高等学校教学参考书

# 概率统计释疑与方法

肖筱南　袁作兴　编著

陕西科学技术出版社

高等学校教学参考书

# 概率统计释疑与方法

肖筱南　袁作兴　编著

陕西科学技术出版社

(陕)新登字第 002 号

高等学校教学参考书
概率统计释疑与方法
肖筱南 袁作兴 编著
陕西科学技术出版社出版发行
(西安北大街 131 号)
西安永宁彩印厂印刷
787×1092 毫米 32 开本 5.75 印张 12.5 万字
1994 年 7 月第一版 1994 年 7 月第一次印刷
印数：1—2500
ISBN 7—5369—2171—3/G·573
定 价：4.80 元

# 内 容 提 要

本书作者积多年从事概率论、数理统计的教学经验，按照教学大纲的要求，系统地将学习概率论、数理统计时应掌握的概念与理论，重点与难点，方法与技巧，以及容易混淆的问题，作了全面的论述与解答。全书构思新颖，内容丰富，思路清晰、分析精当，深入浅出，指点迷津、具有广泛的实用性、可读性与引导性，是一本将理论与实践相结合，知识与应用相结合，系统性与针对性相结合的概率论、数理统计教学参考新书。

本书特别适合高等院校师生及自学考试类学生作为概率论、数理统计课程的教学参考书，也可供各行各业中从事实际工作而需要用概率论、数理统计知识的科技人员学习使用。

# 前　　言

本书编写的目的有二：一是想对普通理工科院校、财经类院校、成人高校及高教自考类的读者学习概率论与数理统计理解、消化其基本概念和理论，培养基本技能，掌握数学方法提供一些帮助；二是以各类院校培养目标为依据，充分考虑到学生学习概率论，数理统计的实际需要，从突出实用性、科学性和方法论出发，为提高教学质量，促进该门课程教学改革作些努力。

成书过程中，作者注意了以下几点：

(1) 取材少而精，结构简而明，突出基本概念、重点难点的阐释。在内容的选择上，本着来源于教材，又高于教材的原则，以各类学校通用教材为主线，参照该门课程的教学大纲与要求，取其有共性的东西，提炼出有代表性的内容，把教材的重点难点，常用的思考方法与类型作为表述对象。当详之处不惜笔墨，当略之处留有余地，读者无论采用哪类教材，都能使用本书。

(2) 答疑解惑，做到脉络清晰、文字精炼、通俗易懂。根据作者在执教中的经验与体会，把学生在理解某些基本概念和平时可能出现的问题，教师在教学中容易忽略的地方，汇集成百余个问题，对容易混淆的概念、重要定理、公式性质进行深入浅出的阐释，指出其应用，帮助读者形成正确认识，辨证地、多视角地思考和分析问题。因此，读者无论是初学还是复习，均有参考价值。

(3) 疏理思路着重方法归纳，努力贯彻理论与实际相结合原则。概率论与数理统计这门课程比较抽象，内容多，实用性强且有一套特有的理论体系与思维方法，根据这些特点，作者选用了大量范例，对所学数学方法作了分类总结，综述概括，以便开拓思路，举

一反三，并力图知识的灵活运用，解决实际问题，以达到宜教易学的目的。

在编写的过程中，我们参阅了大量的书籍与教材，吸收了它们中不少长处。在此，特向有关作者、编者表示感谢。同时，也感谢陕西科学技术出版社的鼎力相助，使本书得以问世。尽管作者想使书稿达到较理想的效果而倾尽其力，但由于学识水平有限，加之时间仓促，不妥与错误之处难免，欢迎读者批评指正。

作　者

1994 年 2 月

见谷

山不在高 有仙则名
水不在深 有龙则灵

# 目　录

## 第一篇　概率论

## 第二篇　数理统计

爆头回

# 第一篇　概 率 论

## 第一章　随机事件及其概率

随机事件及其概率是概率论的最基本的概念.

主要由四个概念(随机事件、概率、条件概率及事件的独立性)、四个公式(加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式)和二个概型(古典概型、独立试验概型)组成.其中重点是概率概念、条件概率、独立性和四个公式;难点是古典概型概率计算及全概率公式、贝叶斯公式的应用.

