字　　2009年4月第2版

印数：10 001 – 13 000册　　2009年4月河北第1次印刷

ISBN 978-7-115-19525-8/TP

定价：28.00元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223

反盗版热线：(010)67171154

出版者的话

计算机科学与技术日新月异的发展,对我国高校计算机人才的培养提出了更高的要求。许多高校主动研究和调整学科内部结构、人才培养目标，提高学科水平和教学质量，精炼教学内容，拓宽专业基础，优化课程结构，改进教学方法，逐步形成了“基础课程精深，专业课程宽新”的良性格局。作为大学计算机教材建设的生力军，人民邮电出版社始终坚持服务高校教学、致力教育资源建设的出版理念，在总结前期教材建设的成功经验的同时，深入调研和分析课程体系，并充分结合我国高校计算机教育现状和改革成果，推出“推介名师好书，共享教育资源”的教材建设项目，出版了“21 世纪高等学校计算机规划教材”名家系列。

本套教材的突出特点如下：

（1）作者权威　本套教材的作者均为国内计算机学科中的学术泰斗或高校教学一线的教学名师，他们有着深厚的科研功底和丰富的教学经验。可以说，这套教材汇聚了众师之精华，充分显示了这套教材的格调和品位。无论是刚入杏坛的年轻教师，还是象牙塔内的莘莘学子，细细品读其中的章节文字，定会受益匪浅。

（2）定位准确　本套教材是为普通高等院校的学生量身定做的精品教材。具体体现在：一是本套教材的作者长期从事一线科研和教学工作，对高校教学有着深刻而独到的见解；二是本套教材在选题策划阶段便多次召开调研会，对普通高校的教学需求和教材建设情况进行充分摸底，从而保证教材在内容组织和结构安排上更加贴近实际教学；三是组织有关作者到较为典型的普通高等院校讲授课程教学方法，深入了解教师的教学需求，充分把握学生的理解能力，以教材内容引导授课教师严格按照科学方法实施教学。

（3）教材内容与时俱进　本套教材在充分吸收国内外最新计算机教学理念和教育体系的同时，更加注重基础理论、基本知识和基本技能的培养，集思想性、科学性、启发性、先进性和适应性于一身。

（4）一纲多本，合理配套　根据不同的教学法，同一门课程可以有多本不同的教材，教材内容各具特色，实现教材系列资源配套。

总之，本套教材中的每一本精品教材都切实体现了各位教学名师的教学水平，充分折射出名师的教学思想，淋漓尽致地表达着名师的教学风格。我们相信，这套教材的出版发行一定能够启发年轻教师们真正领悟教学精髓，教会学生科学地掌握计算机专业的基本理论和知识，并通过实践深化对理论的理解，学以致用。

我们相信，这套教材的策划和出版，无论在形式上还是在内容上都能够显著地提高我国高校计算机专业教材的整体水平，为培养符合时代发展要求的具有较强国际竞争力的高素质创新型计算机人才，为我国普通高等教育的计算机教材建设工作做出新的贡献。欢迎各位老师和读者给我们的工作提出宝贵意见。

人民邮电出版社

第 2 版前言

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机科学与技术的理论基础。因此，它是计算机科学与技术专业的核心、骨干课程。一方面，它给后继课，如数据结构、编译系统、操作系统、数据库原理和人工智能等，提供必要的数学基础；另一方面，通过学习离散数学，可以培养和提高学生的抽象思维和逻辑推理能力，为其今后继续学习和工作，进行科学研究，攀登科技高峰，打下扎实的数学基础。

本书第 1 版于 2002 年 2 月出版以来，先后多次印刷发行，已得到了普遍认可，被全国部分普通高等学校选作教材，本版除了勘误第 1 版中的不妥之处外，还增加了一些新的章节，并相应补充了例题和习题，以适应高等学校教学改革的需要。

