(5) $V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2\mathrm{d}x$，令 $x=a(t-\sin t)$，这时 $y=a(1-\cos t)$，于是

$$V=\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)\mathrm{d}t=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^3\mathrm{d}t$$

$$=16\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\mathrm{d}\frac{t}{2}=16\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^6 x\mathrm{d}x=32\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\mathrm{d}x=32\pi a^3\,\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=5\pi^2a^3.$$

10．求星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积 V.

解 $V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\mathrm{d}x=2\pi\int_0^a y^2\mathrm{d}x$. 令 $x=a\cos^3 t$，这时 $y=a\sin^3 t$. $x=0$ 时 $t=\frac{\pi}{2}$，$x=a$ 时，$t=0$.

$$V=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)\mathrm{d}t=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=6\pi a^3\left(\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}-\frac{8}{9}\times\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\right)=6\pi a^3\,\frac{1}{9}\times\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

11．求抛物线 $y^2=2px$ 从 $(0,0)$ 到 (x_0,y_0) 之间的弧长 l.

解 抛物线的参数方程为 $x=\frac{1}{2p}y^2$，$y=y$.

$$l=\int_0^{y_0}\sqrt{\left(\frac{1}{p}y\right)^2+1}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{p}\int_0^{y_0}\sqrt{y^2+p^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{p}\left(\frac{y}{2}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{p^2}{2}\ln\left|y+\sqrt{y^2+p^2}\right|\right)\Bigg|_0^{y_0}$$

$$=\frac{y_0}{2p}\sqrt{y_0^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\left|\frac{y_0+\sqrt{y_0^2+p^2}}{p}\right|.$$

13．求阿基米德螺线 $r=a\theta$ 从 $\theta=0$ 到 $\theta=\theta_0$ 之间的弧长 l.

解 $l=\int_0^{\theta_0}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\theta_0}\sqrt{(a\theta)^2+a^2}\,\mathrm{d}\theta=a\int_0^{\theta_0}\sqrt{\theta^2+1}\,\mathrm{d}\theta$

$$=a\left(\frac{\theta}{2}\sqrt{\theta^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right|\right)\Bigg|_0^{\theta_0}$$

$$=\frac{1}{2}a\theta_0\sqrt{\theta_0^2+1}+\frac{a}{2}\ln\left|\theta_0+\sqrt{\theta_0^2+1}\right|.$$

14．求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长.

解 $r'=-a\sin\theta$，则全长为

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta=4a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\frac{\theta}{2}=4a\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$$

$$=4a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\,dx = 8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 8a.$$

16. 求抛物线 $y^2=4ax$ 由顶点到 $x=3a$ 的一段弧绕 x 轴旋转所得的旋转体侧面积.

解　$y=\sqrt{4ax}$, $y'=\dfrac{2a}{\sqrt{4ax}}$. 侧面积

$$S=2\pi\int_0^{3a}|y|\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\int_0^{3a}\sqrt{4ax}\sqrt{1+\frac{4a^2}{4ax}}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^{3a}\sqrt{4ax+4a^2}\,dx$$

$$=4\pi\sqrt{a}\int_0^{3a}\sqrt{x+a}\,d(x+a)=\frac{56}{3}\pi a^2.$$

17. 求双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 绕极轴旋转所成的旋转体侧面积.

解　$r=a\sqrt{\cos 2\theta}$, $r'=\dfrac{-a\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$, $\sqrt{r^2+r'^2}=\dfrac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}$, 侧面积

$$S=2\cdot 2\pi\int_0^a|y|\,dS = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta = 4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta$$

$$=4\pi a^2(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

习题 6.2

1. 今有一细棒, 长为 10m, 已知距左端点 xm 处的线密度是 $\rho(x)=6+0.3x$(kg/m), 求这个细棒的质量.

解　质量 $M=\displaystyle\int_0^{10}(6+0.3x)dx=75(\text{kg})$.