### 一　主要内容与要求

#### 1　随机事件

对随机现象进行的观察或试验称为随机试验.某事件在一次随机试验中,可能出现,也可能不出现,而在大量的重复试验中该事件的出现具有某种统计规律,这种事件称为随机事件.

试验的每一个可能的结果称为一个基本事件.

一个随机试验的所有可能的试验结果的全体称为该试验的样本空间.

随机试验有两种极端情况:

必然事件　即在任何一次试验中必然出现的事件,通常记作 $U$.

不可能事件　即在任何一次试验中都不可能出现的事件,通

常记作$\varnothing$(或$V$).

2　随机事件的概率

(1) 定义:对于某个随机试验的每一个随机事件$A$,都有一个确定的数字$p$与之对应,用这个数来标志相应的事件A出现的可能性的大小,并称$p$为随机事件$a$的概率,记作$p(a)=p$.

(2) 概率公理

1° $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

2° $P(U)=1$,$U$是必然事件;

3° $P(\varnothing)=0$,$\varnothing$是不可能事件;

4° 设有$n$个事件$A_1,\cdots,A_n$,$A_i A_j=\varnothing(i\neq j)$,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) 概率的统计定义　对一个试验在不变的情况下重复做$m$次,事件$A$出现了$n$次,$n$称为事件$A$出现的频数,$\frac{n}{m}$称为事件$A$的频率.当$m$充分大时,$\frac{n}{m}$稳定在某个常数$p$附近摆动,且$m$越大,摆动幅度越小,则称$p$为事件$A$的概率,记作$P(A)=p$.

3　四个公式、条件概率、独立性

(1) 加法公式

对任意事件$A$、$B$,有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.1}$$

当$AB=\varnothing$(即$A$与$B$互斥)时,有

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1.2}$$

公式(1.1)可以推广成有限个随机事件和的情况.

(2) 乘法公式、条件概率、独立性

设$P(A)>0$,在事件$A$发生的条件下,事件$B$发生的概率,称作事件$B$在给定$A$下的条件概率,有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.3}$$

同理有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (P(B)>0)$$

上式可写为

$$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A) \qquad (1.4)$$

称为事件 $A$ 和 $B$ 的乘法公式.

同理可推广到有限个事件乘积的公式.

$$P(A_1A_2\cdots A_n)$$
$$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}) \qquad (1.5)$$

若事件 $A$ 发生与否与 $B$ 无关,则称 $A$ 与 $B$ 独立,有

$$A\text{与}B\text{独立}\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(A|B)=P(A) \qquad (1.6)$$

若 $\quad P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$

则称 $A_1A_2\cdots A_n$ 全面独立(相互独立).

(3) 全概率公式与贝叶斯公式

若 $B\subset A_1+A_2+\cdots+A_n$,且 $A_i\cdot A_j=\varnothing(i\neq j)$,$P(A_i)>0(i,j=1,2,\cdots,n)$,则有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i) \qquad (1.7)$$

称为全概率公式,若又有 $P(B)>0$,则

$$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)} \quad (j=1,2,\cdots,n) \qquad (1.8)$$

称为贝叶斯公式(逆概率公式).

## 4 两个概型

(1) 古典概率概型

古典概率有如下特点:

1° 所有可能试验的结果只有有限个,即试验的基本事件个

数有限，记为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$；

2° $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 发生的可能性相等；

3° 在任何一次试验中，$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 中只能有一个发生. 满足上述三条的条件组 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 称为等概完备事件组.

