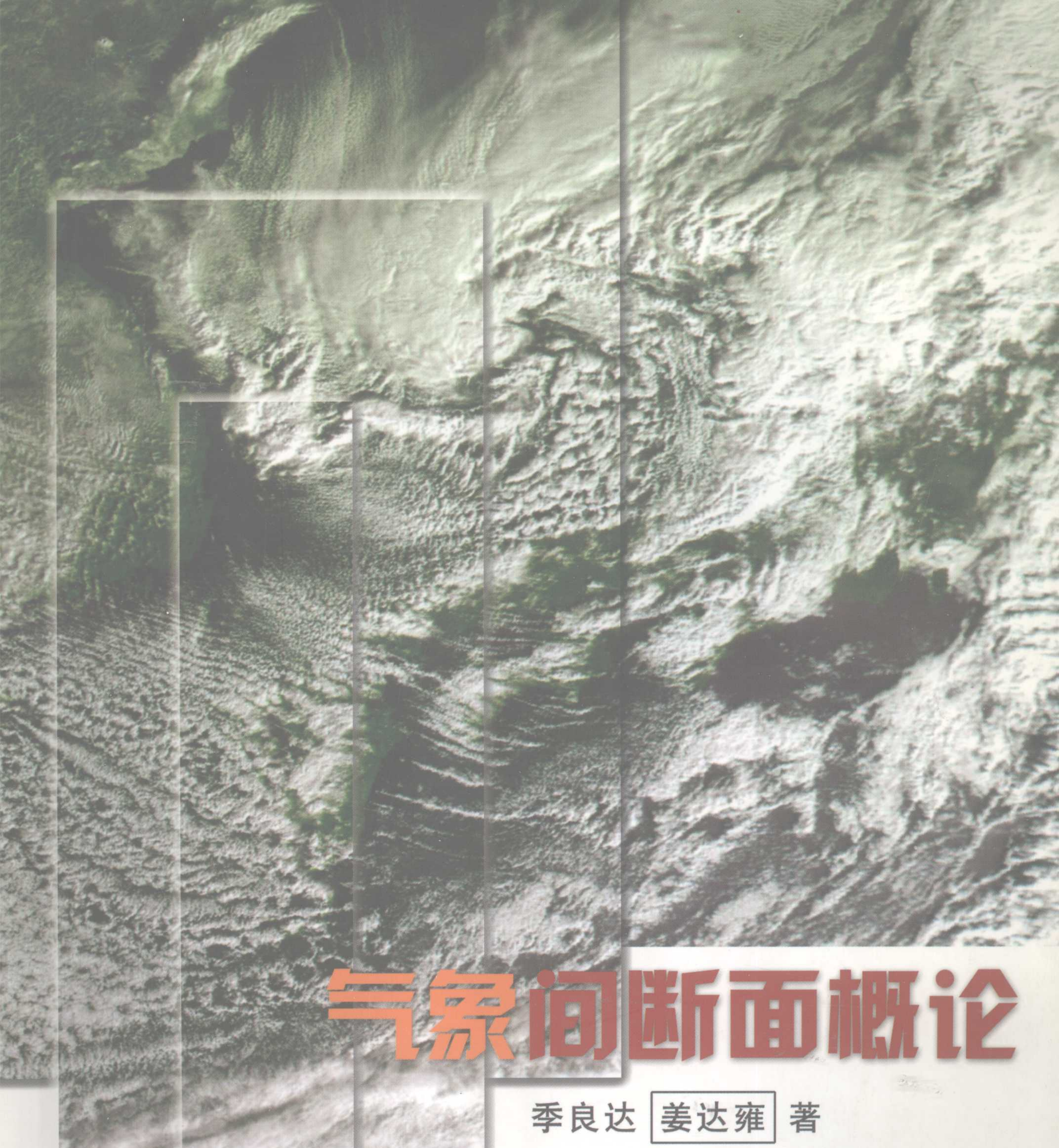

气象间断面概论

季良达 姜达雍 著

气象出版社

气象间断面概论

季良达 姜达雍 编著

气象出版社

70
30

图书在版编目(CIP)数据

气象间断面/季良达,$\boxed{\text{姜达雍}}$著.—北京:气象出版社,2004.8
ISBN 7-5029-3794-3

Ⅰ.气…　Ⅱ.①季…②姜…　Ⅲ.气象学　Ⅳ.P4

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第074790号

出 版 者:气象出版社
地　　址:北京中关村南大街46号
邮　　编:100081
网　　址:http://cmp.cma.gov.cn
E-mail:qxcbs@263.net
责任编辑:刘厚堂
终　　审:纪乃晋
封面设计:王　伟
责任技编:都　平
责任校对:时　人
印　　刷:北京京科印刷有限公司
发　　行:气象出版社
开　　本:787×1092　1/16
印　　张:10.25
字　　数:248千字
版　　本:2004年9月第1版
印　　次:2004年9月第1次印刷
定　　价:30.00元

