保险精算系列教材

社会保险精算教程

李恒琦 张运刚 编著

BAOXIAN JINGSUAN XILIE JIAOCAI

SHEHUI BAOXIAN JINGSUAN JIAOCHENG

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

保险精算系列教材

社会保险精算教程

李恒琦 张运刚 编著

BAOXIAN JINGSUAN XILIE JIAOCAI

SHEHUI BAOXIAN

JINGSUAN JIAOCHENG

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

图书在版编目(CIP)数据

社会保险精算教程/李恒琦,张运刚编著.—成都:西南财经大学出版社,2009.2
ISBN 978-7-81138-072-9

Ⅰ.社… Ⅱ.①李…②张… Ⅲ.社会保险—精算学—高等学校—教材 Ⅳ.F840.61

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 125225 号

社会保险精算教程
李恒琦 张运刚 编著

责任编辑:于海生
封面设计:穆志坚
责任印制:封俊川

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网 址:	http://www.xcpress.net
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电 话:	028-87353785 87352368
印 刷:	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸:	170mm×240mm
印 张:	15.25
字 数:	275 千字
版 次:	2009 年 2 月第 1 版
印 次:	2009 年 2 月第 1 次印刷
印 数:	1—2000 册
书 号:	ISBN 978-7-81138-072-9
定 价:	29.80 元

前　　言

我国的社会保险制度开始于20世纪50年代初的劳动保险，在“文革”中倒退为企业保险，主要覆盖机关企事业单位职工，而广大农民只有一些合作医疗保障。随着我国改革开放的不断深入，企业经营机制发生了根本性的转变，成为自负盈亏的市场竞争主体，企业保险丧失了存在的基础。20世纪80年代初，社会保险制度改革拉开了序幕。社会保险项目不断丰富，法制建设不断跟进，覆盖面不断扩大，保障范围不断拓展，保障层次不断增多。我国先后进行了养老、医疗、失业、工伤和生育等多方面的改革，初步建立起了国家基本保险、企业补充保险、个人储蓄保险的多层次社会保险体系，社会保险覆盖面从城镇国有机关企事业单位职工扩展到城镇个体工商户、私营企业职工、合同制工人、农民工、失地农民、一般农民。社会保险不断发展一方面得益于党和政府的高度重视与大力支持，另一方面还得益于改革开放带来的经济高速增长及国民收入的不断增加。未来社会保险的发展仍然离不开这些条件。

社会保险平稳运行的核心问题是基金的平衡问题，这关系到如何在考虑各方负担能力的情况下筹集到足够的社会保险基金，又如何有效运用筹集来的社会保险基金以保障劳动者基本生活需要。尽管保险精算已有300多年的发展历史，但我国保险精算的发展仅仅20年，社会保险精算时间则更短。但是人口老龄化与城市化、经济全球化、就业非正规化、经济发展的不平衡性对我国社会保险制度形成严峻挑战，社会保险的健康发展，社会保险方案的制订，改革与完善均需要社会保险精算提供保障。因为社会保险精算从定量的角度研究社会保险运行的规律。

西南财经大学在20世纪80年代初就形成了以林义教授为首的社会保障研究团队，逐步建立了社会保险的本硕博培养体系。作者多年来讲授社会保险精算、

寿险精算、非寿险精算、利息理论，对社会保险精算有较深刻的理解。为此，我们编写了《社会保险精算教程》一书，以期抛砖引玉，共同推动社会保险精算事业的发展。

全书共分七章。第一章到第三章主要介绍了利息的度量、确定年金、生命函数、生存年金与人寿保险的趸缴保费、年缴保费、责任准备金等内容，为后继内容的学习打下必要的基础，同时也提供研究方法上的借鉴。第四章到第七章则主要介绍了社会保险精算基础、社会养老保险精算、失业保险精算和社会医疗保险精算；先介绍相关保险的基本理论，然后再介绍基本的精算方法与原理。本书注重理论联系实际，定量分析与定性分析相结合。第一章到第三章由李恒琦编写，第四章至第六章由张运刚编写。第七章由李恒琦、张运刚共同编写。

