

ANSYS

基础及其在工程上的应用

许光明 编著



NEUPRESS
东北大学出版社

ANSYS 基础及其在工程上的应用

许光明 编著

江苏工业学院图书馆
藏书章

东北大学出版社

© 许光明 2002

图书在版编目 (CIP) 数据

ANSYS 基础及其在工程上的应用 / 许光明编著. — 沈阳 : 东北大学出版社, 2002.11
ISBN 7-81054-820-4

I. A… II. 许… III. 有限元分析—应用程序, ANSYS IV. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 088564 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress.com

http: // www. neupress. com

印 刷 者: 东北大学印刷厂

发 行 者: 东北大学出版社

幅面尺寸: 170mm × 228mm

印 张: 21.5

字 数: 550 千字

出版时间: 2002 年 11 月第 1 版

印刷时间: 2002 年 11 月第 1 次印刷

责任编辑: 张德喜

封面设计: 唐敏智

责任出版: 杨华宁

定 价: 38.00 元

前 言

ANSYS 软件是目前应用最广的有限元软件之一，连续多年被评为世界上最优秀的分析软件。目前 ANSYS 用户遍布世界各国，该软件从 20 世纪 90 年代末开始引入我国，目前在国内的用户多达 5000 余家，遍及机械制造、航空航天、汽车、铁道、石油化工、能源等行业。为各领域的产品设计、科学研究作出了贡献。

目前有许多高等院校开设了此门课程，但该软件的中文资料少，更缺乏有系统的资料，从而使学生对此软件的学习感到无从下手。

本书简要介绍了 ANSYS 软件的有限单元法基础；全面系统地阐述了 ANSYS 软件的基础及其应用，内容由浅而深，逐渐深入。全书共分 13 章：第 1 章简述了 ANSYS 软件的应用及其有限元基础；第 2 章全面介绍了 ANSYS 软件的基础即软件的启动、建模、单元选择、材料特性、网格划分和高级建模等技术的菜单操作过程；第 3 章和第 4 章分别讲述了 ANSYS 线性和非线性结构分析及其应用；第 5 章介绍了 ANSYS/LS-DYNA 分析及其在工程上的应用；第 6 章至第 9 章分别叙述了动力学分析、热分析、电磁分析和流体分析的步骤和应用；第 10 章讲述了耦合场分析和应用；第 11 章讲述的是单元的生死及其如何应用；第 12 章介绍了优化设计和拓扑优化分析过程；第 13 章讲述了 APDL 语言，即如何使用命令流的方式来保存分析过程，如何用命令的方法来加载和分析各种问题，以及如何开发某过程的分析专用程序和保密、解密的设置。

本书以 ANSYS5.7 为基准，书中每章都列举有例子，同时，为配合读者的学习，还编写了一定数量的习题，并附有简单的答案供参考。

本书的特点在于：一旦你拥有此书，不用培训便可成为工程分析专家。本书可作为理工科高等院校高年级本科生、研究生及教师学习使用 ANSYS 软件的教材和参考书，也可用作其他工程技术人员使用 ANSYS 的参考书。

编写中参考了国内外出版的一些书籍，特向文献作者致谢。在本书的编写和出版过程中，得到了我的导师崔建忠教授在物质和精神上的大力支持，特此向我的恩师崔建忠教授深表谢意。

由于作者水平所限，加之时间仓促，缺点和错误在所难免，恳请读者不吝赐教。

编 者

2002 年 9 月于沈阳

目 录

前 言

第 1 章 ANSYS 概述及有限元基础	1
1.1 ANSYS 软件概述	1
1.2 有限单元法基础	3
1.3 场问题的有限单元法	8
第 2 章 ANSYS 基础	13
2.1 ANSYS 图形用户界面(GUI)	13
2.2 ANSYS 文件及工作文件名	18
2.3 创建 2D 有限元模型	20
2.4 加载、求解结果后处理	29
2.5 高级建模技术	35
2.6 自适应网格划分	51
第 3 章 ANSYS 结构静力分析	55
3.1 静力分析介绍	55
3.2 线性静力分析	65
3.3 线性静力分析实例	69
第 4 章 非线性结构分析	77
4.1 非线性结构分析概述	77
4.2 非线性分析中常用的基本概念	77
4.3 后处理	79
4.4 非线性分析的基本过程	82
4.5 几何非线性	85
4.6 材料非线性	94
4.7 状态非线性	101
第 5 章 LS-DYNA 分析	111
5.1 DYNA 分析简介	111