前　言

《气象间断面概论》全书分七章，流体力学基础知识、卫星图像分析知识、锋面性质和移动、锋生(消)、飑线、龙卷风、热带气旋及其间断面等近26万字。此书强调实践性、理论性、科学性相结合，很适合气象业务、科研人员和专业师生参考使用。

气象间断面是实际气象分析观测中的重要现象。常见气象间断面有锋面、逆温层，常见的气象间断线有锋线、螺旋线、切变线、辐合线、平流前线和飑线等。这些都是气象业务、科研、教学等工作者所深为关注的。本书从间断面的基础知识讲起，然后对主要气象间断面(线)——锋面(线)、飑线、热带气旋(螺旋线)——做了较为详细的介绍。

第一章包括间断面的流体动力学基础知识。

第二章阐述锋面的性质，以及它的移动速度和加速度。

第三章提出锋(面)生消的基本含义，并分别以运动学、动力学、热力学的观点对有关现象进行锋生消的研究。

第四章介绍采用扰动法来处理锋面波的不稳定理论，并扼要研讨了西风气流不稳定理论。

第五章对气象间断面(线)——飑线、切变线、辐合线、龙卷风和热带气旋——的结构做了分析。

第六章为气象间断面在卫星云图上的表现，在此详细介绍了锋面、飑线、锋生消、云线等云系的发生、发展、消亡的变化特征，及其所产生的影响。

第七章为热带气旋云团，本章介绍如何利用卫星云团监测、跟踪热带气旋等。

本书第一、二、三四章由姜达雍撰写，第五、六、七章由季良达撰写，季良达对全书内容作了修改。书中有关公式的导出都力求详尽，在说明问题时，着重注意思路、物理意义以及它的实践性。对本书的不足之处，除了进一步通过实践来修改、充实、提高外，我们殷切期望来自读者的批评与指教。

作者：季良达　姜达雍

2003年11月

目　　录

第 1 章　基本知识

观察研究流体运动时，除了遇到流动物理量（速度、气压、温度、密度等）在流场中保持缓慢连续变化外，经常也还遇到流动物理量在通过流场中某一狭窄区域时发生了间断，呈现了不连续现象。本章的目的，在于简要地介绍这些不连续现象的基本知识。读者如对间断面（或称不连续面）的流体力学理论有兴趣，可参考库滋涅佐夫（1951），朗道（1954），拉姆（1945）所著的教科书。

1.1　气象间断面的来源、定义及种类

1.1.1　来源

在实际工作中，仔细分析天气图和大气垂直剖面图，会发现经常有分割均匀气团的狭窄过渡区（带），在过渡区里，大多数气象要素都有迅速的变化。由于这些过渡区的厚度与其本身截面积相比往往是一个小量，因此在研究时就常可以认为它是一个面，这样，就引进了间断面的概念。在小比例尺的图上，也常用线条来表示它。这种面或线的形式，早已在气象业务工作中被广泛采用，它对于过渡区特性的理论研究是极为方便的。

1.1.2　定义

当流体质点穿过大气中一个曲面的两边，气象要素（本身或其某一级微商）发生不连续，则这种曲面就称为气象间断面（或称气象不连续面）。

数式：今考察当流体质点穿过间断面时，标量函数 $f(x,y,z;t)$[①] 的变化。

假设在时刻 t，在运动着的大气中有分割某一体积 τ 为两个区域 τ_1 及 τ_2 的曲面 S_t（图 1.1）。当流体质点从区域 τ_1 一方及从区域 τ_2 一方趋向曲面 S_t 的一点 $M(x,y,z)$ 时，所考察的标量函数 $f(x,y,z;t)$ 分别得到值 $f_1(x,y,z;t)$ 及 $f_2(x,y,z;t)$，而且 $f_1 \neq f_2$。这就是该函数 $f(x,y,z;t)$ 在 S_t 曲面的 M 点上其连续性受到破坏，其差 $f_2 - f_1$ 显然表示流体质点的 $f(x,y,z;t)$ 在穿过曲面 S_t 的跳跃。可用符号 $[f]$ 或 Δf 来表示：