鉴于我们能力有限，时间仓促，难免出现错误，恳请读者批评指正。

编　者

2008 年 11 月

目　录

第一章　生命函数及生命表基础

生命表中记载的生存数、死亡数、生存率、死亡率以及平均余命等是寿险精算的基础。而生命表栏目中的生存数、死亡数、生存率、死亡率以及平均余命等，依赖于构建生命表的原始生存数，即0岁的人数及其死亡率。换言之，原始生存人数和它们的死亡率，才是所有生命函数的核心，其他函数均由它们派生而来。像这样的以构成生命表的生存数为基础，而推演出来的各种函数，统称作生命函数。本章将研究生命函数的概念及其计算，阐述生命表构成原理及其基本运用，为寿险精算做必要的准备。

寿险精算的基础就是对被保险人生存和死亡规律的研究。

第一节　生命分布函数

同时出生的一批人随着年龄的增长不断死亡的这件事情是一个随机现象，要研究被保险人生存和死亡规律，就是研究这些随机现象的规律，用概率论的随机变量的分布来展现人的生存和死亡规律。

一、关于死亡年龄的生命分布函数

1. 设 X 为新出生的婴儿(或0岁的人)在死亡时的年龄。X 是一个连续型随机变量。若它的分布函数用 $F(x)$ 表示，则

$$F(x)=P(X\leqslant x)\ (x\geqslant 0)$$

这表明新出生的婴儿尚未能活到 x 岁就发生死亡的概率。

2. 设 $S(x)=1-F(x)=1-P(X\leqslant x)=P(X>x)$

即新出生的婴儿能够活到 x 岁的概率。$S(x)$ 被称作关于 x 的生存函数。

3. 生存函数 $S(x)$ 有如下基本性质：

(1) $S(0)=1$，表示新出生婴儿能够活到 0 岁的概率为 1，或新出生婴儿必然能够活到 0 岁。

$S(\infty)=0$，表示新出生婴儿不可能活到无穷大，或新出生婴儿永远生存是不可能事件。

(2) $S(x)$ 是一个关于 x 的递减函数。

(3) $S(x)$ 一般还是一个关于 x 的连续函数。

4. 综合上述，进一步有

$$\begin{aligned} P(x_1<X<x_2) &= F(x_2)-F(x_1) \\ &= S(x_1)-S(x_2) \end{aligned} \tag{1.1}$$

二、关于生存时间的生命分布函数

1. 设 $T(x)$ 表示年龄 x 岁的人，未来能够生存的时间，或者年龄 x 岁的人直到死亡时所生存的时间。$T(x)$ 通常简写为 T。$T(x)$ 是一个连续型随机变量。若它的分布函数用 $G(t)$ 表示，则

$$G(t)=P(T\leqslant t)$$

它的意义是指 x 岁的人在 t 年内将死亡的概率。

2. 由 $F(x)$ 或 $S(x)$ 描述 $G(t)$

令 $T=X-x$ 则

$$\begin{aligned} G(t) &= P(T\leqslant t)=P(X-x\leqslant t \mid X>x) \\ &= \frac{P(x<X\leqslant x+t)}{P(X>x)} \\ &= \frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)} \\ &= \frac{S(x)-S(x+t)}{S(x)} \end{aligned} \tag{1.2}$$

3. 设 $K(x)$ 表示年龄 x 岁的人，活到死亡时已生存的整年数。$K(x)$ 通常简写为 K。$K(x)$ 是一个离散型随机变量，其取值为 0，1，2，…，K 与 T 的关系是 $K=[T]$，即 K 是 T 的最大整数部。

若它的概率函数用 $P(K=k)$ 表示，则它的概率函数可以转化为 T 的分布，进一步还可以转化为 X 的分布来讨论研究。

$$
\begin{aligned}
P(K=k) &= P(k \leqslant T < k+1) \\
&= G(k+1) - G(k) \\
&= \frac{S(x) - S(x+1+k)}{S(x)} - \frac{S(x) - S(x+k)}{S(x)} \\
&= \frac{S(x+k) - S(x+k+1)}{S(x)}
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

第二节　生命表中的基本生命函数

生命表，又称死亡表，是指某一个数目的 0 岁的人所组成的集合，自 0 岁起一直到生存人数成为 0，即所观察的人群全部死亡为止的这段期间内，以统计数字表明其每年死亡、生存状态的表。生命表是寿险保险费和责任准备金等计算的基础。这就是说，在保险费厘定和责任准备金测定时，一般以现成的生命表为基础，来求它们的值。

