劲爆！

卓越备考

高中数学基础知识

主编◎张金良

基本初等函数　三角函数
平面向量　不等式
数列　立体几何
直线和圆　圆锥曲线
计数原理　概率和统计
……

华东师范大学出版社

卓越备考

高中数学基础知识

主　编　张金良

编　者

吴文尧　蒋海瓯　陈柏良　黄加卫　苗孟义　李惟峰　熊丰羽

钟董甫　景　芳　张晓东

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学基础知识/张金良主编. —上海:华东师范大学出版社,2009
(卓越备考)
ISBN 978-7-5617-6970-6

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 034869 号

卓越备考

高中数学基础知识

主　　编　张金良
项目编辑　舒　刊
组稿编辑　任念兵
审读编辑　李金龙
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　江苏省江阴市天海印务有限公司
开　　本　787×960　16 开
印　　张　15.25
字　　数　299 千字
版　　次　2009 年 5 月第 1 版
印　　次　2009 年 5 月第 1 次
印　　数　16000
书　　号　ISBN 978-7-5617-6970-6/G·3895
定　　价　22.00 元

出 版 人　朱杰人

1

目录

必修内容

选修内容

必修内容

[redacted]

第1节 集合的概念及运算

1. 基础概念和公式

[redacted]

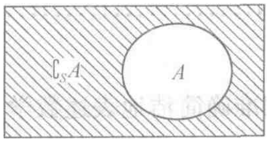


图 1-1

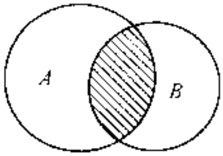


图 1-2

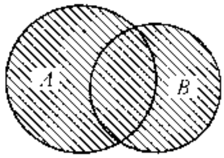


图 1-3

例 1 设集合 $A=\left\{x \mid x=\frac{1}{2}k+\frac{1}{4},\ k\in \mathbf{Z}\right\}$，若 $x=\frac{9}{2}$，则下列关系正确的是(　　).

(A) $x \subsetneqq A$　　(B) $x\in A$　　(C) $\{x\}\in A$　　(D) $x\notin A$

解 由于 $\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}=\frac{2k+1}{4}$ 中 $2k+1$ 只能取到所有的奇数，而 $\frac{9}{2}=\frac{18}{4}$ 中 18 为偶数，则 $\frac{9}{2}\notin A$，故选 D.

点评 元素与集合之间的关系用属于或不属于，集合之间的关系用包含于或不包含于，解题时要简化集合. 注意 $\varnothing\in\{\varnothing\}$ 或 $\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$.

2. 重要性质和结论

(1) 若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$.

(2) $A\cap \complement_S A=\varnothing$，$A\cup \complement_S A=S$，$\complement_S(\complement_S A)=A$.

(3) 若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；若 $A\subseteq B$，$B\subseteq A$ 则 $A=B$.

(4) $A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$；$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$.

(5) 设集合 A 的元素个数是 n，则集合 A 的子集个数为 2^n，真子集个数为 2^n-1.

(6) $\complement_S(A\cap B)=(\complement_S A)\cup(\complement_S B)$，$\complement_S(A\cup B)=(\complement_S A)\cap(\complement_S B)$.

(7) $\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}A+\mathrm{Card}B-\mathrm{Card}(A\cap B)$.

3. 常用方法和技巧

◆ 集合概念的处理 ◆

解决集合概念题，要理解集合的有关概念，特别是集合元素的三大特征：确定性、互异性、无序性；对于描述法给出的集合 $\{x \mid x\in P\}$，要紧紧抓住竖线前面的代表元素 x 以及它所具有的性质 P；注意用简单具体的方法表示集合(如韦恩图、表格、线段等)，化抽象为具体，通过数形结合，直观求解.

例 2 给出下列关系式：①$\varnothing\subseteq\{a\}$，②$a\subseteq\{a\}$，③$\{a\}\subseteq\{a\}$，④$\{a\}\in\{a,b\}$，⑤$\{a,b\}\in\{a,b,\{a,b\}\}$，⑥$\{a,b\}=\{(a,b)\}$，其中正确的序号是____.

解 ①③⑤.