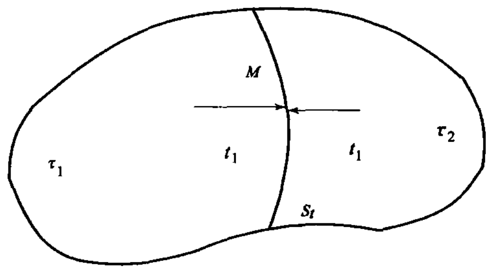

图 1.1　流场中的曲面 S_t

$$[f] = \Delta f = f_2 - f_1 \neq 0 \tag{1.1}$$

① 标量函数 $f(x,y,z;t)$ 在不同的问题中可以有不同的物理意义，例如速率 v，密度 ρ，温度 T，气压 p 等。

如果在时刻 t 在曲面 S_t 的所有点处，函数 $f(x,y,z;t)$ 的连续性都受到破坏，则曲面 S_t 可称为一个零阶间断面(或称零阶不连续面)。

如果函数 $f(x,y,z;t)$ 及其一阶偏微商 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z},\frac{\partial f}{\partial t}$，在时刻 t 在区域 τ_1 及 τ_2 内所有点处都是连续的，但是当流体质点穿过曲面 S_t 时，所考察的标量函数的一阶偏微商的全体或其中一些的连续性受到破坏，则曲面 S_t 可称为一阶间断面。

显然函数 $f(x,y,z;t)$ 的一阶偏微商的跳跃可由下式表示：

$$
\left.\begin{aligned}
\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]=\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_2-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1\\
\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]=\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_2-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1\\
\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]=\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_2-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1\\
\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]=\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_2-\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_1
\end{aligned}\right\}\tag{1.2}
$$

仿上述原理，我们很容易得到流体质点穿过二阶间断面……n 阶间断面时，标量函数 $f(x,y,z;t)$ 的二阶偏微商……n 阶偏微商的跳跃表达式：

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]=\Delta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_2-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_1 \quad ; \quad \cdots \tag{1.3}$$

…

$$\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right]=\Delta\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)=\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_2-\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_1 \quad ; \quad \cdots \tag{1.4}$$

推广：间断面的概念也可以推广到矢量函数上。由于任何一矢量函数 $\vec{f}(x,y,z;t)$ 可以表示为：$\vec{f}(x,y,z;t)=\vec{i}f_x(x,y,z;t)+\vec{j}f_y(x,y,z;t)+\vec{k}f_z(x,y,z;t)$，其中 f_x,f_y,f_z 是矢量 $\vec{f}$ 在坐标轴上的投影，而 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 是坐标轴单位矢量，则显然对矢量函数 $\vec{f}(x,y,z;t)$ 的不连续的研究，可以化为同时对三个作为其沿坐标分量函数之不连续性的研究。例如，在零阶间断面的情况，当流体质点穿过曲面 S_t 时，矢量函数 $\vec{f}(x,y,z;t)$ 的跳跃公式为：

$$[\vec{f}]=\Delta\vec{f}=\vec{i}\Delta f_x+\vec{j}\Delta f_y+\vec{k}\Delta f_z\neq 0 \tag{1.5}$$

相对于曲面 S_t 矢量 $\Delta\vec{f}$ 可以有任意方向。假使 $\Delta\vec{f}\perp\vec{n}$，此处 $\vec{n}$ 是曲面 S_t 的单位法向矢量，则间断称为横向的；假使 $\Delta\vec{f}/\!/\vec{n}$，则间断称为纵向的。

今设曲面 S_t 的方程式为：$F(x,y,z;t)=0$，它的法向矢量的方向余弦 α,β,γ 可由下式表示：

$$\alpha=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial x};\quad \beta=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial y};\quad \gamma=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial z}$$

此处 $r=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$，则横向间断的条件是

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta f_x\alpha+\Delta f_y\beta+\Delta f_z\gamma=0\\
\text{或}\quad&\Delta f_x\frac{\partial F}{\partial x}+\Delta f_y\frac{\partial F}{\partial y}+\Delta f_z\frac{\partial F}{\partial z}=0
\end{aligned}\right\}\tag{1.6}
$$

而纵向间断的条件是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\Delta f_x}{\alpha}=\frac{\Delta f_y}{\beta}=\frac{\Delta f_z}{\gamma}\\ &\frac{\Delta f_x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{\Delta f_y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{\Delta f_z}{\frac{\partial F}{\partial z}}\end{aligned}\right\}\quad(1.7)$$