生命表中揭示的栏目，生存数、死亡数、生存率、死亡率以及平均余命所代表的函数，就是这里所说的基本生命函数，生命表是寿险精算的基础。

通常，生命表揭示的主要栏目或基本生命函数有

1. l_x：0 岁的人中刚好活到 x 岁的生存人数。

其中 l_0：表示同时出生的一批人数，这是生命表基数。于是有

$$
l_x = l_0 \cdot P(X > x) = l_0 \cdot S(x) \tag{1.4}
$$

在这里我们约定，用 ω 表示生命表年龄上限，存活的最高年龄为 $\omega - 1$。

2. d_x：0 岁的人中在 x 岁与 $x+1$ 岁间的死亡人数。

其中 d_0：0 岁的人数 l_0 经过一年而死去的那部分人数。

$$
\begin{aligned}
d_x &= l_0[P(X > x) - P(X > x+1)] \\
&= l_0[S(x) - S(x+1)] \\
&= l_x - l_{x+1}
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

3. p_x：x 岁的人在一年内生存的概率或 x 岁的人的年内生存率。

$$
p_x = P(T \geqslant 1) = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{1.6}
$$

其中　　$p_{\omega-1} = 0$

4. q_x：x 岁的人在一年内死亡的概率或 x 岁的人的年内死亡率。

$$
q_x = P(T < 1) = \frac{d_x}{l_x} \tag{1.7}
$$

其中 $q_{\omega-1}=1$

5. 基本生命函数之间的关系

$$l_{x+1}=l_x-d_x \tag{1.8}$$

$$p_x+q_x=1 \tag{1.9}$$

例 1.1 已知 $S(x)=1-\frac{x}{100}$，$0\leqslant x\leqslant 100$，且 $l_0=100\ 000$，求 q_{20}与 d_{25}的值。

解
$$q_{20}=\frac{S(20)-S(21)}{S(20)}=\frac{80-79}{80}=\frac{1}{80}$$

$$\begin{aligned}d_{25}&=l_0[S(25)-S(26)]\\&=100\ 000\left[\left(1-\frac{25}{100}\right)-\left(1-\frac{26}{100}\right)\right]\\&=100\ 000\times\frac{1}{100}=1000\end{aligned}$$

此例已知条件合理吗？如果改成 $S(x)=1-\frac{\sqrt{x}}{10}$，$0\leqslant x\leqslant 100$，会有怎样的结果？

生命表揭示的只是相邻整数年龄对应的生死状态。试图直接用它来解决和说明实际中的大量问题，还很难办到。例如，20 岁的人在 5 年内将死亡的概率；70 岁的人尚能存活半年的可能性大小；一群 40 岁的人，在未来平均存活的时间，等等。这些问题的值，显然无法直接从生命表中查到。我们有必要研究更为一般的生命函数。

第三节　一般正整数年龄的生命函数

这节我们研究 x 岁的人将在某一段时间内死亡的生命函数，以及在某一瞬间死亡的变化情况。约定 x 是年龄，t 是正整数。

1. ${}_tp_x$ 表示 x 岁的人未来能够存活 t 年的概率。记为

$${}_tp_x=P(T>t)$$

${}_tp_x$ 的计算，借助于生命表中的生存人数。即

$$\begin{aligned}{}_tp_x&=P(T>t)\\&=1-P(T\leqslant t)=1-P(X-x\leqslant t\mid X>x)\\&=1-\frac{P\ (x<X\leqslant x+t)}{P\ (X>x)}\end{aligned}$$

$$=1-\frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)}=1-\frac{S(x)-S(x+t)}{S(x)}$$

$$=\frac{S(x+t)}{S(x)}=\frac{l_{x+t}}{l_x} \tag{1.10}$$

其中 $\quad {}_xp_0=P(T>x)=P(X>x)=S(x)$

2. ${}_tq_x$ 表示 x 岁的人在未来的 t 年内发生死亡的概率。其表示为

$$\begin{aligned}{}_tq_x&=P(T\leqslant t)\\&=1-P(T>t)=1-{}_tp_x\\&=1-\frac{l_{x+t}}{l_x}=\frac{l_x-l_{x+t}}{l_x}\end{aligned} \tag{1.11}$$