例 3 设 $A=\{-4,\ 2a-1,\ a^2\}$，$B=\{9,\ a-5,\ 1-a\}$，已知 $A\cap B=\{9\}$，则实数 a 的值是________.

解 因为 $A\cap B=\{9\}$，所以 $9\in A$.

若 $2a-1=9$，则 $a=5$，此时 $A=\{-4, 9, 25\}$，$B=\{9, 0, -4\}$，$A\cap B=\{9, -4\}$，与已知矛盾，舍去.

若 $a^2=9$，则 $a=\pm3$. 当 $a=3$ 时，$A=\{-4, 5, 9\}$，$B=\{-2, -2, 9\}$，B 不符合集合中元素的互异性要求，舍去；当 $a=-3$ 时，$A=\{-4, -7, 9\}$，$B=\{9, -8, 4\}$，符合题意.

综上得 $a=-3$.

点评 理解交集概念，熟悉集合中元素的三个特征：互异性、确定性、无序性.

◆ 怎样进行集合的运算 ◆

集合的运算包括子、交、并、补，它常常与不等式、方程、组合、解析几何等知识关联，解题时要依据所给问题的特征将集合问题化成普通的数学问题进行求解.

例 4 已知 $A=\{x \mid |x-a|<2\}$，$B=\{x \mid x^2-2x-15<0\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

解 $A=(-2+a, 2+a)$，$B=(-3, 5)$，要使 $A\subseteq B$，必须 $\begin{cases}-2+a\geqslant -3,\\ 2+a\leqslant 5,\end{cases}$ 化简得 $-1\leqslant a\leqslant 3$.

点评 集合运算与不等式相关联的题主要有含参数与不含参数两类. 若题中不含参数，常常通过等价转换或化简集合后直接求解；若题中含参数，大多数问题要分类讨论完成，解题过程中要注意运用不等式解集在数轴上的表示方法，利用数形结合求解.

例 5 已知集合 $A=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$，$B=\{x \mid mx+1=0\}$，且符合 $A\cup B=A$，则实数 m 的值组成的集合是________.

解 集合 $A=\{2, 3\}$. 当 $m=0$ 时，$B=\varnothing$，符合 $A\cup B=A$；当 $B\neq\varnothing$ 时，$B=\left\{-\frac{1}{m}\right\}$，要使 $A\cup B=A$，必须 $B\subseteq A$，于是 $-\frac{1}{m}=2$ 或 $-\frac{1}{m}=3$，解得 $m=-\frac{1}{2}$ 或 $m=-\frac{1}{3}$. 所以 m 的值组成的集合是 $\left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$.

点评 集合运算与方程相联系的题主要有含参数与不含参数两类，解题方法与例 4 类似. 本题的典型错误是疏忽空集，空集是不含任何元素的集合，常常内隐于题目.

例 6 已知集合 $A=\{0, 1, 3, 5, 7\}$，从集合中取出两个元素相乘的积组成的集合 B 的非空真子集的个数是(　　).

(A) 64　　　　(B) 128

(C) 126　　　　(D) 127

解 取出的两个元素可以分成两类：含一个元素 0 时，其他四个数任取

一个与 0 相乘均得 0；不含 0 时，由 1，3，5，7 任取两个相乘有 $C_4^2=6$(个)不同的积．故 B 中的元素有 7 个，B 的非空真子集的个数是 $2^7-2=126$(个)，故选 C.

点评 集合运算与组合相联系的题主要体现在求子集的个数，解题的依据主要是 n 个元素的集合 A 的子集个数为 2^n，真子集个数为 2^n-1，非空真子集的个数为 2^n-2.

例 7 设 m 为实数，若 $\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x-2y+5\geqslant 0,\\3-x\geqslant 0,\\mx+y\geqslant 0\end{cases}\right.\right\}\subseteq\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 25\}$，则 m 的取值范围是________.

解 由题意，$\begin{cases}x-2y+5\geqslant 0,\\3-x\geqslant 0,\\mx+y\geqslant 0\end{cases}$ 表示的区域 D 包含于圆盘 $x^2+y^2\leqslant 25$ 内，且必须使 D 形成三角形区域．如图 1-4，当直线 $mx+y=0$ 变动时交点 P 只能在线段 AB 上运动，过点 $(-5,0)$，$(3,-4)$ 时，m 达到最小值 0 和最大值 $\dfrac{4}{3}$，所以 m 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{4}{3}\right]$.