或

此处 F 是间断面方程左方的函数。

1.1.3 种类

主要气象间断面有：

(1)锋面，是密度 ρ、温度 T、风速 $\vec{v}$ 的零级间断面，是气压 p 的一级间断面。有时也将它看成是密度、温度的一级间断面[①]。

(2)对流层顶，是 ρ、T、$\vec{v}$ 的一级间断面。

(3)逆温层，是 T 的零级间断面。

其中以锋面特别重要，因为①锋面有大量可用的位能存在，它可以变成动能而影响空气运动，因此产生天气过程。②锋面经常是一物质面[②]，在适当的动力学及运动学边界条件下，可以产生大规模的上升运动而造成天气过程。因此本书以下各章将着重介绍这方面的研究成果。

此外，主要气象间断线有：锋线、切变线、辐合线、平流前线、飑线。

1.2 间断面的移动速度与传播速度

上节引进了间断面的概念，间断面是流场中物理量的不连续面，因而它应当是由流体质点所组成。这种组成的方式可能有两种：(1)任何时刻组成间断面的流体质点是不变的。即间断面与流体质点一起移动着。气象学中经常遇到的就是这类间断面。(2)任何时刻组成间断面的流体质点都是不同的。即间断面相对运动着的流体质点有移动。例如炸弹爆炸所生成的间断面与高速飞行器所生成的间断面均属此类间断面。

第一类间断面(常定间断面)，也常称为"气象间断面"，对此将引入移动速度；第二类间断面又称非常定间断面，对此将引入传播速度。

1.2.1 常定间断面的移动速度

本小节将研究第一类间断面相对于固定坐标轴的运动，其思路是写出不同时刻的间断面方程式，然后来确定其移动速度。描述流体运动的方法采用欧拉方法。

设在时刻 t 在运动着的流体中存在一间断面 S_t(图1.2)。在时刻 Δt 之后间断面相对于固定坐标轴产生移动，并设在时刻 $t+\Delta t$ 间断面的位置为 $S_{t+\Delta t}$。在间断面 S_t 上取任意一点 $M(x,y,z)$ 并在此点作出对曲面 S_t

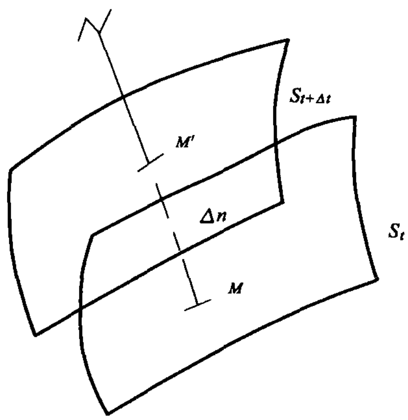

图 1.2　曲面 S_t 的移动

① 将锋面看成密度和温度的零级间断面或一级间断面，与实际工作中所采用的天气图比例尺的大小有关。

② 锋面是主要气象间断面，它经常被看成是物质面(其证明见 1.3 节——气象间断面的相容性条件)。简而言之，间断面不以声速传播，便是物质面。然而锋面不是绝对的数学间断面，所以将锋面看成是物质面有时并不准确，甚至相差很远。

的法线，延长到与曲面 $S_{t+\Delta t}$ 相交于 $M'(x',y',z')$ 点，则 $MM'=\Delta n$，它表示在时间间隔 Δt 之后，间断面在空间中沿上述法线移动的距离，所以间断面 S_t 相对于固定坐标的移动速度为：

$$N=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta n}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \tag{1.8}$$

间断面的移动速度 N，与存在着的流体质点运动没有任何联系，因为流体质点完全可以横穿过间断面。

导求 N：写出不同时刻的间断面方程求 N。

在时刻 t，满足间断面位置坐标 x,y,z 的方程为

$$F(x,y,z;t)=0$$

在时刻 $t+\Delta t$，满足间断面位置坐标 $x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z$ 的方程为

$$F(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z;t+\Delta t)=0$$

用泰勒级数展开上式，并略去二级以上微量后有

$$F(x,y,z;t)+\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z+\frac{\partial F}{\partial t}\Delta t=0$$

由于 $F(x,y,z;t)=0$，以及

$$\Delta x=\Delta n\cos(\widehat{n,x})=\Delta n\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{1}{r}$$

$$\Delta y=\Delta n\cos(\widehat{n,y})=\Delta n\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{1}{r}$$

$$\Delta z=\Delta n\cos(\widehat{n,z})=\Delta n\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{1}{r}$$

代入上式则有

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\Delta n}{\Delta t}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{1}{r}+\frac{\Delta n}{\Delta t}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{1}{r}+\frac{\Delta n}{\Delta t}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{1}{r}=0$$

整理有：

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\Delta n}{\Delta t}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{r}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\Delta n}{\Delta t}\frac{r^2}{r}=0$$

移项有

$$\frac{\Delta n}{\Delta t}=-\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{1}{r}$$