5.2	DYNA 分析中的单元	111
5.3	PART 的概念	116
5.4	定义材料	117
5.5	DYNA 分析中的边界条件、载荷与刚体	123
5.6	接触界面	129
5.7	求解控制	136
5.8	后处理	139
5.9	DYNA 分析的基本步骤	141
第 6 章	动力学分析	151
6.1	模态分析	151
6.2	谐响应分析	158
6.3	瞬态动力学分析	165
第 7 章	ANSYS 热分析	175
7.1	ANSYS 热分析简介	175
7.2	稳态热分析	175
7.3	瞬态热分析	181
7.4	表面效应单元	187
7.5	热辐射分析	189
7.6	热应力分析	194
第 8 章	电磁场分析	199
8.1	电磁场分析简介	199
8.2	2D 静态磁场分析	199
8.3	2D 交流磁场分析	206
8.4	2D 瞬态磁场分析	216
8.5	3D 静态磁场分析(基于单元边的方法)	220
8.6	3D 谐静波磁场分析	224
8.7	3D 瞬态磁场分析	229
第 9 章	FLOTRAN 分析	234
9.1	FLOTRAN 计算流体动力学分析概述	234
9.2	FLOTRAN 分析的单元	234
9.3	FLOTRAN 分析中的文件	235
9.4	提高 FLOTRAN 分析的收敛性和稳定性工具	236
9.5	FLOTRAN 分析步骤	237
9.6	FLOTRAN 不可压层流和湍流分析	238
9.7	求解困难问题的策略	241

9.8 FLOTRAN 热分析	242
9.9 FLOTRAN 瞬态分析	247
9.10 FLOTRAN 多组份输运分析	249
第 10 章 耦合场分析	260
10.1 耦合场分析概述	260
10.2 顺序耦合场分析	260
10.3 顺序耦合分析的具体过程	263
10.4 顺序耦合分析的实例	264
10.5 直接耦合场分析	276
第 11 章 优化设计	278
11.1 优化设计	278
11.2 拓扑优化	285
第 12 章 单元的生和死	292
12.1 单元的生和死概念	292
12.2 单元生死的使用	292
12.3 使用 ANSYS 结果控制单元生死	294
12.4 单元生死应用实例	296
第 13 章 APDL	298
13.1 APDL 的概念	298
13.2 在工具条上添加命令	298
13.3 参数的使用	299
13.4 作为宏语言的 APDL	306
13.5 在 APDL 中控制程序流程	308
13.6 GUI 用户界面	310
13.7 加密宏	314
习题参考答案	316
参考文献	333

第 1 章 ANSYS 概述及有限元基础

1.1 ANSYS 软件概述

ANSYS 软件是融结构、热、流体、电磁、声学于一体的大型通用有限元分析软件，可广泛用于核工业、铁道、石油化工、航空航天、机械制造、能源、汽车交通、军工、电子、土木工程、造船、生物医学等一般工业及科学研究的模拟分析。该软件可在大多数计算机及操作系统中运行，从 PC 机到工作站直至巨型计算机，ANSYS 文件在其所有的产品系列和工作平台上均兼容。ANSYS 多物理场耦合的功能，允许在同一模型上进行各式各样的耦合计算，如，热—结构耦合、磁—结构耦合以及电—流体—热耦合，在 PC 机上生成的模型同样可运行于巨型机上，这样就确保 ANSYS 对多领域多变工程问题的求解。

1.1.1 ANSYS 软件的发展

ANSYS 公司由 Swanson 博士于 1970 年创建，公司总部设在美国的匹兹堡，30 年来，ANSYS 公司致力于分析软件的设计和开发，不断吸取新的计算方法和计算技术，推动着有限元技术的不断发展。在软件创始初期，它仅提供了热分析和线性结构分析功能。随着新的计算技术的融入和用户的要求，非线性、子结构以及更多的单元类型被加入了程序。20 世纪 70 年代末，交互方式的加入使该程序发生了最为显著的变化，它大大简化了模型的生成和结果评价。今天的 ANSYS 软件功能更为强大，使用更加便利，支持多种工作平台，并在异种平台上数据百分之百兼容，还提供了多场耦合的分析功能。