显然，${}_tp_x+{}_tq_x=1$

3. ${}_td_x$ 表示0岁的人在活到 x 岁以后的 t 年内发生死亡的人数(或者0岁的人当中在 x 岁与 $x+t$ 岁间发生的死亡人数)。

(1) 概率表达式为

$$\begin{aligned}{}_td_x&=l_0[P(X>x)-P(X>x+t)]\\&=l_0[S(x)-S(x+t)]\\&=l_0S(x)-l_0S(x+t)=l_x-l_{x+t}\end{aligned} \tag{1.12}$$

(2) 用生命表中的死亡人数表示为

$$\begin{aligned}d_x&=l_x-l_{x+t}\\&=(l_x-l_{x+1})+(l_{x+1}-l_{x+2})+(l_{x+2}-l_{x+3})+\cdots\\&\quad+(l_{x+t-1}-l_{x+t})\\&=d_x+d_{x+1}+\cdots+d_{x+t-1}\end{aligned} \tag{1.13}$$

这个式子表示 t 年内的死亡人数，等于 t 年内的各年的死亡人数之和。

(3) x 岁的生存人数用生命表中的死亡人数表示为

$$\begin{aligned}l_x&={}_td_x+l_{x+t}\\&={}_td_x+d_{x+t}+l_{x+t+1}\\&=d_x+d_{x+1}+\cdots+d_{x+t-1}+d_{x+t}+d_{x+t+1}+\cdots\\&=d_x+d_{x+1}+\cdots+d_{\omega-1}\end{aligned} \tag{1.14}$$

在生命表中通常约定终极年龄 ω 对应的 $l_\omega=0$。

4. ${}_{t_1|t_2}q_x$ 表示 x 岁的人在 $x+t_1$ 岁至 $x+t_1+t_2$ 岁之间将发生死亡的概率。其表示为

$$\begin{aligned}{}_{t_1|t_2}q_x&={}_{t_1}p_x-{}_{t_1+t_2}p_x\\&={}_{t_1+t_2}q_x-{}_{t_1}q_x\end{aligned}$$

$$= {}_{t_1}p_x \cdot {}_{t_2}q_{x+t_1}$$

$$= \frac{l_{x+t_1} - l_{x+t_1+t_2}}{l_x} \tag{1.15}$$

例 1.2 求年龄 20 岁的人，在 25 ~ 30 岁之间将发生死亡的概率。(附录 1 为计算基础)

解 设所求概率为 P，则

$$P = P(5 < T(20) \leqslant 10)$$

$$= P(T(20) \leqslant 10) - P(T(20) \leqslant 5)$$

$$= {}_5p_{20} \cdot {}_5q_{25} = \frac{l_{25}}{l_{20}} \cdot \frac{l_{25} - l_{30}}{l_{25}} \quad 查表$$

$$= \frac{3\ 436}{990\ 057} = 0.00\ 347$$

5. 死力：μ_x 表示 x 岁的死亡力。

(1) 定义：在活到 x 岁的人当中，在一瞬间里死亡的人所占比率，记作 μ_x。

(2) 用严格的数学关系定义为：

设 x 岁到 $x + \Delta x$ 岁，Δx 年为改变量。

据前述已知 $G(t) = P(T \leqslant t)$ $T = X - x$ 令 $t = \Delta x$ 有

$G(t) = P(T \leqslant \Delta x)$ 是指 x 岁的人在 Δx 年内将死亡的概率

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(T \leqslant \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X \leqslant x + \Delta x \mid X > x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x) - S(x + \Delta x)}{S(x) \cdot \Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{S(x)}$$

$$= -\frac{S'(x)}{S(x)} \tag{1.16}$$

死力又称作死亡密度。在寿险精算的理论研究中有重要的作用。

由减因引起保单在瞬间失效的概率，称为“衰减力”。当减因仅为死亡因素时，衰减力就称为死(亡)力。死力能反映确切年龄的死亡水平。

(3) 用死力表示 $T(x)$ 概率密度函数

据前述已知 $T(x)$ 的分布函数为 $G(t) = P(T \leqslant t) = {}_tq_x$

$T(x)$ 概率密度函数 $g(t) = G'(t) = \frac{d}{dt}{}_tq_x$

$$=\frac{d}{dt}[1-{}_tp_x]=\frac{d}{dt}\left[1-\frac{S(x+t)}{S(x)}\right]$$

$$=-\frac{dS(x+t)}{dt}\cdot\frac{1}{S(x)}=-\frac{S'(x+t)}{S(x)} \tag{1.17}$$

$$=-\frac{S(x+t)}{S(x)}\cdot\frac{S'(x+t)}{S(x+t)}={}_tp_x\cdot\mu_{x+t} \tag{1.18}$$