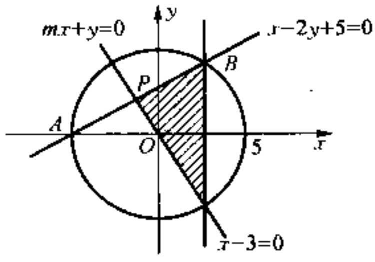


图 1-4

点评 集合运算与解析几何或线性规划相联系的题，通常以集合语言和符号来表述，其本质是解析几何问题，解题的关键是要将集合语言转化成普通的数学语言．本题的求解要领首先是准确画图，其次观察变动直线 $mx+y=0$ 所形成的阴影是否在圆内.

例 8 向 50 名学生调查对 A、B 两事件的态度，有如下结果：赞成 A 的人数是全体的五分之三，其余的不赞成，赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人，其余的不赞成；另外，对 A、B 都不赞成的学生数比对 A、B 都赞成的学生数的三分之一多 1 人．问对 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人？

解 如图 1-5，设 A、B 都赞成的学生数为 x，都不赞成的学生数为 y，则 $y-\dfrac{x}{3}=1$，$y+30-x+x+33-x=50$，解得 $x=21$，$y=8$.

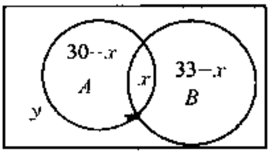


图 1-5

点评 解题要领是画出韦恩图，形象地表示出各数量关系间的联系．解决此类问题有时可用公式 $\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}A+\mathrm{Card}B-\mathrm{Card}(A\cap B)$ 求解.

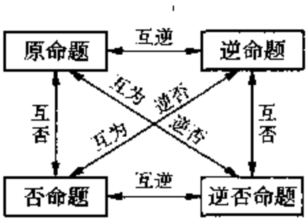
第2节　四种命题与充要条件

1. 基础概念和公式

命题：用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题. 其中判断为真的语句叫做真命题，判断为假的命题叫做假命题.

条件与结论：命题"若 p，则 q"中的 p 是命题的条件，q 是命题的结论.

四种命题及其关系：



原命题：若 p，则 q；

逆命题：若 q，则 p；

否命题：若非 p，则非 q；

逆否命题：若非 q，则非 p.

原命题为真，它的逆命题不一定为真；

原命题为真，它的否命题不一定为真；

原命题为真，它的逆否命题一定为真.

充分条件，必要条件：若命题"若 p，则 q"是真命题，即"$p \Rightarrow q$"，则称 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

充要条件：若 p 既是 q 的充分条件，也是 q 的必要条件，即"$p \Leftrightarrow q$"，则称 p 是 q 的充分必要条件(简称充要条件).

例1 写出命题"若 $m<0$，则关于 x 的方程 $x^2+2x+m=0$ 有实数根"的逆命题，否命题和逆否命题.

解 逆命题：若关于 x 的方程 $x^2+2x+m=0$ 有实数根，则 $m<0$.

否命题：若 $m \geqslant 0$，则关于 x 的方程 $x^2+2x+m=0$ 没有实数根.

逆否命题：若关于 x 的方程 $x^2+2x+m=0$ 没有实数根，则 $m \geqslant 0$.

例2 "$0<x<3$"是"$|x-1|<2$"的(　　).

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

解 $|x-1|<2$ 可化简为 $-1<x<3$，而 $(0,3) \subset (-1,3)$，所以"$0<x<3$"是"$|x-1|<2$"的充分而不必要条件，故选 A.

点评 从集合之间的关系看条件的充分性和必要性的主要方法有：若 $A \subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件；若 $B \subseteq A$，则 A 是 B 的必要条件；若 $A=B$，则 A 是 B 的充要条件；若 $A \nsubseteq B$ 且 $B \nsubseteq A$，则 A 既不是 B 的充分条件，也不是 B 的必要条件.