设 $A$ 具有以上特征的为随机事件，它包含有 $n$ 个试验结果(或说有 $n$ 个基本事件对 $A$ 有利)，则事件 $A$ 发生的概率为：

$$P(A)=\frac{A\text{中包含的基本事件数}}{\text{所有可能试验的基本事件总数}}=\frac{n}{m} \tag{1.9}$$

(2) 独立试验序列概型

在概率论中，把在同样条件下重复进行试验的数学模型称为独立试验序列概型，其概率的计算公式为：

设在一次试验中事件 $A$ 发生的概率为 $P(0\leqslant P\leqslant 1)$，则在 $n$ 次重复试验中，事件 $A$ 恰好发生 $k$ 次($k=0,1,2,\cdots,n$)的概率为

$$P(A\text{恰发生 }k\text{ 次})=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \tag{1.10}$$

当 $n$ 较大时，有以下近似公式：

通常当 $np<5,n\geqslant 10$ 时，用

$$P(A\text{恰发生 }k\text{ 次})\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad(\lambda=np) \tag{1.11}$$

通常当 $p<\frac{1}{2},np>5$ 或 $p>\frac{1}{2},n(1-p)>5$ 时，

用 $P(A\text{恰发生 }k\text{ 次})\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{(k-np)^2}{\sigma^2}}=N(np,\sigma^2)$

其中 $\sigma^2=np(1-p)$.

## 学习本章的基本要求

1. 理解随机试验的特征，并能根据随机试验特征分析试验的结果，从而搞清样本空间的构成，以及对某一具体事件是由哪些试验结果构成；

2. 熟悉事件之间的关系与运算；

3. 正确理解事件的概率的两个定义，熟记概率的有关性质.

掌握概率的古典定义方法和适用范围.并能计算基本的古典概型的概率问题;

4. 会使用概率的加法公式;

5. 理解条件概率的含义,并会利用乘法公式和事件的独立性计算积事件的概率;

6. 了解事件的互斥(互不相容)、对立和相互独立三者之间的关系;

7. 会利用全概率公式和逆概率公式计算典型问题;

8. 会利用独立试验序列概型概率的计算公式计算典型问题.

## 二　疑难解释

**1**　样本空间与随机试验有什么关系?随机事件与样本空间有什么关系?

**答**　随机试验决定样本空间.而随机事件是样本空间的子集,当样本空间表示必然事件时,随机事件是样本空间的子事件,即随机事件所包含的样本点都属于样本空间.

**2**　$n$ 个事件的"和运算"与"积运算"有何区别?又有何联系?

**答**　$n$ 个事件的"和运算"表示 $n$ 个事件中至少有一个发生,这好比开套锁,至少打开一把锁才能开门,$n$ 个事件的"积运算"表示 $n$ 个事件同时发生,就好比开保险锁,要 $n$ 把锁同时打开门才开.但和事件的概率可以用积事件的概率来求,反之亦然.即

1° $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i)$

2° $P(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i)$

当 $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\cdots,\overline{A}_n$ 相互独立时,采用1°方便;当 $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\cdots,\overline{A}_n$ 互不相容时,采用2°方便.

**3**　两事件相互独立,互不相容与互逆(互为对立)能否同时成

立？三者关系如何？

**答** 一般不能同时成立.相互独立，互不相容与互逆是概率统计中的三个非常重要的概念，决不能混淆不清，必须搞清它们之间的关系.

设 $A$、$B$ 为 $E$ 的二事件，

（Ⅰ）互不相容与互逆（互为对应事件）：

$A$ 与 $B$ 互不相容 $\Leftrightarrow AB=\varnothing$

$A$ 与 $B$ 互逆 $\Leftrightarrow AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=U$，可见，$A$ 与 $B$ 互逆必互不相容，反之不然.

（Ⅱ）互不相容与相互独立

$A$ 与 $B$ 互不相容 $\Leftrightarrow AB=\varnothing$ (1)

$A$ 与 $B$ 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$ (2)

当 $P(A)>0$ 且 $P(B)>0$ 时，由(2)知，$P(AB)>0$，$AB=\varnothing$，当 $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$ 时，$P(AB)=0$，这时有可能 $AB=\varnothing$（并非必然），可见当 $P(A)$，$P(B)$ 都不为 0 时，互不相容一定不相互独立.反之亦然；只有当 $P(A)$，$P(B)$ 之中至少有一个为 0 时，才有可能既互不相容又相互独立.

（Ⅲ）互逆与相互独立：与（Ⅱ）同，一般情况下，互逆不一定相互独立，反之亦然.