1.1.2 ANSYS 的特点

(1) 用户界面

ANSYS 程序功能强大，应用范围广，它的图形用户界面友好（如图 1-1 所示），使其易学易用。

在用户界面中，ANSYS 程序提供了 4 种通用输入方法——菜单、对话框、工具杆和直接输入命令。

ANSYS 共有以下 7 个菜单窗口。

实用菜单：该菜单包括了 ANSYS 的实用功能，在 ANSYS 运行的任何时候均可访问此菜单。

主菜单：该菜单由 ANSYS 最主要的功能组成，为弹出式菜单结构，其组成基于程序的操作顺序。

输入窗口：该窗口提供了键入 ANSYS 命令的输入区域，同时，还可显示程序的提示信息和浏览先前输入的命令。用户可从 Log 文件、先前输入的命令和输入文件中剪切和粘贴命令。

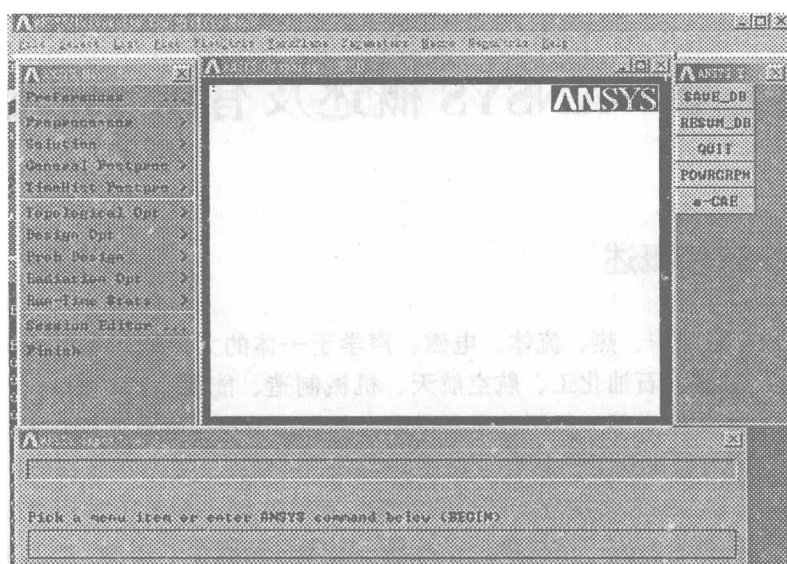


图 1-1 ANSYS 用户界面

图形窗口：该窗口用于显示诸如模型、分析结果等图形，用户可根据个人喜好调整改变窗口的大小。

输出窗口：该窗口用于显示 ANSYS 程序对已输入命令或已使用功能的相应信息。在 GUI 下，用户随时可以访问该窗口。

工具杆：该窗口允许用户将常用命令或自己编写的程序置于其中，用户只需用鼠标点击即可完成访问。

对话框：对话框是为了完成操作或设定参数而进行选取的窗口，该窗口提示用户为完成特定功能所输入的数据或作出的决定。

命令一经执行，该命令就会在 Log 文件中列出，这些命令也可保存为一个文件，以用于批处理。

(2) 图 形

完全交互式图形是 ANSYS 程序中不可分割的组成部分，图形对于检验前处理数据和在后处理中检查求解结果都是非常重要的。ANSYS 的主要图形功能包括以下内容：

在实体模型和有限元模型上的边界条件显示；

计算结果的彩色等值线显示；

随时间或模型中的一条轨迹而变化的结果图形；

通用显示操作；

动画显示：包括变形动画、时间历程结果动画、切片动画等；

对单元、实体模型的图元、组元及等值面的透明显示；

管单元、梁单元等横截面显示，等等。

(3) 处理器

ANSYS 按功能作用可分为若干个处理器：包括一个前处理、一个求解器、两个后处理器、几个辅助处理器等。ANSYS 前处理器用于生成有限元模型，指定随后求解所需的选择

项；ANSYS 求解器用于施加载荷和边界条件，然后完成求解运算；ANSYS 后处理器用于获取并检查求解结果，以对模型作出评价。

(4) 数据库

ANSYS 程序使用统一的集中式数据库来存储所有模型数据及求解结果。模型数据（包括实体模型和有限元模型、材料等）通过前处理器写入数据库；载荷和求解结果通过求解器写入数据库。后处理结果通过后处理器写入数据库。数据一旦通过某一处理器写入数据库，如需要，即可为其他处理器所用。