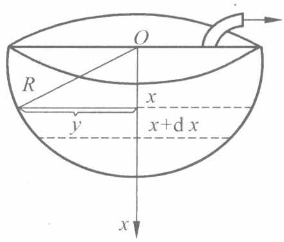
3. 如果 1N 的力能使弹簧原长伸长 1cm, 弹簧服从胡克定律, 现在要使这弹簧伸长 10cm, 问弹簧力做功多少? 外力做功多少?

解　由胡克定律, 力 $F=kx$, x 为伸长的长度, $k=1\text{N/cm}$. 外力做功

$$W=\int_0^{10}kx\,dx=\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^{10}=50k(\text{cm})^2=50\text{Ncm}=0.5\text{Nm}=0.5\text{J}.$$

弹簧力做功为 -0.5J.

4. 半径为 R 的半球形水池灌满了水, 要把池内的水完全抽尽, 需做功多少(水的密度为 ρ).



题4图

解　x 轴如题4图所示, 原点在水池大圆的圆心, x 轴垂直大圆向下, 水的所在区间为 $[0,R]$. $\forall x\in(0,R)$, 过 x 点作垂直于 x 轴的平面截水池的圆半径 $y=\sqrt{R^2-x^2}$, 圆面积为 $\pi(R^2-x^2)$. $[x,x+dx]$ 水层的体积

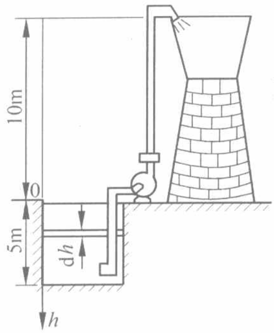
$$dV\approx\pi(R^2-x^2)dx.$$

这层水抽出水池做的功微元为

$$\mathrm{d}W = \pi(R^2 - x^2)x\mathrm{d}x(\rho g).$$

全部抽尽做的功

$$W = \int_0^R \pi(R^2 - x^2)x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\int_0^R (R^2 - x^2)\mathrm{d}(R^2 - x^2) = \frac{1}{4}\pi R^4(\rho g).$$



题 5 图

5. 如题 5 图所示，有一横截面面积为 $S=20\mathrm{m}^2$，深为 5m 的水池，装满了水，要把池中的水全部抽到高为 10m 的水塔顶上去，要做多少功?

解 如题 5 图所示，$[0,5]$上任一元素区间$[h,h+\mathrm{d}h]$这层水的重力为 $9.8\times 20\cdot\mathrm{d}h(\mathrm{kN})$，抽到水塔顶做功 $\mathrm{d}W=9.8\times 20(10+h)\mathrm{d}h$，全部抽尽做功

$$W = \int_0^5 9.8\times 20(10+h)\mathrm{d}h = 12\,250\mathrm{kJ}.$$

6. 有一长 l 的细杆，均匀带电，总电量为 Q. 在杆的延长线上，距 A 端为 r_0 处，有一单位正电荷. 求这单位正电荷所受的电场力. 如果此单位正电荷由距杆端 A 为 a 处移到距杆端 b 处 $(b>a)$，电场做的功是多少? $\left(\text{提示：两带电小球，中心相距为 } r\text{，各带电荷 } q_1 \text{ 与 } q_2\text{，其相互作用力可由库仑定律 } F=k\dfrac{q_1q_2}{r^2}\text{ 计算，其中 } k \text{ 为常数.}\right)$

题 6 图

解 设坐标系如题 6 图所示，细杆带电的线密度为$\dfrac{Q}{l}$. $[r,r+\mathrm{d}r]$上的电量与 r_0 处的单位正电荷的电场力为

$$\mathrm{d}F = \frac{k\dfrac{Q}{l}\mathrm{d}r\cdot 1}{(r_0 - r)^2}.$$

细杆对此单位正电荷的电场力为

$$F = \int_{-l}^{0} \frac{k\dfrac{Q}{l}\mathrm{d}r}{(r - r_0)^2} = \frac{kQ}{l}\left(-\frac{1}{r - r_0}\right)\Bigg|_{-l}^{0} = \frac{kQ}{l}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + l}\right) = \frac{kQ}{r_0(r_0 + l)}.$$