本书共 12 章，内容包括命题逻辑、谓词逻辑、集合、关系、函数、代数结构的概念及性质、半群与群、环和域、格与布尔代数、图的概念与表示、几类重要的图以及数论。

本书是笔者结合多年教学实践与科学研究，参考国内外教材，在力求通俗易懂、简明扼要的指导思想下编写而成的。在编写过程中有如下 3 点考虑。

1. 力求做到“少而精”，注意突出重点，论证详细明了，便于自学，在定理证明中多次运用归纳法，希望读者熟练掌握这一方法。

2. 在加强基本理论教学的同时，注意了分析问题、解决问题的技能培养和训练。书中各知识点均配有典型例子，并加以说明。此外，各章都配有适量的习题，希望通过做习题这个环节，来培养、提高学生解决问题的能力。

3. 一方面每章各有独立性，教师根据需要可以单独选讲几章；另一方面，尽可能注意各章之间的联系，规范并统一了符号和术语。

本书在编写过程中，得到了有关领导、老师和同学的热情关心、支持和帮助，在此一并表示感谢。

限于作者水平，书中难免有不当和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

于大连理工大学

2008 年 9 月

目　录

第 1 章 命题逻辑

命题逻辑，也称命题演算，记为 L_S。它与谓词逻辑构成数理逻辑的基础，而命题逻辑又是谓词逻辑的基础。数理逻辑，又名为符号逻辑，它是选用数学方法即通过引入没有二义性的表意符号，使用公认的与任一特定的论证无关的规则研究推理的学问。

命题逻辑是研究由命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系。那么，什么是命题？如何表示和构成？如何进行推理的？下面逐一地进行讨论。

1.1 命题与联结词

1. 命题的概念

所谓命题，是指具有非真必假的陈述句。而疑问句、祈使句和感叹句等因都不能判断其真假，故都不是命题。命题仅有两种可能的真值：真和假，且二者只能居其一。真用 1 或 T 表示，假用 0 或 F 表示。由于命题只有两种真值，所以称这种逻辑为二值逻辑。命题的真值是具有客观性质的，而不是由人的主观决定的。

【例 1.1.1】 判断下列语句哪些是命题。

① 6 是整数。

② 地球是方的。

③ 3+5=8。

④ 金星的表面温度是 800°F。

⑤ 请勿吸烟！

⑥ 你去书店吗？

⑦ 今天天气真好！

⑧ 本命题是假的。

解 显然，①~④都是命题，①和③的真值为真，②真值是假，而④目前尚不知真和假，但随着科技的发展，其真值是可以确定的。⑤~⑦都不是命题。因为它们不是陈述句，而分别是祈使句、疑问句和感叹句。⑧无法确定它的真值，当它假时，它便真；当它真时，它便假。这种断言叫悖论。

2. 命题分类与表示

命题分为两类，第一类是原子命题，它是由再也不能分解成更为简单的语句构成的命题，称为原子命题。原子命题是命题逻辑的基本单位，用大写英文字母 P，Q，R…及其带下标 P_i，Q_i，

R_i…表示。例如，用 P 表示大连是一座美丽的城市，记为 P：大连是一座美丽的城市。冒号“:”代表表示的意思，下同。上面那些表示命题的英文字母，称为命题标识符。

第二类是复合命题，它由原子命题、命题联结词和圆括号组成。什么是命题联结词？下面就来定义 5 个常用命题联结词。

3. 命题联结词

【定义 1.1.1】 设 P 表示一个命题，由命题联结词$\neg$和命题 P 连接成$\neg P$，称$\neg P$为 P 的否定式复合命题，$\neg P$ 读“非 P”。称$\neg$为否定联结词。$\neg P$ 是真当且仅当 P 为假；否定联结词“$\neg$”的定义可由表 1.1.1 表示之。

表 1.1.1　　$\neg$的定义

P	$\neg P$
1	0
0	1

【例 1.1.2】 举例说明如何构成命题的否定。

解　令命题

P：大连是一座美丽的城市。

于是命题的否定为

$\neg P$：大连不是一座美丽的城市。

可见，“否定”修改了命题，它是对单个命题进行操作，称它为一元联结词。

【定义 1.1.2】 设 P 和 Q 为两个命题，由命题联结词$\wedge$将 P 和 Q 连接成 $P\wedge Q$，称 $P\wedge Q$ 为命题 P 和 Q 的合取式复合命题，$P\wedge Q$ 读做“P 与 Q”，或“P 且 Q”，称$\wedge$为合取联结词。