因此，间断面 S_t 的移动速度可写成

$$N=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta n}{\Delta t}=-\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{1}{r} \tag{1.9}$$

讨论式(1.9)：

(1) 假使把从区域 τ_1 进入区域 τ_2 的方向的曲面方向作为正方向，并在 r 前面取沿曲面 S 法线方向所指的那一边的函数 $F(x,y,z;t)$ 所取的符号，则移动速度就完全确定了。

(2) 如 $\frac{\partial F}{\partial t}=0$，则 $N=0$，说明间断面随着时间的进展，并不相对于固定坐标轴运动，亦不变形。

1.2.2 非常定间断面的传播速度

本小节将研究第二类间断面相对于运动着的流体质点的运动，在讨论中可将流体质点当做不动。其思路仿前。描述流体运动的方法采用拉格朗日方法以及两种描述流体运动方法的

转换关系。

设以 G_0 代表曲面在起始体积中移动的速度，假使曲面 S_0 的方程取为 $F_0(a,b,c;t)=0$，显而易见，速度 G_0 可由与式(1.9)同样的公式决定出来，即：

$$G_0=-\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{1}{r_0} \tag{1.10}$$

其中 $r_0=\sqrt{\left(\frac{\partial F_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F_0}{\partial z}\right)^2}$。

公式(1.9)与(1.10)的本质区别在于：N 是曲面 S_t 的移动速度，产生这曲面和流体在一起的运动，以及相对于流体的移动。而 G_0 是曲面 S_0 的传播速度，它仅是曲面 S_0 相对于流体的移动速度，而把流点当做是不动的。由公式(1.10)知道了 G_0 后，就易于求得间断面 S_t 相对于流体的速度。

用分析方法导求 N 与 G_0 之间的关系：

曲面 S_t 的方程为

$$F(x,y,z;t)=0$$

曲面 S_0 的方程为

$$F_0=(a,b,c;t)=F[x(a,b,c;t),y(a,b,c;t),z(a,b,c;t);t]=0$$

将上式双方对 t 求偏微商，有

$$\frac{\partial F_0}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x}u+\frac{\partial F}{\partial y}v+\frac{\partial F}{\partial z}w+\frac{\partial F}{\partial t}$$

其中 $u=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$w=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$分别表示在时刻 t 在间断面 S_t 上流体质点的速度分量。

由于$\frac{\partial F}{\partial x}=\alpha r$；$\frac{\partial F}{\partial y}=\beta r$；$\frac{\partial F}{\partial z}=\gamma r$①，则代入上式后，有

$$\frac{\partial F_0}{\partial t}=u\alpha r+v\beta r+w\gamma r+\frac{\partial F}{\partial t}=r(u\alpha+v\beta+w\gamma)+\frac{\partial F}{\partial t}$$

用$\frac{1}{rr_0}$除上式两边有

$$\frac{1}{rr_0}\frac{\partial F_0}{\partial t}=\frac{1}{r_0}(u\alpha+v\beta+w\gamma)+\frac{1}{rr_0}\frac{\partial F}{\partial t}$$

由式(1.9)与(1.10)知

$$-N=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial t};\qquad -G_0=\frac{1}{r_0}\frac{\partial F}{\partial t}$$

并且

$$V_n=u\alpha+v\beta+w\gamma$$

这里 V_n 是表示在时刻 t 在曲面 S_t 上流体质点速度的法向分量。将这些关系代入上式有

$$-\frac{1}{r}G_0=\frac{1}{r_0}V_n-\frac{1}{r_0}N$$

整理得

---

① 因为 $\Delta x=\Delta n\cos(\widehat{n,x})=\Delta n\frac{\partial F}{\partial x}\frac{1}{r}$，所以$\frac{\Delta x}{\Delta n}=\cos(\widehat{n,x})=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{1}{r}$，即$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\Delta x}{\Delta n}r=\cos(\widehat{n,x})=\alpha r$。

同理可以证明$\frac{\partial F}{\partial y}=\beta r$；$\frac{\partial F}{\partial z}=\gamma r$。这里的 α,β,γ 是曲面 S_t 法线的方向余弦。

$$G_0=\frac{r}{r_0}(N-V_n) \tag{1.11}$$

今设起始时刻 t_0 与所考虑的时间重合，则曲面 S_0 与间断面 S_t 重合，因此 $F=F_0$，$r=r_0$，曲面 S_0 的速度 G_0 此时由速度 G 所代替，曲面 S_0 即以此速度相对流体而运动，而它即称为间断面的传播速度。