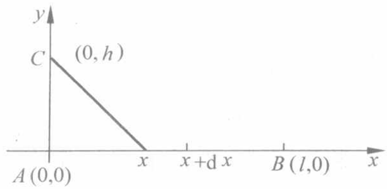
单位正电荷从距 A 端 a 处移到 b 处电场力做的功

$$W = \int_a^b \frac{kQ}{r(r+l)}\mathrm{d}r = \frac{kQ}{l}\int_a^b\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+l}\right)\mathrm{d}r = \frac{kQ}{l}\ln\frac{b(a+l)}{a(b+l)}.$$

7. 有一均匀细杆 AB，长为 l，质量为 M. 另有一质量为 m 的质点 C，位于过 A 点且垂直

于细杆的直线上，$AC=h$. 试计算细杆对质点的引力.

解　A,B,C 的位置如题7图所示.



题7图

细杆的线密度 $\rho=\dfrac{M}{l}$，细杆上$[x,x+\mathrm{d}x]$的质量对质点的引力微元为

$$\mathrm{d}F=G\frac{\frac{M}{l}\mathrm{d}x\cdot m}{h^2+x^2},$$

其中 x 分量为$(\mathrm{d}F)_x=\dfrac{G\frac{M}{l}mx}{(h^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$，$y$ 分量为$(\mathrm{d}F)_y=-\dfrac{G\frac{M}{l}mh}{(h^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$，引力的 x 分量为

$$F_x=\int_0^l\frac{G\frac{M}{l}mx}{(h^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\frac{GMm}{l}\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{\sqrt{l^2+h^2}}\right),$$

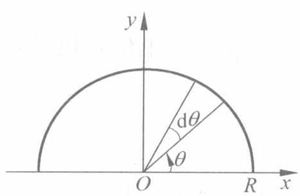
y 分量为 $F_y=-\displaystyle\int_0^l\frac{G\frac{M}{l}mh}{(h^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$. 令 $x=h\tan\theta$，则 $\tan\theta_1=\dfrac{l}{h}$，故

$$F_y=-\int_0^{\theta_1}\frac{GMm}{lh}\cos\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{GMm}{lh}\sin\theta_1=-\frac{GMm}{h\sqrt{l^2+h^2}},\quad\text{其中}\quad\sin\theta_1=\frac{l}{\sqrt{l^2+h^2}}.$$

8. 有一半径为 R 的均匀半圆弧，质量为 M，求它对位于圆心处单位质量的质点之引力.

解　取坐标系如题8图所示，半圆弧的线密度为 $\mu=\dfrac{1}{\pi R}M$. $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$上小圆弧的质量为$\dfrac{M}{\pi R}R\,\mathrm{d}\theta=\dfrac{M}{\pi}\mathrm{d}\theta$，它对单位质点引力的 y 分量微元为

$$\mathrm{d}F_y=G\frac{\frac{M}{\pi}\mathrm{d}\theta}{R^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=G\frac{M\sin\theta}{\pi R^2}\mathrm{d}\theta.$$



题8图

引力的 y 分量为

$$F_y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}G\frac{M\sin\theta}{\pi R^2}\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi R^2}GM.$$

其中 G 为引力常数，显然引力的 x 分量 $F_x=0$. 引力的方向由单位质点指向弧的中心.