当且仅当 P 和 Q 的真值同为真，命题 $P\wedge Q$ 的真值才为真；否则，$P\wedge Q$ 的真值为假。合取联结词$\wedge$的定义由表 1.1.2 表示之。

表 1.1.2　　$\wedge$的定义

P	Q	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

【例 1.1.3】 用合取联结词表示命题：我们踢足球，他们在游泳。

解　令 P：我们踢足球

　　Q：他们在游泳

本例可表成：$P\wedge Q$。

在日常生活中，常将“合取”表示具有某种关系的两个命题；但在命题逻辑中则不尽然，允许用于两个相互无关的原子命题。例如，可用原子命题“P：今天天晴”和“Q：三加三等于六”，构成复合命题 $P\wedge Q$，其意义是

今天天晴且三加三等于六。

这在日常生活中会认为有语病，而在逻辑学中是允许的。

【定义 1.1.3】 设 P 和 Q 为两个命题，由命题联结词$\vee$把 P 和 Q 连接成 $P\vee Q$，称 $P\vee Q$ 为命题 P 和 Q 的析取式复合命题，$P\vee Q$ 读做“P 或 Q”。称$\vee$为析取联结词。

当且仅当 P 和 Q 的真值同为假，$P \vee Q$ 的真值为假；否则，$P \vee Q$ 的真值为真。析取联结词 $\vee$ 的定义由表 1.1.3 表示之。

表 1.1.3 $\vee$ 的定义

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

由定义可知，析取联结词表示“可兼和”，“不可兼和”另有其他联结词定义之。

【例 1.1.4】 用析取联结词表示命题：灯泡有故障或开关有故障。

解 令 P：灯泡有故障

Q：开关有故障

本例可表成：$P \vee Q$。这里是说，或者灯泡有故障，或者开关有故障，或者二者都有故障，显然是“可兼和”。

与合取联结词一样，使用析取联结词时，也不要求两命题间一定有任何关系，有关例子就不再给出了。

【定义 1.1.4】 设 P、Q 为两个命题，由命题联结词→把 P 和 Q 连接成 $P \to Q$，称 $P \to Q$ 为命题 P 和 Q 的条件式复合命题，简称条件命题。$P \to Q$ 读做“P 条件 Q”或者“若 P 则 Q”。称→为条件联结词。

当 P 的真值为真而 Q 的真值为假时，命题 $P \to Q$ 的真值为假；否则，$P \to Q$ 的真值为真。条件联结词→的定义由表 1.1.4 表示之。

表 1.1.4 →的定义

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

在条件命题 $P \to Q$ 中，命题 P 称为 $P \to Q$ 的前件或前提，命 Q 称为 $P \to Q$ 的后件或结论。条件命题 $P \to Q$ 有多种方式陈述：

“如果 P，那么 Q”，“P 仅当 Q”，“Q 每当 P”，“P 是 Q 的充分条件”，“Q 是 P 的必要条件”，“只要 P，就 Q”，“只有 Q，才 P”，“除非 Q，才 P”，“除非 Q，否则非 P”等。

【例 1.1.5】 用条件联结词表示下列命题并求它们的真值。

① 如果他是大学生，那么他会一门外语。

② 如果雪是黑色的，那么三乘三等于九。

③ 世界之大，无奇不有。

解 令 P：他是大学生，Q：他会一门外语，R：雪是黑色的，S：三乘三等于九，G：世界之大，H：无奇不有。

① 可表成：$P \to Q$，真值为真。

② 可表成：$R \to S$，真值为真。

③ 可表成：$G \to H$，真值为真。

在日常生活中，用条件式表示前提和结论之间的因果或实质关系，如例 1.1.5 中的①和③，这种条件式称为形式条件命题。然而在命题逻辑中，一个条件式的前提并不要求与结论有任何关系，这种条件式称为实质条件命题，如例 1.1.5 中的②，雪是黑色的与三乘三等于九之间没有因果和实质关系存在，但条件式 $R \rightarrow S$ 是真，因为前提是假而结论是真。采用实质条件式作定义，不单是出于“善意推断”，主要是因为前提与结论间有无因果和实质关系难以区分，而且实质条件式已包含了形式条件式，更便于应用。需要顺便指出的是，若将③理解为“如果世界之大，则无奇不有，并且只有世界之大，才无奇不有”，则③应表成$(G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$。