在 $t_0=t$ 时，间断面的传播速度表示为

$$G=N-V_n \tag{1.12}$$

公式(1.12)说明：间断面的传播速度等于曲面的移动速度及流体质点的法向速度之差。

由公式(1.12)解出 N，有

$$N=G+V_n \tag{1.13}$$

公式(1.13)说明：间断面的移动速度是由其相对于流体的运动速度(G)及其和流体质点一起的运动速度(V_n)所组成。

讨论公式(1.12)与(1.13)：

(1)假使流体是不动的，则 $V_n=0$，从而 $N=G$。这也就是说，移动速度与传播速度相等。

(2)假使间断面对于流体并不移动，则 $G=0$，从而 $N=V_n$。显然，在这种情况下，间断面是由同样的流体质点所组成。也就是说，间断面是常定间断面。

(3)假使 $N=0$，即间断面并不相对于固定坐标轴移动，则 $G=-V_n$。这就是说，间断面在流体中以和流体质点大小相同、方向相反的速度运动着。

用几何方法导求 N 与 G 之间的关系：

以 τ 及 τ_1 代表相应于时刻 t 及 $t+\Delta t$ 的流体体积(图 1.3)，假设 S_t 及 $S_{t+\Delta t}$ 是相应于这些时刻的间断面，则如上述，移动速度由以下极限表示：

$$N=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}$$

其中 $\overrightarrow{MM_1}\perp S_t$。在体积 τ 内指出那些流体质点，在时刻 $t+\Delta t$ 形成间断面 $S_{t+\Delta t}$(处于体积 τ_1 之中)；这些流体质点处于某曲面 $S'_{t+\Delta t}$ 之上，这曲面与对曲面 S_t 作的法线 MM_1 相交于 M' 点，这法线的 $\overrightarrow{MM'}$ 一段显然表示出间断面相对于起始体积 τ 的移动，因此，得到传播速度 G 的公式

$$G=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

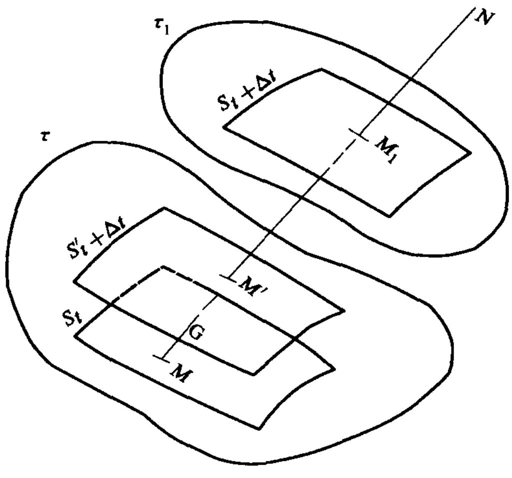

图 1.3　N 与 G 的几何图示

最后，法线 $\overrightarrow{M'M_1}$ 这一段表示出间断面在该法线方向随流体的移动，因此间断面这部分移动速度等于流体的法向速度并由下式给出：

$$V_n=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{M'M_1}}{\Delta t}$$

综上所述，并参照图 1.3，则显然有

$$\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{M'M_1}$$

上式各项除以 Δt，并取当 $\Delta t\to 0$ 时的极限有

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{M'M_1}}{\Delta t}$$

即

$$N=G+V_n$$

显然这就是式(1.13)。

由于间断面两边有一个差异，为了能简便区分这两边的物理量，常约定用这样的符号，假定间断面外法线方向指向曲面 $F(x,y,z;t)>0$ 的区域，而且曲面向着 $F>0$ 运动，那么我们把 $F(x,y,z;t)>0$ 区域称为第二区域(或称正区)，位于间断面这一边的物理量下标以"+"号表示，而把在 $F(x,y,z;t)<0$ 的区域称为第一区域(或称负区)，位于间断面这一边的物理量下标以"-"号表示。

本节虽然从分析和几何的角度考虑了间断面的移动速度和传播速度，然而，在通常情况下，我们还是很难求到的。因为实际上它们是通过间断面的物理量的变化关系来估计或计算的。因此在 1.3 节中我们将进行这样的工作——推导出间断面两边的物理量的关系。

1.3 间断面的相容性条件

本节任务：导求间断面前后物理量应满足的关系式——这些相当于连续方程、运动方程、能量方程的关系式，又称为间断面的相容性条件。

基本思路：虽然物理量通过间断面发生了间断，然而和其他运动一样，间断面的运动也遵守三个基本规律——(1)质量守恒定律，(2)动量守恒定律，(3)能量守恒定律。我们根据上述三定律，首先利用通过间断面前后物理量所遵守的关系式，在通常情况下间断面前物理量已知，来导出间断面后物理量应满足的关系式；其次，利用这些值作为边界条件之一，应用运动微分方程组，可解得间断面后流场的状态。