2. 重要性质和结论

(1) 若 p 是 q 的充分(必要)条件，q 是 r 的充分(必要)条件，则 p 是 r 的充分(必要)条件.

(2) 互为逆否命题的两个命题是等价的，即它们具有相同的真假性；但互为逆命题或否命题的两个命题不一定具有相同的真假性.

常用方法和技巧

◆ 判断命题的真假 ◆

判断一个命题是真命题，需要进行严格的逻辑推理；而判定假命题，只需举一个反例就行. 而当判断一个否定型的命题的真假时，常常要利用"互为逆否命题的两个命题具有相同的真假性"这一性质来判断.

例 3 给出下列四个命题：

① 若 $x^2-3x+2=0$，则 $x=1$ 或 $x=2$；

② 若 $-2\leqslant x<3$，则 $(x+2)(x-3)\leqslant 0$；

③ 若 $x=y=0$，则 $x^2+y^2=0$；

④ 若 $x, y\in \mathbf{N}^*$，$x+y$ 是奇数，则 x、y 中一个是奇数，一个是偶数. 那么(　　).

(A) ①的逆命题为真命题　　(B) ②的否命题为真命题

(C) ③的逆否命题为假命题　　(D) ④的逆命题为假命题

解 命题①的逆命题是：若 $x=1$ 或 $x=2$，则 $x^2-3x+2=0$. 它是真命题；

命题②的否命题是：若 $x<-2$ 或 $x\geqslant 3$，则 $(x+2)(x-3)>0$. 当 $x=3$ 时，$(x+2)(x-3)=0$，所以②的否命题为假命题；

命题③是真命题，所以其逆否命题也是真命题；

命题④的逆命题是：若 $x, y\in \mathbf{N}^*$，且 x、y 中一个是奇数，一个是偶数，则 $x+y$ 是奇数. 它是真命题. 故选 A.

◆ 判断条件的充分性与必要性 ◆

判断条件的充分性与必要性，首先要明确命题的条件与结论，即把命题写成"若 p，则 q"的形式，再判断这个命题及其逆命题的真假. 若这个命题为真命题，则条件的充分性成立；若逆命题为真命题，则条件的必要性成立.

例 4 对任意实数 a、b、c，在下列命题中，真命题是(　　).

(A) "$ac>bc$" 是"$a>b$" 的必要条件

(B) "$ac=bc$" 是"$a=b$" 的必要条件

(C) "$ac>bc$" 是"$a>b$" 的充分条件

(D) "$ac=bc$" 是"$a=b$" 的充分条件

解 将上面四个命题写成"若 p，则 q"的形式：

(A) "$ac>bc$" 是"$a>b$" 的必要条件：若 $a>b$，则 $ac>bc$；

(B) "$ac=bc$" 是"$a=b$" 的必要条件：若 $a=b$，则 $ac=bc$；

(C) "$ac>bc$" 是"$a>b$" 的充分条件：若 $ac>bc$，则 $a>b$；

(D) "$ac=bc$" 是"$a=b$" 的充分条件：若 $ac=bc$，则 $a=b$.

上述四个命题中，只有"若 $a=b$，则 $ac=bc$"是真命题，其他三个命题都是假

命题，故选 B.

例 5 角 A、B 是$\triangle ABC$ 的内角，则“$A>B$”是“$\sin A>\sin B$”的(　　).

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

解 设角 A、B 所对的边分别为 a、b，则有 $A>B\Leftrightarrow a>b$（大角对大边），由正弦定理得 $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$，所以 $a>b\Leftrightarrow \sin A>\sin B$，从而 $A>B\Leftrightarrow \sin A>\sin B$，故选 C.

点评 只要充分利用三角形中边角的定性关系（如大角对大边）及定量关系（如正弦定理、余弦定理），与三角形有关的命题的真假就比较容易判断.

例 6 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=3^n+a$，求数列$\{a_n\}$是等比数列的充要条件.

解 (1) 先求必要条件：

由已知可得 $a_1=S_1=3+a$，$a_2=S_2-S_1=6$，$a_3=S_3-S_2=18$，又 $a_2^2=a_1a_3$，得 $36=18\times(3+a)$，解得 $a=-1$，所以数列$\{a_n\}$是等比数列的必要条件是 $a=-1$.