【定义 1.1.5】 令 P、Q 是两个命题，由命题联结词$\leftrightarrow$把 P 和 Q 连接成 $P \leftrightarrow Q$，称 $P \leftrightarrow Q$ 为命题 P 和 Q 的双条件式复合命题，简称双条件命题，$P \leftrightarrow Q$ 读做“P 当且仅当 Q”，或“P 等价 Q”。称$\leftrightarrow$为双条件联结词。

当 P 和 Q 的真值相同时，$P \leftrightarrow Q$ 的真值为真；否则，$P \leftrightarrow Q$ 的真值为假。双条件联结词$\leftrightarrow$的定义由表 1.1.5 表示之。

表 1.1.5　　　　$\leftrightarrow$的定义

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

【例 1.1.6】 用双条件联结词表示下列命题并求其真值。

① 三角形是等腰三角形当且仅当三角形两底角相等。

② 骗子讲真理当且仅当太阳从西方升起。

③ 2 是素数，当且仅当 π 是有理数。

解 令 P：三角形是等腰三角形，Q：三角形两底角相等，R：骗子讲真理，S：太阳从西方升起，G：2 是素数，H：π 是有理数。

① 可表成：$P \leftrightarrow Q$，真值是真。

② 可表成：$R \leftrightarrow S$，真值是真。

③ 可表成：$G \leftrightarrow H$，真值是假。

4. 命题符号化

把一个用文字叙述的命题相应地表成由命题标识符、联结词和圆括号的形式，称为命题的符号化。符号化应该注意下列事项：

① 确定给定句子是否为命题。

② 句子中连词是否为命题联结词。

③ 要正确地表示原子命题和适当选择命题联结词。

【例 1.1.7】 张明正在睡觉或游泳。

解 此例可改叙为“张明在睡觉而没游泳，或者张明在游泳而没睡觉。”可知其中的“或者”是可兼或，因此可用析取式复合命题表示。

令 P：张明在睡觉，Q：张明在游泳，则该例符号化为$(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$。

【例 1.1.8】 符号化下列命题。

① 他既聪明又用功。

② 他虽聪明但不用功。

③ 除非你努力，否则你将失败。

④ 除非天气好，我才骑自行车上班。

⑤ 小王晚上要回家，除非下大雨。

⑥ 只有睡觉才能恢复疲劳。

⑦ 只要我还有口气，我就要战斗。

⑧ A 中没有元素，A 就是空集。

⑨ 张明或者李强都可以做这件事情。

⑩ 张明和李强都做这件事了。

⑪ 张明和李强亲如兄弟。

解 ①符号化为 $P\wedge Q$，其中，P：他聪明，Q：他用功。②符号化为 $P\wedge\urcorner Q$，其中 P 和 Q 同①。③符号化为$\urcorner Q\rightarrow P$，其中，P：你努力，Q：你将失败。④符号化为 $Q\rightarrow P$，其中 P：天气好，Q：我骑自行车上班。⑤符号化为$\urcorner Q\rightarrow P$，其中，P：小王晚上要回家，Q：下大雨。⑥符号化为 $Q\rightarrow P$，其中 P:睡觉，Q：恢复疲劳。⑦符号化为 $P\rightarrow Q$，其中 P：我还有口气，Q：我要战斗。⑧符号化为 $P\leftrightarrow Q$，其中 P：A 中没有元素，Q：A 是空集。⑨符号化为 $P\vee Q$，其中，P：张明可以做这件事，Q：李强可以做这件事。⑩符号化为 $P\wedge Q$，其中 P,Q 同⑨。⑪符号化为 P，其中 P：张明和李强亲如兄弟。