9. 设有二均匀细杆，长度分别为 l_1,l_2，质量分别为 m_1,m_2 它们位于同一条直线上，相邻二端点之距离为 a，试证此细杆之间的引力为

$$F=\frac{m_1m_2}{l_1l_2}G\ln\frac{(a+l_1)(a+l_2)}{a(a+l_1+l_2)}\quad (G\text{ 为引力常数}).$$

证 两细杆图形如题 9 图所示

题 9 图

两细杆的线密度分别为 $\frac{m_1}{l_1},\frac{m_2}{l_2}$，$[t,t+\mathrm{d}t]$上的质量与$[x,x+\mathrm{d}x]$上的质量之引力为

$$G\frac{\frac{m_1}{l_1}\mathrm{d}t\,\frac{m_2}{l_2}\mathrm{d}x}{(t+a+x)^2}.$$

m_1 的细杆对$[x,x+\mathrm{d}x]$上质量的引力为

$$\int_0^{l_1}\left(G\frac{m_1}{l_1}\,\frac{m_2}{l_2}\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}t}{(t+a+x)^2}=G\frac{m_1}{l_1}\,\frac{m_2}{l_2}\mathrm{d}x\left(\frac{1}{a+x}-\frac{1}{l_1+a+x}\right).$$

m_1 的细杆对 m_2 的细杆的引力为

$$F=\int_0^{l_2}G\frac{m_1}{l_1}\,\frac{m_2}{l_2}\left(\frac{1}{a+x}-\frac{1}{l_1+a+x}\right)\mathrm{d}x=G\frac{m_1}{l_1}\,\frac{m_2}{l_2}\ln\left|\frac{a+x}{l_1+a+x}\right|\Bigg|_0^{l_2}$$

$$=G\frac{m_1}{l_1}\,\frac{m_2}{l_2}\ln\frac{(a+l_1)(a+l_2)}{a(a+l_1+l_2)}.$$

10. 一质点在阻力影响下作匀减速直线运动，速度每秒减少 2m，若初速度 25m/s，问质点能走多远？

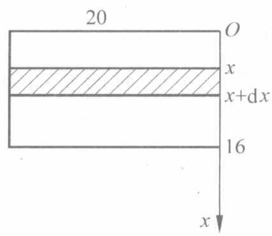
解 初速度为 25m/s，每秒减少 2m，$\frac{25}{2}$s 后速度为 0. 速度为 $v=25-2t$，$\frac{25}{2}$s 走的路程为

$$s=\int_0^{\frac{25}{2}}(25-2t)\mathrm{d}t=\frac{625}{4}\mathrm{m}.$$

12. 水闸的门为矩形，宽 20m，高 16m，垂直立于水中，它的上沿与水平面相齐，求水对闸门的压力.

解 闸门如题 12 图所示. 设水对闸门的压力为分布于 x 轴区间$[0,16]$上的整体量，水深 xm 处压强 $p(x)=gx$，元素区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上的压力

$$\mathrm{d}F=p(x)\mathrm{d}S=20gx\,\mathrm{d}x.$$



题 12 图

闸门的全部压力

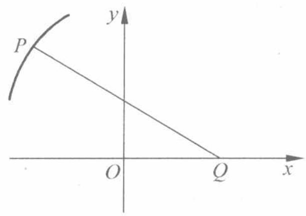
$$F=\int_0^{16}20gx\,\mathrm{d}x=25\,088(\mathrm{kN}).$$

习题 6.3

3. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程：

(2) 曲线上点 $P(x,y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 y 轴平分.

解 (2) 曲线的图形如题3(2)图所示，点 $P(x,y)$ 的法线方程为



题3(2)图

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x).$$

令 $Y=0$ 得 $X=x+yy'$，即 Q 的坐标为 $(x+yy',0)$.

令 $X=0$ 得 $Y=y+\frac{x}{y'}$，即法线与 y 轴的交点为 $M\left(0,y+\frac{x}{y'}\right)$.

由条件知，点 M 为 PQ 的中点，所以 $\frac{x+x+yy'}{2}=0$ 即所求的微分方程为 $2x+yy'=0$.