1.3.1 间断面的类似连续方程

主题：质量守恒定律在具有间断面的流场中的表达形式。

思路：

(1)求间断面的移动位移和流体质点的法向位移。设想有一个圆柱型管的流动，它的母线与间断面垂直(即与法线方向 n 重合)，它的横切面积为 $\mathrm{d}S$(图 1.4)。

在时刻 t 间断面位于 AB，经过时刻 $\mathrm{d}t$ 后，间断面由 AB 的位置移到了 $A'_1B'_1$ 的位置，所以间断面的移动位移为：

$$AA'_1=BB'_1=N\mathrm{d}t \tag{1.14}$$

式中 N 是间断面的移动速度。

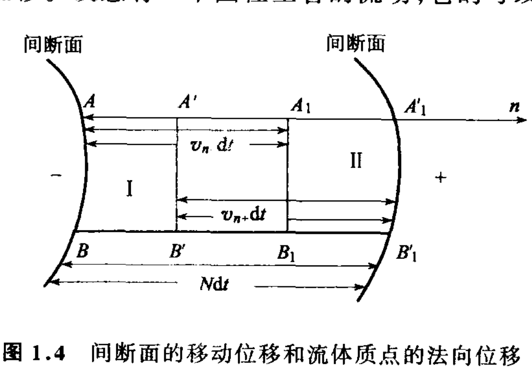

图 1.4 间断面的移动位移和流体质点的法向位移

又设间断面的移动速度大于流体质点的运动速度，于是，开始时组成间断面的流体质点，在 $\mathrm{d}t$ 时刻内所移动的距离应小于 AA'_1，而达到 AA_1 的位置，这类(第一类)流体质点是位于间断

面的第一区域(负区)内,所以在时刻 t 间断面上的流体质点,在时刻 $\mathrm{d}t$ 后的位移为:

$$AA_1 = BB_1 = v_{n-}\mathrm{d}t \tag{1.15}$$

同理,在终结时,间断面横截面积 $A'_1B'_1$ 上的流体质点,则是在开始时位于间断面右边的流体质点(即位于 $A'B'$ 位置的流体质点),所以这类(第二类)流体质点运动于间断面的第二区域(正区)内,因此在时刻 t 位于截面 $A'B'$ 上的流体质点,在时刻 $\mathrm{d}t$ 后的位移为:

$$A'A'_1 = B'B'_1 = v_{n+}\mathrm{d}t \tag{1.16}$$

公式(1.15)和(1.16)内的 v_{n-} 和 v_{n+},分别表示负、正区域内垂直间断面的分速(即间断面的法向分速)。

(2)研究在开始时充填在体积Ⅰ里的流点,经过时刻 $\mathrm{d}t$ 后它们充填在体积Ⅱ里的基本情况。

根据公式(1.14)、(1.15)和(1.16),我们有

$$\left.\begin{aligned} AA' = AA'_1 - A'A'_1 = (N - v_{n+})\mathrm{d}t \\ A_1A'_1 = AA'_1 - AA_1 = (N - v_{n+})\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

其中 $AA' = BB'$,表示开始时流体质点充填在体积Ⅰ($AA'BB'$)的高(截面长度);$A_1A'_1 = B_1B'$,表示在终结时流体质点充填在体积Ⅱ($A_1A'_1B_1B'_1$)的高(截面长度)。

所以,在开始时,由于流体质点位于正域内,则它们的质量在圆柱形母线方向式内的分量,可以写成:

$$m_1 = \rho_+ V_2(\text{密度}\times\text{体积}) = \rho_+\mathrm{d}S\cdot AA'(\text{密度}\times\text{截面积}\times\text{高}) = \rho_+(N - v_{n+})\mathrm{d}S\mathrm{d}t \tag{1.18}$$

同理,对于在终结时位于负区内的容积Ⅱ来说,也同样得出

$$m_2 = \rho_- V_2 = \rho_-\mathrm{d}S\cdot A_1A'_1 = \rho_-(N - v_{n-})\mathrm{d}S\mathrm{d}t \tag{1.19}$$

根据质量守恒定律 $m_1 = m_2$,由式(1.18)和(1.19)能立即得出(在单位截面与单位时间时):

$$\left.\begin{aligned} \rho_+(N - v_{n+}) = \rho_-(N - v_{n-}) \\ \text{或}\quad \rho_+(N - v_{n+}) - \rho_-(N - v_{n-}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