命题符号化是很重要的，一定要掌握好，在命题推理中最先遇到的常常就是符号化这个问题，解决不好，等于说推理的首要前提没有了。

在本节结束时，应强调指出的是：复合命题的真值只取决于各原子命题的真值，而与它们的内容、含义无关，与原子命题之间是否有关系无关。理解和掌握这一点是至关重要的，请读者认真去领会。

1.2 合式公式及分类

由于合式公式重要涉及命题变元，因此先来讨论什么是命题变元。

1. 命题变元

在命题逻辑中，命题又有命题常元和命题变元之分。如果 P 代表一个确定的具体的命题，称 P 为命题常元；若 P 代表一个不确定的泛指的任意命题，称 P 为命题变元。显然，命题变元 P 不是命题，只有用一个特定的命题或一个真值取代 P 才能成为命题。这时也说对 P 指派或解释，记为 $I(P)$。由于在命题逻辑中并不关心具体命题的涵义，只关心其真值。因此，可以形式地定义它们如下。

【定义 1.2.1】 以真、假为其变域的变元，称为命题变元；真值，以及一个确定的具体命题称为命题常元。

2. 合式公式

通常把含有命题变元的断言称为命题公式。但这没能指出命题公式的结构，因为不是所有由命题变无、联结词和括号所组成字符串都能成为命题公式。为此常使用归纳定义命题公式，以便构成的公式有规则可循，由这种定义产生的公式称为合式公式。

【定义 1.2.2】 单个命题变元和命题常元称为原子命题公式，简称原子公式。

【定义 1.2.3】 合式公式是由下列规则生成的公式：

① 单个原子公式是合式公式。

② 若 A 是一个合式公式，则（$\neg A$）也是一个合式公式。

③ 若 A、B 是合式公式，则（$A\wedge B$）、（$A\vee B$）、（$A\to B$）和（$A\leftrightarrow B$）都是合式公式。

④ 只有有限次使用①、②和③生成的公式才是合式公式。

合式公式中的命题标识符、联结词和左右括号的数目，称为合式公式的长度。请注意，这里 A，B 等表示任意合式公式，而不是某个具体的公式，称它们为元语言符号；对于诸如 $P\wedge Q$, $(P\to Q)\vee R$ 等称为目标语言符号或对象语言符号。

【例 1.2.1】 说明（$P\to(Q\vee R)$）是合式公式。

解

（1）Q 是合式公式	根据规则①
（2）R 是合式公式	根据规则①
（3）（$Q\vee R$）是合式公式	根据（1）、（2）和规则③
（4）（$Q\to(Q\vee R)$）是合式公式	根据（1）、（3）和规则③

显然那些不能由定义中指出的规则生成的字符串，均不是合式公式，如下列字符串：

① $\neg P\wedge Q$

② $P\to(\wedge Q)$

③ $(P\to Q$

当合式公式比较复杂时，常常使用很多圆括号，为了减少圆括号的使用量，可作以下约定。

① 规定联结词的优先级由高到低的次序为：

$$\neg、\wedge、\vee、\to、\leftrightarrow$$

② 相同的联结词按从左至右次序计算时，圆括号可省略。

③ 最外层的圆括号可以省略。

例如，$(\neg((P\wedge Q)\vee(\neg R))\to((P\vee Q)\vee R))$

可写成

$$\neg(P\wedge Q\vee\neg R)\to P\vee Q\vee R$$

有时为了看起来清楚醒目，也常常保留某些原可省去的圆括号。

为了方便，合式公式也简称公式。

3. 公式真值表

对于含有命题变元的公式 A，因它不能确定其真假，故该公式不是命题。但对公式中 A 出现的每一个命题变元指派一真值，称该组真值为公式的一个指派或解释，记为 $I(A)$。于每个指派，公式确定一个真值。若公式确定真值为真，称该指派为成真指派；否则，称为成假指派。对于所有的指派及相应的公式真值即组成了该公式的真值表。下面正式给出公式真值表的定义。