根据 $T(x)$ 概率密度函数；${}_tp_x$ 和 ${}_tq_x$ 可以表示如下

$${}_tp_x=\int_t^{\infty}{}_tp_x\mu_{x+t}dt \tag{1.19}$$

$${}_tq_x=\int_0^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt \tag{1.20}$$

因为 ${}_tp_x+{}_tq_x=1$ 进而有 $\int_0^{\infty}{}_tp_x\mu_{x+t}dt=1$

（4）用死力表示 ${}_tp_x$ 和 ${}_tq_x$

根据 μ_x 的定义

$$\mu_x=-\frac{S'(x)}{S(x)}=-\frac{d}{dx}\ln S(x)$$

$$-\mu_xdx=d\ln S(x) \qquad \text{两边积分得}$$

$$-\int_0^x\mu_xdx=\int_0^x d\ln S(x)=\ln S(x)$$

从而 $$S(x)=e^{-\int_0^x\mu_s.ds} \tag{1.21}$$

所以 $${}_tp_x=e^{-\int_x^{x+t}\mu_s.ds} \tag{1.22}$$

$${}_tq_x=1-e^{-\int_x^{x+t}\mu_s.ds} \tag{1.23}$$

6. L_x：x 岁的人平均生存的人年数。

人年是表示人群存活时间的复合单位，一人年表示一个人存活了一年。L_x 是指活到确切年龄 x 岁的人群 l_x 在到达 $x+1$ 岁前平均存活的人年数。

（1）当死亡人数在每个年龄区间上均匀分布时

$$L_x=\frac{l_x+l_{x+1}}{2} \tag{1.24}$$

（2）当死亡人数在每个年龄区间上不服从均匀分布时 L_x 的一般计算如下：

$$L_x=\int_0^1 t\cdot l_{x+t}\cdot\mu_{x+t}.dt+l_{x+t}$$

$$=\int_0^1 l_{x+t}\cdot dt \tag{1.25}$$

7. T_x：x 岁的人群未来累计生存人年数。

未来累计生存人年数表示存活到确切年龄的人群未来将存活的总人年数。

（1）当死亡人数在每个年龄区间上均匀分布时

$$T_x = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \cdots + L_{\omega-1} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} L_{x+t} \tag{1.26}$$

（2）当死亡人数在每个年龄区间上不服从均匀分布时 T_x 的一般计算如下：

$$T_x = \int_0^{\infty} t \cdot l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt = \int_0^{\infty} l_{x+t} \cdot dt \tag{1.27}$$

第四节　生命期望值

生命期望值又称为平均余命，是针对人群中或某年龄的集团中每个成员的余命的平均值。用平均余命表达某年龄的人在未来预期能够活多久。

平均余命有两种形式：完全平均余命和简约平均余命

1. 完全平均余命

（1）定义：某年龄对应的完全平均余命，是指全部可能生存的期间，包括不满一年的零数均计算在内的余命的平均值。年龄 x 岁的人的完全平均余命用 $\mathring{e}_x$ 表示。

（2）年龄 x 岁的人的完全平均余命的计算

根据完全平均余命的定义

$$\begin{aligned} \mathring{e}_x &= E(T(x)) = \int_0^{\infty} t \cdot g(t) \cdot dt \\ &= \int_0^{\infty} t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^{\infty} {}_tp_x \cdot dt \\ &= \frac{\int_0^{\infty} l_{x+t} \cdot dt}{l_x} = \frac{T_x}{l_x} \end{aligned} \tag{1.28}$$

当 $x=0$　$\mathring{e}_0 = \dfrac{T_0}{l_0}$表示同时出生的一批人的平均寿命，即从出生到死亡平均每人存活的年数。

2. 简约平均余命

（1）定义：某年龄对应的简约平均余命是指只考虑所生存的整年期，不包括不满一年的零数而计算的余命的平均值。年龄 x 岁的人的简约平均余命用 e_x