1.1.3 ANSYS 的功能

ANSYS 有限元软件包是一个多用途的有限元计算机设计程序，可用于分析以下问题。

① 非线性分析，包括：结构的线性和非线性问题，例如，桥梁设计、工程设计等；材料非线性，如所有的金属变形过程。

② 动力学分析：包括模态分析、谐响应分析、谱分析等。

③ 流体分析：主要用于分析气体、流体的流动、温度、压力等参数，如飞机、导弹的飞行分析。

④ 电磁分析：主要用于分析电磁场的分布、涡流产生、洛伦兹力以及电磁波的发射等问题。

⑤ 热分析：主要用于热的传导、对流及辐射模拟计算。

⑥ 各类分析之间的耦合分析，如电磁搅拌、电磁加热等。

1.1.4 ANSYS 文件

在使用任何软件时都会用到文件，以保留所建立的一切资料。文件名称可由下列方式指定。

① 文件名称取其系统默认（jobname=file），即在 Interactive 进入 ANSYS 时在环境窗口中不更改 Initial jobname。

② 在 Interactive 进入 ANSYS 时在环境窗口中更改 Initial jobname。

③ 进入 ANSYS 后，在 Begin level 执行命令更改工作文件的名称。

建议采用第二种方式。

更改工作文件名称也可采用命令的形式：/Filename, 新文件名（不需要扩展名）。

菜单形式：Utility Menu > File > Change Jobname...

1.2 有限单元法基础

1.2.1 有限单元法的基本概念

有限单元法是随着电子计算机的发展而迅速发展起来的一种现代计算方法。它是 20 世纪 50 年代首先在连续体力学领域——飞机结构静、动态特性分析中应用的一种有效的数值分析方法，随后很快就广泛地应用于求解热传导、电磁场、流体力学等连续性问题。

有限元法分析计算的思路和方法可归纳如下。

(1) 实体的离散化

将某个工程结构离散为由各种单元组成的计算模型，离散后单元和单元之间利用单元的节点相互连接起来；单元节点的设置、性质和数目等应视问题的性质、描述问题的需要而定。所以有限元法中分析的结构已不是原有的物体，而是具有同样或相近材料的众多单元以一定方式连接成的离散体。因此，用有限元法分析计算所获得的结果只是近似的，但如果单元划分得既细又合理，则所获得的结果就与实际情况吻合。

(2) 单元特性分析

① 选择位移模式。在有限单元法中，选择节点位移作为基本未知量时称为位移法；选择节点力作为基本未知量时称为力法；取一部分节点力和一部分节点位移作为基本未知量时称为混合法。位移法易于实现计算自动化，所以在有限单元法中，位移法应用范围最广。当采用位移法时，物体或结构离散化之后，就可把单元中的一些物理量如位移、应变和应力等由节点位移来表示。这时可以对单元中位移的分布采用一些能逼近原函数的近似函数予以描述。通常，有限元法中就将位移表示为坐标变量的简单函数。这种函数称为位移模式或位移函数。

② 分析单元的力学性质。根据单元的材料性质、形状、尺寸、节点数目、位置及其含义等，找出单元节点力和节点位移的关系式，这是单元分析中的关键一步。此时需要应用弹性力学中的几何方程和物理方程来建立力和位移的方程式，从而导出单元刚度矩阵，这是有限元法的基本步骤之一。

③ 计算等效节点力。物体离散化后，假定力是通过节点从一个单元传递到另一个单元。但是，对于实际的连续体，力是从单元的公共边界传递到另一个单元中去的。因而，这种作用在单元边界上的表面力、体积力或集中力都需要等效地移到节点上去，也就是用等效的节点力来替代所有作用在单元上的力。