【定义 1.2.4】 对于公式中命题变元的每一种可能的真值指派，以及由它们确定出的公式真值所列成的表，称为该公式的真值表。

由本定义可知，在先前命题联结词定义中所给出的各表，都是真值表，即相应地也称为各命题联结词真值表。

【定义 1.2.5】 如果 B 是公式 A 中的一部分，且 B 为公式，则称 B 是公式 A 的子公式。

例如，设 A 为$(P\to Q)\wedge\neg R$，则$\neg R$，$P\to Q$ 等都是 A 的子公式。

下面用例子说明公式真值表的构造方法。

【例 1.2.2】 构造公式 $P\to(Q\wedge\neg P)$的真值表。

解 该公式含有两个命题变元 P 和 Q，它们一共有 4 种指派，分别为：00、01、10、11。对

此 4 种指派，依据联结词的定义及其优先级和括号，逐步求出各子公式直至给定公式的真值。详见下表。

P	Q	$P \to (Q \wedge \neg P)$
0	0	0　1　0　0　1
0	1	0　1　1　1　1
1	0	1　0　0　0　0
1	1	1　0　1　0　0
步	骤	④ ⑤ ② ③ ①

其中①、②、③和④是求各子公式真值的次序，⑤为给定公式的真值。

用归纳法不难证明，对于含有 n 个命题变元的公式，有 2^n 个真值指派，即在该公式的真值表中有 2^n 行。

为方便构造真值表，特约定如下：

① 命题变元按字典序排列。

② 对每个指派，以二进制数从小到大或从大到小顺序列出。

③ 若公式较复杂，可先列出各子公式的真值（若有括号，则应从里层向外层展开），最后列出所求公式的真值。

4. 公式分类

【定义 1.2.6】 设 A 为任一公式

① 对应每一个指派，公式 A 均相应确定真值为真，称 A 为重言式，或永真式。

② 对应每一个指派，公式 A 均相应确定真值为假，称 A 为矛盾式，或永假式。

③ 至少存在一个指派，公式 A 相应确定真值为真，称 A 为可满足式。

由定义可知，重言式必是可满足式，反之一般不真。

重点将研究重言式，它最有用，因为它有以下特点。

① 重言式的否定是矛盾式，矛盾式的否定是重言式，这样只研究其一就可以了。

② 两重言式的合取式、析取式、条件式和双条件式等都仍是重言式。于是，由简单的重言式可构造出复杂的重言式。

③ 由重言式使用公认的规则可以产生许多有用等价式和蕴涵式。

判定给定公式是否为永真式，永假式或可满足式的问题，称为给定公式的判定问题。

在 L_S 中，由于任何一个命题公式的指派数目总是有限的，所以 L_S 的判定问题是可解的。其判定方法有真值表法和公式推演法。

【例 1.2.3】 用真值表判定公式 $\neg(\neg P \to Q) \wedge P$ 是永真式，永假式还是可满足式。

解

P	Q	$\neg(\neg P \to Q) \wedge P$
0	0	1　1　0　0
0	1	0　1　1　0
1	0	0　0　1　0
1	1	0　0　1　0
步	骤	③ ① ② ④

可见，$\neg(\neg P \to Q) \wedge P$ 为永假式。

可以指出，当给定公式中命题变元较多时，或公式本身较为复杂时，用真值表法解决公式判定问题是很麻烦的，然而它总是可行的。

在公式间，尽管它们结构形式不同，然而它们的真值表可能完全相同，可参见下例。

【例 1.2.4】 列出公式 $P\rightarrow Q$ 与 $\neg P\vee Q$ 的真值表。

解

P	Q	$P\rightarrow Q$	$\neg P\vee Q$
0	0	1	1 1
0	1	1	1 1
1	0	0	0 0
1	1	1	0 1
步	骤	①	①②

可知，两公式的真值表是相同的。

1.3 等价式与等价演算

1. 等价式

从例 1.2.4 可知，的确有一些公式，它们的真值表是相同的，也就是说，同一个真值表可能会代表许多公式。这样，又可以按真值表是否相同来对公式进行分类。同一类中的公式之间，它们彼此是等价的。下面正式给出两个公式是等价的定义。

【定义 1.3.1】 设 A 和 B 是两个命题公式，如果 A、B 在其任意指派下，其真值都是相同的，则称 A 和 B 是等价的，或逻辑相等，记作 $A\Leftrightarrow B$，读作 A 等价 B，称 $A\Leftrightarrow B$ 为等价式。