4. 求下列方程的通解：

(2) $y-xy'=a(y^2+y')$；　　(4) $xy(y-xy')=x+yy'$；

解 (2) 由 $(x+a)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-ay^2$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{y-ay^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x+a}$. 两边积分得

$$\ln\left|\frac{y}{1-ay}\right|=\ln|x+a|+\ln|c|.$$

通解为 $\frac{y}{1-ay}=C(x+a)$，C 为任意常数.

(4) 由 $x(y^2-1)=y(x^2+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 得 $\frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2-1}=\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$. 积分得

$$\ln|y^2-1|=\ln|x^2+1|+\ln|C|.$$

通解为 $y^2-1=C(x^2+1)$.

5. 一潜水艇在水中下沉时，所受阻力与下降速度成正比，当 $t=0$ 时，$v=v_0$，求下沉速度.

解 潜水艇所受的力为 $mg-kv$，故初值问题为

$$\begin{cases} m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv,\\ v(0)=v_0. \end{cases}$$

解微分方程，分离变量得 $\frac{m}{mg-kv}\mathrm{d}v=\mathrm{d}t$，即 $\frac{m}{kv-mg}\mathrm{d}v=-\mathrm{d}t$. 积分得 $\frac{m}{k}\ln|kv-mg|=-t+C$.

$t=0$ 代入得 $C=\frac{m}{k}\ln|kv_0-mg|$，即 $\frac{m}{k}\ln\left|\frac{kv-mg}{kv_0-mg}\right|=-t$，亦即 $\frac{kv-mg}{kv_0-mg}=e^{-\frac{k}{m}t}$，故下沉速度为

$$v=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}.$$

6. 一个物体在冷却过程中，其温度变化速度与它本身的温度和环境的温度之差成正比. 今有一温度为 50℃的物体，放入温度为 20℃房间里(房间的温度看作不变)，试求物体温度随时间变化的规律.

解 设物体温度为 $T=T(t)$，由条件知

$$T'(t)=-k(T-20),\quad T(0)=50,\quad \frac{dT}{T-20}=-kdt,$$

积分得 $T-20=Ae^{-kt}$，将 $T(0)=50$ 代入得 $A=30$. 因此物体温度为 $T=20+30e^{-kt}$.

7. 有一 100℃的物体放在 20℃的房间内，经过 20min 测量物体的温度，已降为 60℃. 问还需要经过多少时间，温度才能为 30℃.

解 由 6 题知，物体的温度 $T(t)$ 为

$$T(t)=20+80e^{-kt}.$$

已知 $60=20+80e^{-k20}$，从而 $e^{-k20}=\frac{1}{2}$，即 $-k20=-\ln2$，亦即 $k=\frac{1}{20}\ln2$.

因此 $T(t)=20+80e^{-\frac{1}{20}(\ln2)t}$. 当 $T(t)=30$℃时，$e^{-\frac{1}{20}(\ln2)t}=\frac{1}{8}$，解得 $t=60$.

答还需 40min 物体温度降到 30℃.

自测题

1. 求由极坐标曲线 $r=a\sin\theta(a>0)$ 所围图形的面积 A.

解 曲线的变化区间为 $\theta\in[0,\pi]$.

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}r^2(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2\sin^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^2\theta d\theta=\frac{1}{4}\pi a^2.$$

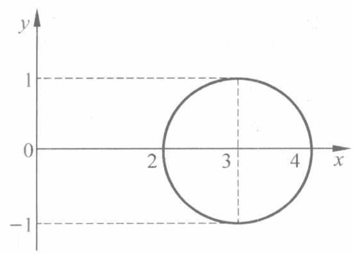
3. 求圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解 圆的图形如题 3 图所示.