(3) 单元组集

利用结构力的平衡条件和边界条件把各个单元按原来的结构重新联接起来，形成整体的有限元方程

$$K \cdot q = f \quad (1-1)$$

式中 K ——整体结构的刚度矩阵；

q ——节点位移列阵；

f ——载荷列阵。

(4) 求解未知节点位移

解有限元方程式 (1-1) 得出位移。这里，可以根据方程组的具体特点来选择合适的计算方法。

通过上述分析，可以看出，有限单元法的基本思想是“一分一合”，“分”是为了进行单元分析，“合”则是为了对整体结构进行综合分析。

1.2.2 插值函数和等参元

在有限元分析中，一个极为重要的内容就是选择具体的单元和确定单元的位移函数。单元的形状和相应的位移函数确定之后，便可依照标准步骤进行运算。

计算实践表明：采用这种线性插值函数的单元是比较方便的，且能比较灵活地适应不规

则的几何形状, 因而不失为一种简便而有效的方法。但由于采用线性插值, 单元划分得较少时, 精度往往不够理想。为了提高精度, 可以在三角形单元中采用高阶插值函数, 如六节点三角形单元。这种单元不太复杂, 且能以粗细适当的网格去逼近变化陡峭的应力场, 具有较高的精度。

当结构具有规则的几何边界时, 用矩形单元较为方便。矩形单元的计算精度比三角形单元要高, 因为在矩形单元内有连续变化的应力场。常用的有四节点矩形单元。

若结构边界不规则, 或具有曲线边界时, 则采用斜四边形或曲四边形单元较为适宜。此时, 为了保证位移在单元边界上的连续性, 需要进行坐标变换(局部坐标与总体坐标的变换), 形成等参数单元。在二维问题中, 常用的有八节点等参单元, 即在四边形单元每条边上设有三个节点, 采用二次插值函数。这种单元的计算工作量适中, 它不仅提高了内部计算精度, 还能较好地模拟结构的曲线边界。在保证与低阶单元同样精度的情况下, 单元数量可人为减少, 故得到了广泛的应用。如果还要提高四边形单元的精度, 在单元的每条边上, 还可以多设置节点, 以进一步提高插值函数的阶次。

在求解三维问题时, 采用空间单元, 相应地采用三维插值函数。求解三维问题, 可以采用与求解平面问题类似的原理和技巧, 没有什么原则上的困难, 不需要新的原理或假定。但由于每个节点的自由度增加, 因而求解的规模人为增加, 计算公式复杂, 计算量骤增。因此, 除了从各方面(例如利用对称性, 减少人工数据准备等)采取措施以减少计算工作量外, 还应该采用高效率、高精度的单元, 以便在较少的机器容量及较短的计算时间内, 获得精度适宜的解答。在实际工作中, 一般采用不含有内节点(单元内部不设置节点)的高阶插值函数的单元, 即只具有边界节点的等参数单元。

空间单元大体有以下四类, 即四面体单元、正六面体单元、五面体三棱柱单元及空间等参数单元。四面体单元是最早提出来的空间单元, 这种单元的刚度矩阵比较简单, 也能适应复杂的几何形状, 但由于内部应变是常量, 必须采用大量密集的单元才能取得较好的结果。

正六面体单元及五面体三棱柱单元只适用于规则几何外形的结构, 难以模拟复杂的工程结构, 目前应用较少。空间等参数单元, 与二维等参数单元一样, 既具有较高的计算精度, 又能模拟复杂的几何形状, 故应用日趋广泛。目前应用较多的是二十节点六面体等参元。三棱柱曲面等参元也可与二十节点等参元配合使用。

1.2.2.1 插值函数

在有限元分析中, 恰当地选择位移函数是整个方法中最重要的部分。位移函数的描述可以有两种方式: 其一, 采用含有若干待定系数的简单多项式, 这些系数继而变换成为相应的节点位移参数。其二, 可以采用形函数(插值函数)直接描述形函数通常是用插值多项式表示。对于二维位移场来说, 可以写成:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + \cdots + N_n(x, y)u_n = \sum_{i=1}^n N_i(x, y)u_i \\ v(x, y) &= N_1(x, y)v_1 + N_2(x, y)v_2 + \cdots + N_n(x, y)v_n = \sum_{i=1}^n N_i(x, y)v_i \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

式中 $N_i(x, y)$ 由具体单元和节点而定。

位移函数用式(1-2)表达后, 形函数就描述了单元中任一点的位移状态。

对于高阶插值单元来说, 所选择的位移函数除了满足协调条件外, 期待定系数的数目还

应和单元的节点自由度数目一致，以便由节点位移值唯一地确定全部系数。在高次多项式中，还应满足几何各向同性条件，即位移函数对于坐标的任何线性变换都能保持不变。一般来说，采用高阶单元能够得到较高的精度。但是，如果采用的函数式次数过高，将导致计算复杂，计算量大为增加，故一般选用不高于三次的多项式函数。