显然，若公式 A 和 B 的真值表是相同的，则 A 和 B 等价。因此，验证两公式是否等价，只需做出它们的真值表即可。

【例 1.3.1】 证明 $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$。

证明 列出真值表如下：

P	Q	$P\leftrightarrow Q$	$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$
0	0	1	1 1 1
0	1	0	1 0 0
1	0	0	0 0 1
1	1	1	1 1 1
步	骤	①	① ② ①

可见，$P\leftrightarrow Q$ 和 $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$ 真值表相同，得证。

读者也不难验证下列等价式：

① $P\Leftrightarrow\neg\neg P$ ② $P\vee P\Leftrightarrow P$ ③ $(P\vee\neg P)\wedge Q\Leftrightarrow Q$ ④ $P\vee\neg P\Leftrightarrow Q\vee\neg Q$

由此可见，两公式等价，不一定是含相同的命题变元。

如果公式 A，B 含有不同命题变元，对于不出现 A 或 B 中那些命题变元，称为 A 或 B 的哑元。对 A 或 B 指派后的取值与哑元的变化无关。因此在讨论 A 与 B 是否相同的真值表时，只需考虑 A 与 B 中共同含有的命题变元。

现在继续本节开始的讨论，对于含有 n 个命题变元的命题公式，按真值表是否相同去分类，能够划分多少类命题公式？显然，对于给定的问题，只要能够确定构成多少个不同的真值表即可。因为对于含有 n 个命题变元的命题公式，可有 2^n 种指派，或者说可做成的真值表会有 2^n 行，而对于每一个指派或者说对于每一行，命题公式都取得真值或者真或者假的两种可能，所以，n 个命题变元的命题公式共可以构成 2^{2^n} 个不同的真值表，即是说，含有 n 个命题变元的命题公式一共可以划分为 2^{2^n} 类的命题公式。例如，当 n=1 时，可构成 2^{2^1}=4 个不同的真值表；当 n=2 时，可构成 2^{2^2}=16 个不同的真值表。

在这里，请读者注意$\leftrightarrow$和$\Leftrightarrow$的区别与联系。

区别：$\leftrightarrow$是逻辑联结词，属于目标语言中的符号，它出现在命题公式中；$\Leftrightarrow$不是逻辑联结词，属于元语言中的符号，表示两个命题公式的一种关系，不属于这两个公式的任何一个公式中的符号。

联系：可用下面定理表明之。

【定理 1.3.1】 $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 是永真式。

有时也称 $A \Leftrightarrow B$ 是永真双条件式。

等价式有下列性质。

① 自反性，即对任意公式 A，有 $A \Leftrightarrow A$。

② 对称性，即对任意公式 A 和 B，若 $A \Leftrightarrow B$，则 $B \Leftrightarrow A$。

③ 传递性，即对任意公式 A、B 和 C，若 $A \Leftrightarrow B$、$B \Leftrightarrow C$，则 $A \Leftrightarrow C$。

2. 基本等价式——命题定律

判定公式间是否等价，有一些简单而又经常使用的等价式，称为基本等价式或称命题定律。牢固地记住它并能熟练运用，是学好数理逻辑的关键之一，读者应该注意到这一点。现将这些命题定律列出如下。

① 双否定：$\neg\neg A \Leftrightarrow A$。

② 交换律：$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$，$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$，$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$。

③ 结合律：$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$，$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$，$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \Leftrightarrow A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$。

④ 分配律：$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$，$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$。

⑤ 德·摩根律：$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$，$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$。

⑥ 等幂律：$A \wedge A \Leftrightarrow A$，$A \vee A \Leftrightarrow A$。

⑦ 同一律：$A \wedge T \Leftrightarrow A$，$A \vee F \Leftrightarrow A$。

⑧ 零　律：$A \wedge F \Leftrightarrow F$，$A \vee T \Leftrightarrow T$。

⑨ 吸收律：$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$，$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$。

⑩ 互补律：$A \wedge \neg A \Leftrightarrow F$，（矛盾律）

$A \vee \neg A \Leftrightarrow T$。（排中律）

⑪ 条件式转化律：$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$，$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$。