**4** 频率与概率有何区别？

**答** 频率虽能反映一个事件发生的可能性大小，但它具有随机波动性，而概率是频率的稳定值，它所反映的是大量随机现象的规律性.

**5** 当 $n$ 充分增大时，事件 $A$ 在 $n$ 次重复试验中发生了 $r$ 次的频率 $W(A)=\frac{r}{n}$ 接近概率 $P(A)$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r}{n}=P(A)$$

成立吗？

答　不成立.若成立,则对任意给定的 $\varepsilon>0$ 存在 $N>0$,当 $n>N$ 时有 $\left|\frac{r}{n}-P(A)\right|<\varepsilon$.

但是,由于 $A$ 的发生是随机的,故 $\frac{r}{n}$ 的值也是随机的,可见无论 $N$ 多么大,都有可能发生 $\left|\frac{r}{n}-P(A)\right|\geqslant\varepsilon$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r}{n}=P(A)$ 不成立.

6　积事件的概率 $P(AB)$ 与条件概率 $P(B|A)$ 有什么区别?它们都是 $A$、$B$ 同时发生的概率吗?

答　$P(AB)$ 与 $P(A|B)$ 是不同的.积事件的概率 $P(AB)$ 是 $AB$ 同时发生的概率;而条件概率 $P(A|B)$ 是在 $B$ 已经发生之后 $A$ 发生的概率.一般而言,它们的概率值是不相等的.

7　使用概率的加法公式和乘法公式时,应注意什么?

答　使用概率的加法公式时,首先要搞清所涉及的事件互斥不互斥(三个以上的事件是否两两互斥?),使用概率的乘法公式时,首先要搞清所涉及的事件是否相互独立.例如

若 $A$、$B$ 互斥,$P(A+B)=P(A)+P(B)$

若 $A$、$B$ 相容,$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

若 $A$、$B$ 相互独立,$P(AB)=P(A)P(B)$

若 $A$、$B$ 不独立,$P(AB)=P(A)P(B|A)$ 或

$P(AB)=P(B)P(A|B)$.

8　当 $ABC=\varnothing$ 时,能否使用公式:

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$

答　不能.因为由 $ABC=\varnothing$,不能推出 $AB=\varnothing$,$AC=\varnothing$,$BC=\varnothing$,即不能说明三个事件两两互斥.为了正确使用公式,我们还要进一步搞清楚 $A$、$B$、$C$ 三事件是否两两互斥.

9　"有放回的抽样"与"无放回的抽样"有什么区别?

答　"有放回的抽样"是指前一次抽出一个样本,观察其结果

后，放回总体之后再进行下一次抽样. 这样，前一次抽样的结果对下一次抽样的结果不会产生影响. 即前后两次抽样试验是相互独立的，是无条件概率问题.

而“无放回的抽样”指的是前一次抽出一个样本不再放回总体中去就进行下一次抽样. 这样，前一次抽样的结果从概率上影响到下一次抽样的结果. 即前后两次抽样试验不是相互独立的，是条件概率问题.

显然，两者是不相同的.

**10** 如何判断古典概型？怎样计算古典概率？

**答** 判断是否古典概型的关键是“等可能性”即“等概性”，而“有限性”较容易看出. 计算古典概率应按如下步骤进行：

(1) 准确分析试验的方式(判断有限性和等可能性).

(2) 弄清等概完备事件组由什么构成.

(3) 求出对 $A$ 有利的基本事件数.

(4) 运用古典概率公式 $P(A)=\frac{r}{n}$，算出 $P(A)$.

为了准确无误地把对 $A$ 有利的基本事件数求出，这就要求我们要具有较丰富的分析想象能力，且排列、组合知识要清楚，事件间的关系及运算要熟练.

古典概型大体可分为三种类型：1° 摸球问题(即产品的随机抽样问题)；2° 分房问题(即球在盒中的分配问题)；3° 随机取数问题. 若能熟练地掌握以上三种典型问题的解法，则常见的大部分古典问题均可归结为这三类问题之一来处理.

## 三 方法综述

为了帮助读者进一步搞清本章内容，提高分析问题与解决问题的能力，现将本章解题方法综述如下：