(2) 下面证明 $a=-1$ 也是充分条件.

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$；当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n-3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$. 所以 $a_n=2\cdot 3^{n-1}$ 对所有的正整数 n 都成立.

而 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$，因此当 $a=-1$ 时，数列$\{a_n\}$是等比数列.

综上所述，数列$\{a_n\}$是等比数列的充要条件是 $a=-1$.

点评 求充要条件一般先求必要条件，再证明其充分性.

第 3 节　逻辑联结词与量词

1. 基础概念和公式

逻辑联结词：或（符号：$\vee$），且（符号：$\wedge$），非（符号：$\neg$）.

全称量词：所有的，任意一个，一切等，用符号 $\forall$ 表示.

存在量词：存在一个，至少有一个，有些等，用符号 $\exists$ 表示.

全称命题：含有全称量词的命题，一般可表示为“$\forall x\in M,\ p(x)$”的形式.

特称命题：含有存在量词的命题，一般可表示为“$\exists x_0\in M,\ p(x_0)$”的形式.

2. 重要性质和结论

(1) 若 p，q 是简单命题，则

$p\vee q$ 为真 $\Leftrightarrow$ p，q 中至少有一个为真；

$p\wedge q$ 为真 $\Leftrightarrow$ p，q 两个都为真；

$\neg p$ 与 p 具有不同的真假性.

(2) 全称命题的否定是特称命题;特称命题的否定是全称命题.

(3) 命题的否定与否命题:命题的否定是含有逻辑联结词"非"的命题,与原命题具有不同的真假性;而否命题是同时否定命题的条件与结论,其真假性与原命题的真假性无关.

3. 常用方法和技巧

◆ 判断含有逻辑联结词的命题的真假 ◆

判断含有逻辑联结词的命题的真假,一般先确定命题中所含的逻辑联结词,再根据含有不同逻辑联结词的命题真假的结论作出判断.

例1 如果命题"非 p 或非 q"是假命题,现给出以下四个结论:

① 命题"p 且 q"是真命题; ② 命题"p 且 q"是假命题;

③ 命题"p 或 q"是真命题; ④ 命题"p 或 q"是假命题.

其中正确的是(　　).

(A) ①③　(B) ②④　(C) ②③　(D) ①④

解 命题"非 p 或非 q"是含有逻辑联结词"或"的命题,且是假命题,由此可以得出非 p 和非 q 两个命题都是假命题,再根据含有逻辑联结词"非"的命题与原命题的真假性互异的结论,得出 p 和 q 两个命题都是真命题,所以命题"p 且 q"和"p 或 q"都是真命题,故选 A.

例2 "p 或 q 为真命题"是"p 且 q 为真命题"的(　　).

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

解 命题"p 且 q 为真命题"等价于"命题 p 和 q 都是真命题",由此"p 且 q 为真命题"能推出"p 或 q 为真命题";但当 p 和 q 为一真一假时,p 或 q 为真命题,而 p 且 q 为假命题,即"p 或 q 为真命题"不能推出"p 且 q 为真命题".所以"p 或 q 为真命题"是"p 且 q 为真命题"的必要而不充分条件,故选 B.

点评 理解"且"、"或"的含义是解题关键.

例3 若 $x, y\in \mathbf{R}$,则"$x>1$ 或 $y>2$"是"$x+y>3$"的(　　).

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

解 若 $x=1.5$, $y=1$,满足"$x>1$ 或 $y>2$",但不满足"$x+y>3$";反之,$x+y>3$ 一定有 $x>1$ 或 $y>2$, 故选 B.

点评 本题来自浙江省高考抽样测试题,难度系数为 0.35.若考虑逆否命题:当 $x, y\in \mathbf{R}$ 时,"$x+y\leqslant 3$"是"$x\leqslant 1$ 且 $y\leqslant 2$"成立的什么条件?问题就迎刃而解了.

例4 已知 p:$x^2+mx+1=0$ 有两个负数根,q:$4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根,若 $p\vee q$ 是真命题,$p\wedge q$ 是假命题,求实数 m 的取值范围.