1.2.2.2 等参数单元

以最简单的矩形单元为例来说明等参数单元的特性。这种单元是最常用的等参数单元，也是分析其他等参数单元的基础，这种单元适合用于结构边界规则的情形。

在总体坐标系下，四节点矩形单元的位移函数可以写成：

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) u_i \\ v &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) v_i \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

如果把坐标原点移到单元中心，考察一个边长为 2 的正方形单元时，把形函数写成统一的形式为：

$$N_i(x, y) = \frac{(1+x_i x)(1+y_i y)}{4} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (1-4)$$

这是一个双线性的插值函数，在矩形的每一边 ($x = \pm 1$ 或 $y = \pm 1$) 上，函数 u 或 v 分别是 x 或 y 的线性函数。它们完全可以由该边上两节点的函数值惟一确定。因此，这样构造的位移函数在相邻两个矩形单元的公共边上均能保证连续性的要求，即满足相容性条件。

这种双线性插值，对任何双线性函数都是精确成立的，把它用来描述几何位置的坐标变量也必然成立，即：

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) y_i \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

及

$$\sum_{i=1}^4 N_i(x, y) = 1$$

上式称为“常应变准则”，是保证有限元解收敛的准则。它是用几何位置的节点值（节点坐标值）来表示位置坐标变量的表达式。而表达式中节点坐标系数 $N_i(x, y)$ ，正是描述位移函数的形函数。这种单元的位移函数（即其节点位移值的插值公式）和几何位置的坐标变量（即其节点坐标值的插值公式）具有完全相同的形式。它们都用同样数目的相应的节点值作为参数，并且具有完全相同的形状函数作为这些节点值前面的系数。当参数取节点的位移值时，就得到位移函数的插值公式；当参数取节点的坐标值时，就得到描述几何位置的坐标函数的表达式。

1.2.3 虚功原理

有限单元法的理论依据之一是虚功原理，虚功原理是最基本的能量原理，它是用功能的概念来阐述的平衡条件。

(1) 虚位移

结构的虚位移是指假定的、约束允许的、任意的微小的位移。它不是结构实际产生的位移。所谓的约束允许,即结构的虚位移必须满足变形协调条件和几何边界条件。所谓任意的和微小的,即它包括约束条件允许的所有可能出现的位移而与结构外载荷状态无关,同时它是一个微量。它是包含所有约束条件允许的可能产生的微小位移的集合,虚位移与实位移不同,实位移是与外载荷相对应的一个确定的位移。虚位移是在约束条件允许的范围内结构位置可能发生的微小变更,它的发生与时间无关。实位移是在一定时间间隔内产生的,所以必须区别实位移和虚位移两个不同的概念。

(2) 虚功和实功

实功是作用在结构上的力在实际位移上所做的功,简称为功。虚功是作用在结构上的力在结构的虚位移上所做的功。如果结构上作用力 F , 在结构上相应于力 F 的作用点上就产生有微小虚位移 δ^* 。在产生微小的虚位移过程中,认为力是恒定不变的。则力 F 在虚位移 δ^* 上产生的虚功为:

$$\Delta A = F \cdot \delta^* \quad (1-6)$$

在虚位移过程中,认为力 F 是恒定不变的。

(3) 外力虚功和虚应变能

在弹性结构分析中,把整个结构看做是一个变形体。在分析结构的虚位移时,不仅外载荷的作用点产生虚位移,而且结构体内部也将产生虚应变。同样也要满足几何方程。如果在结构上作用有外载荷 F , 在力作用点上相应产生虚位移 δ^* , 因而外载荷在虚位移上所做的功称为外力虚功,表示为:

$$\Delta A_e = F \cdot \delta^{*T} \quad (1-7)$$

在结构产生虚位移过程中,结构内部将产生虚变形。结构内力在虚变形上要做内力虚功,内力虚功会转化为能量而储存在结构的内部而成为结构的虚应变能。结构的虚应变能可以通过结构的应力在虚应变上所做的虚功来进行计算。如结构的应力阵为 σ , 由于 ϵ_μ 结构的虚位移而引起结构内部的虚应变为 ϵ^* 。在产生虚位移过程中,应力阵 σ 被认为是恒定不变的,因而结构的虚应变能为:

$$\Delta U_i = \int_V \epsilon^{*T} \sigma dV \quad (1-8)$$

(4) 虚功原理

虚功原理叙述为:结构平衡的必要和充分条件是作用在结构上的力在任意的虚位移上所做的虚功之和等于零。这个原理说明:

① 结构平衡的充分条件:若结构在外载荷作用下处于平衡,则必定有作用在结构上的力在任意的虚位移上所做的虚功之和等于零。

② 结构平衡的充分条件:若作用在结构上的力在所有的虚位移上所做的虚功之和等于零,则结构必定处于平衡状态之下。

用虚功原理分析变形结构时,需要考虑结构上作用的外力和内力。而虚功则应包括外力虚功和内力虚功。用 ΔA_e 表示外力虚功,用 ΔA_i 表示内力虚功。且内力虚功用虚应变能来表示。于是,结构的平衡条件应为外力虚功和内力虚功之和等于零。即:

$$\Delta A_e + \Delta A_i = 0 \quad (1-9)$$

用虚应变能代替内力虚功后, 则得到:

$$\Delta A_e = \Delta U_i \quad (1-10)$$

这就是应用于结构分析的虚功原理。

将外力虚功式和虚应变能式代入, 得:

$$\int_V \epsilon^*{}^T \sigma dV = \sigma^*{}^T F$$

这就是应用于结构分析的虚功原理的一般表达式。

1.3 场问题的有限单元法

连续介质的场问题, 如应力场、温度场、电磁场等, 在数学上可用偏微分方程或微分方程组及其相应的边界条件和初始条件来描述。其定态问题, 常常称为边值问题。它们的解是在已知边界条件所定义的区域中寻找的。但是, 许多问题由于边界条件比较复杂, 直接从微分方程求精确解比较困难, 甚至不可能。因此, 有限元法在求解场问题上得到了广泛的应用。

由于求解微分方程的边值问题和变分法(泛函求极值方法)具有等价性, 故对复杂的微分方程连同它的边界条件(自然边界条件), 首先转化为求泛函的极值问题, 然后采用有限元的离散方法求泛函的极值, 从而建立有限元方程求解。很多工程物理问题, 它们变量之间的关系, 既有微分形式, 也能找到它们的积分形式(泛函形式), 其共同规律就是能量积分。特别是这些问题在定常和平衡状态时, 它的势能最小, 只是形式不同而已。因此, 求定常和平衡状态的场量的分布, 都可以利用变分法求解。

由上述论述可知, 求解场问题的微分方程, 可用等价的泛函极值问题求解, 即可用变分的直接法求近似解。然而, 经典的变分法在使用时存在许多困难, 如试函数的选择困难, 运算复杂等, 使其应用受到限制。有限元法克服了经典变分法的困难, 成为求解场问题的一种有效的、普通的方法。

在用变分原理的有限元求解位移场时, 首先需要找到泛函的表达式。弹性力学中的泛函就是弹性体的能量, 求能量泛函极值的原理就是能量变分原理。经常使用的有最小势能原理和最小余能原理。前者用于位移法, 后者用于应力法。现在以平面应力问题为例, 来说明根据变分原理来建立位移场的有限元求解方程。

弹性体在外力(体力、表面力)作用下总势能(能量泛函)表达式为:

$$I[u(x, y), v(x, y)] = \iint_D \frac{1}{2} \epsilon^T \sigma t dx dy - \iint_D (W_x u + W_y v) t dx dy - \int_{C_\sigma} (p_x u + p_y v) t ds$$

式中 右端第一项为弹性体的应变能, 第二项为体积力的势能, W_x , W_y 为体积力分量; 第三项为表面力的势能, p_x , p_y 为表面力分量。

最小势能原理认为: 在给定外力作用下, 满足位移边界条件的一切容许的位移函数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 中, 实际存在着一组位移函数, 应使弹性体的总势能取极值。这就是有限元法求解位移场问题的理论根据。

下面来了解一下不同场问题的有限单元法求解。

1.3.1 位移场的有限单元法求解

利用变分原理的有限元求解时,首先要对整个求解区域进行剖分,也就是将求解域分割成有限个规则的单元,然后在每个单元内定义试函数,并且建立能量积分的泛函表达式。以 I^e 表示单元区域内的泛函,即:

$$I^e[u(x, y), v(x, y)] = \iint_e \frac{1}{2} \epsilon^T \sigma t dx dy - \iint_e f^T W t dx dy - \int_{C_e} f^T p t ds$$