将式(1.12)代入,则上式可变形为:

$$\left.\begin{aligned} \rho_+G_+ = \rho_-G_- \\ \text{或}\quad \rho_+G_+ - \rho_-G_- = \Delta(\rho G) = [\rho G] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

结论:公式(1.20)和(1.21)就是当间断面存在时运动中的类似连续方程。它给出了通过间断面前后密度与间断面传播速度之间的关系[见公式(1.21)]。而公式(1.20),则表明法向速度间断与密度密切相关。当流体不可压缩($\rho =$ 常数)时,$\rho_+ = \rho_-$,所以不可能发生间断。因此,间断面必须发生在可压缩流体中。

1.3.2 间断面的类似运动方程

主题:牛顿第二运动定律在具有间断面的流场中的表达形式。

在变质量力学中,第二运动定律的表达形式可以写成

$$\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

我们知道,物质和运动是不可分割的,因此只用质量或速度都不能完整地量度物体的机械运

动,而应该用它的质量(m)和速度($\vec{v}$)的乘积($m\vec{v}$)来量度,而($m\vec{v}$)就叫做物体的动量,$\vec{F}$ 表示物体所受的外力和。显然动量是物体机械运动的量度。动量是矢量,方向与速度的方向相同。用它来描述牛顿第二运动定律时可以写成:"物体的动量对时间的微商等于外加的作用力"。

上式只能说明力的瞬时作用,即在外力作用之下,一物体动量的瞬时变化率。如果要进一步研究物体在一定时间过程中动量的变化值,那么上式两边乘以 $\mathrm{d}t$ 则有:

$$\mathrm{d}(m\vec{v}) = \vec{F}\mathrm{d}t$$

其中力和时间的乘积($\vec{F}\mathrm{d}t$)叫做力的冲量。冲量是研究物体在一定时间过程中动量变化值的量,它是矢量,方向同力的方向,应用冲量的概念可以进一步讨论的是:力在时间上的积累效果。它又称为动量定理。如用有限差的形式表示(设 $\vec{F}=$常数)则有:

$$\Delta(m\vec{v}) = \vec{F}\Delta t$$

它表明质量动量的有限差等于作用在质点上的外力在有限差时间内的冲量。动量定律是牛顿第二运动定律的直接推论。因此下面我们欲将动量定理应用在具有间断面的流场中。

思路:

(1)在求得间断面的移动位移公式(1.14)和流体质点的法向位移公式(1.15)和(1.16)的基础上进行。

(2)研究在开始时充填在体积Ⅰ里的流体质点,经过时刻 $\mathrm{d}t$ 后它们充填在体积Ⅱ里的情况之二。

今研究在时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内作用在所研究的容积上的外力冲量。在理想流体中(不考虑摩擦力),随着容积的减小,体积力与表面力的比值也随着减小,所以,对于我们所研究的无穷小容积来说,只要考虑表面力——压力就够了。现在考虑作用在与轴 $\vec{n}$ 垂直的截面上的压力,它的方向与 $\vec{n}$ 的方向一致。因为左边的截面,在由 AB 移到 $A'B'$ 的过程中,位于负区内,所以作用在它上面的力 $p_-\mathrm{d}S$ 是指向正的一面的;同理,作用在右边截面上的力 $p_+\mathrm{d}S$ 是指向负的一面的。因此这些压力的合力等于$(p_- - p_+)\mathrm{d}S$,而它在时刻 $\mathrm{d}t$ 内的冲量为$(p_- - p_+)\mathrm{d}S\mathrm{d}t$。

在小柱体 $AA'B'B$ 内流体所具有的动量是:

$$m_1V = \rho_+ v_{n+}(N - v_{n+})\mathrm{d}S\mathrm{d}t = K_1$$

在小柱体 $A_1A'_1B'_1B_1$ 内流体所具有的动量是:

$$m_2V = \rho_- v_{n-}(N - v_{n-})\mathrm{d}S\mathrm{d}t = K_2$$

根据动量定理有:

$$K_2 - K_1 = \Delta K = (p_- - p_+)\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

即

$$\rho_- v_{n-}(N - v_{n-}) - \rho_+ v_{n+}(N - v_{n+}) = p_- - p_+ \tag{1.22}$$

将式(1.12)代入,上式可改写成:

$$\rho_- v_{n-}G_- - \rho_+ v_{n+}G_+ = p_- - p_+ \tag{1.23}$$

结论:公式(1.22)和(1.23)是当有间断面存在时的类似运动方程(更确切一点讲,是它在 $\vec{n}$ 方向上的投影)。或者称为间断面的类似动量方程。

1.3.3 间断面的类似能量方程

主题:能量守恒定律在具有间断面的流场中的表达形式。