⑫ 双条件式转化律：$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

$\neg A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow B)$

⑬ 输出律：$(A \wedge B) \to C \Leftrightarrow A \to (B \to C)$。

⑭ 归谬律：$(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$。

上面这些定律，即是通常所说的布尔代数或逻辑代数的重要组成部分，它们的正确性利用对 A，B 和 C 的指派真值是不难给出证明的。

3. 代入规则和替换规则

在定义合成公式时，已看到了逻辑联结词能够从已知公式形成新的公式，从这个意义上可把逻辑联结词看成运算。除逻辑联结词外，还要介绍“代入”和“替换”，它们也有从已知公式得到新的公式的作用，因此有人也将它们看成运算，这不无道理，而且在今后讨论中，它的作用也是不容忽视的。

（1）代入规则

【定理 1.3.2】 在一个永真式 A 中，任何一个原子命题变元 R 出现的每一处，用另一个公式代入，所得公式 B 仍是永真式。本定理称为代入规则。

证明 因为永真式对任意指派，其值都是真，与所给的某个命题变元指派的真值是真还是假无关，因此，用一个命题公式代入到原子命题变元 R 出现的每一处后，所得命题公式的真值仍为真，证毕。

【例 1.3.2】 求证：$(P\to Q)\vee\neg(P\to Q)$为永真式。

证明 由排中律可知，$R\vee\neg R\Leftrightarrow T$，即 $R\vee\neg R$ 为永真式。今用公式$(P\to Q)$代入前面公式中的命题变元 R，则得$(P\to Q)\vee\neg(P\to Q)$。根据代入规则可知，给定公式是永真式。

注意，若仅仅反映$(P\to Q)$代入到一个析取项 R，得到$(P\to Q)\vee\neg R$，显然它不是永真式，因为这不符合代入规则所要求的处处代入。

（2）替换规则

【定理 1.3.3】 设 A_1 是合式公式 A 的子公式，若 $A_1\Leftrightarrow B_1$，并且将 A 中的 A_1 用 B_1 替换所得到公式 B，则 $A\Leftrightarrow B$。称该定理为替换规则。

证明 因为 $A_1\Leftrightarrow B_1$，即对于它们的命题变元做任何真值的指派，A_1 与 B_1 的真值相同，故以 B_1 替换 A_1 后，公式 B 与 A 在对其命题变无做相应的任何真值指派，它们的真值亦相同，因此，$A\Leftrightarrow B$ 成立。

【例 1.3.3】 证明 $Q\to(P\vee(P\wedge Q))\Leftrightarrow Q\to P$。

证明 因为 $Q\to P\Leftrightarrow Q\to P$，又由吸收律知，$P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$，根据替换规则可得，$Q\to(P\vee(P\wedge Q))\Leftrightarrow Q\to P$。

满足定理 1.3.3 条件的替换，称为等价替换。

利用命题定律、定理 1.3.2 和定理 1.3.3，可以推演出一些更为复杂的等价式。这种从已知合式公式等价地推出一些公式，称为等价演算。从已知合式公式，经等价演算得到的长度最小的合式公式，称它为极简式。

【例 1.3.4】 证明 $P\to(Q\to R)\Leftrightarrow Q\to(P\to R)\Leftrightarrow\neg R\to(Q\to\neg P)$。

证明 $P\to(Q\to R)\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg Q\vee R)$ 两次替换

$\Leftrightarrow\neg Q\vee(\neg P\vee R)$ 结合、交换、结合

$\Leftrightarrow Q\to(P\to R)$ 两次替换

类似可证 $P\to(Q\to R)\Leftrightarrow\neg R\to(Q\to\neg P)$。

从定理及例题可看到，代入和替换有如下两点区别。

① 代入是对原子命题变元而言的，而替换可对命题公式实行。

② 代入必须是处处代入，替换则可部分替换，亦可全部替换。

等价演算作用有如下 3 点。

① 判定命题公式的类型，如例 1.3.2。

② 验证两个命题公式是否等价，如例 1.3.3。

③ 用来解决一些实际问题。举例如下。