式中 $\epsilon^T = \delta^T B^T$

$$f = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = N \delta^e$$

$$W = \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \end{bmatrix}; p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

因此,可得:

$$I^e = \frac{1}{2} \delta^T \left(\iint_e B^T D B t dx dy \right) \delta^e - \delta^T \iint_e N^T W t dx dy - \delta^T \int_{C_e} N^T p t ds$$

1.3.2 温度场问题有限单元法

工程中的许多结构部件在高温条件下工作,温度应力是设计中的不可忽略的控制因素。研究温度场的问题可以通过实测和计算的解决办法解决,本节主要介绍温度场问题的有限单元法的最基本的理论和方法。温度场问题也称为热传导问题,一般分为两种情况来研究,即稳态温度场问题,它与时间无关;瞬态温度场问题,它与时间有关。

在一般三维问题中,瞬态温度场的场变量 $\Theta(x, y, z, t)$ 在直角坐标中应满足的微分方程是

$$\rho c \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) - \rho Q = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (1-11)$$

此方程即是热量平衡方程。式中第一项是微体升温需要的热量;第2, 3, 4项是由 x , y 和 z 方向传入微体的热量;最后一项是微体内热源产生的热量。微分方程表明:微体升温所需的热量应与传入微体的热量以及微体内热源产生的热量相平衡。

稳态温度场有限单元法问题的求解的一般格式

$$K \Theta = p$$

式中 K 称为热传导矩阵; $\Theta = [\Theta_1 \ \Theta_2 \ \cdots \ \Theta_n]^T$ 是节点温度列阵; p 是温度载荷列阵。矩阵 K 和 p 的元素分别表示如下

$$K_{ij} = \sum_e K_{ij}^e + \sum_e H_{ij}^e$$

$$p_i = \sum_e p_{qi}^e + \sum_e p_{hi}^e + \sum_e p_{Qi}^e$$

式中

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$H_{ij}^e = \int_{\Gamma_3^e} h N_i N_j d\Gamma$$

$$p_{qi}^e = \int_{\Gamma_2^e} N_i q d\Gamma$$

$$p_{hi}^e = \int_{\Gamma_3^e} N_i h \Theta_a d\Gamma$$

$$p_{Qi}^e = \int_{\Omega^e} N_i \rho Q d\Gamma$$

以上就是二维稳定传导问题有限元的一般格式。

瞬态温度场有限元的一般格式

$$C\dot{\Theta} + K\Theta = p$$

这是一组以时间 t 为独立变量的线性常微分方程组。式中 C 是热容矩阵, K 是热传导矩阵, C 和 K 都是对称正定矩阵。 p 是温度载荷列阵, Θ 是节点温度列阵, $\dot{\Theta}$ 是节点温度对时间的导数列阵, $\dot{\Theta} = d\Theta/dt$ 。矩阵 K , C 和 p 的元素由单元相应的矩阵元素集成

$$\left. \begin{aligned} K_{ij} &= \sum_e K_{ij}^e + \sum_e H_{ij}^e \\ C_{ij} &= \sum_e C_{ij}^e \\ p_i &= \sum_e p_{Qi}^e + \sum_e p_{qi}^e + \sum_e p_{hi}^e \end{aligned} \right\}$$

单元的矩阵元素由下列各式给出:

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

是单元对热传导矩阵的贡献;

$$H_{ij}^e = \int_{\Gamma_3^e} h N_i N_j d\Gamma$$

是单元换热边界对热传导矩阵的修正;

$$C_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \rho c N_i N_j d\Omega$$

是单元对热容矩阵的贡献;

$$p_{Qi}^e = \int_{\Omega^e} \rho Q N_i N_i d\Omega$$

是单元热源产生的温度载荷;

$$p_{qi}^e = \int_{\Gamma_2^e} q N_i d\Gamma$$

是单元给定热流边界的温度载荷;

$$p_{hi}^e = \int_{\Gamma_3^e} h \Theta_a N_i d\Gamma$$

是单元对流换热边界的温度载荷。

1.3.3 流体的有限单元法

真实流体都是可压缩的, 只是可压缩的程度不同而已, 然而在一般的工程实际问题中, 可以不计流体的压缩性影响。