$$(x-3)^2+y^2=1,\quad x=3\pm\sqrt{1-y^2},$$

旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-1}^{1}(3+\sqrt{1-y^2})^2dy-\pi\int_{-1}^{1}(3-\sqrt{1-y^2})^2dy\\&=12\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy=24\pi\int_0^1\sqrt{1-y^2}dy\\&=24\pi\cdot\frac{1}{4}\pi=6\pi^2.\end{aligned}$$



题 3 图

该弧段质量为

$$(a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t)^{3/2}\mathrm{d}s=3a^4|\cos t\sin t|(\cos^6 t+\sin^6 t)^{3/2}\mathrm{d}t.$$

该弧段对质点的引力大小为

$$G\frac{3a^4\ |\cos t\sin t|\ (\cos^6 t+\sin^6 t)^{3/2}\mathrm{d}t}{a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t}=3Ga^2\ |\cos t\sin t|\ (\cos^6 t+\sin^6 t)^{1/2}\mathrm{d}t.$$

该弧段对质点引力的 y 分量为

$$\frac{3Ga^2\ |\cos t\sin t|\ (\cos^6 t+\sin^6 t)^{1/2}a\ |\sin^3 t|\ \mathrm{d}t}{(a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t)^{1/2}}=3Ga^2\ |\cos t\sin^4 t|\ \mathrm{d}t.$$

引力的 y 分量为

$$F_y=\int_0^{\pi}3Ga^2\ |\cos t\sin^4 t|\ \mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3Ga^2\ |\cos t\sin^4 t|\ \mathrm{d}t$$

$$=6Ga^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}\sin t=\frac{6}{5}Ga^2.$$

显然 $F_x=0$.

8. 一金属棒长 7m，离棒左端 xm 处的线密度 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+9}}$(kg/m). 问 x 为何值时，$[0,x]$一段的质量为全棒质量的一半.

解 元素区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上的质量微元为

$$\mathrm{d}m=\rho(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{x+9}}\mathrm{d}x,$$

$[0,x]$上的质量为

$$m(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{x+9}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x+9}-6.$$

全棒质量为 $m(7)=2$，一半为 1. 令 $2\sqrt{x+9}-6=1$ 得 $x=\dfrac{13}{4}$m.

答当 $x=\dfrac{13}{4}$m 时，$[0,x]$一段的质量为全棒质量的一半.

9. 求下列方程的通解：

(1) $\sec^2 x\tan y\mathrm{d}x+\sec^2 y\tan x\mathrm{d}y=0$；　(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=10^{x+y}$.

解 (1) 方程两边乘以$\dfrac{1}{\tan y\tan x}$得$\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}\mathrm{d}x+\dfrac{\sec^2 y}{\tan y}\mathrm{d}y=0$，两边积分得

$$\ln|\tan x|+\ln|\tan y|=\ln|C|,$$

通解为

$$\tan x\tan y=C.$$

(2) $10^x\mathrm{d}x-10^{-y}\mathrm{d}y=0$,两边积分得通解

$$10^x+10^{-y}=C.$$

10. 镭的衰变速度与镭现量 R 成正比,由其他方法可确定,镭经过 1600 年后,只剩原始量 R_0 的一半,试求镭的量 R 与时间 t 的函数关系.

解 由条件知 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=-kR,R|_{t=0}=R_0$ 解得 $R=R_0\mathrm{e}^{-kt}$. $t=1600$ 时,$R=\frac{1}{2}R_0$,即 $\frac{1}{2}R_0=R_0\mathrm{e}^{-k1600}$,于是 $-k1600=-\ln2$,即 $k=\frac{1}{1600}\ln2$. 所以 $R=R_0\mathrm{e}^{-\frac{\ln2}{1600}t}$.

第 7 章　空间解析几何

7.1　空间向量及其运算

7.1.1　内容小结

1. 向量的概念与坐标表示

从点 A 到点 B 的有向线段称为向量，记作$\overrightarrow{AB}$或 $\boldsymbol{a}$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记作$|\boldsymbol{a}|$. $|\boldsymbol{a}|=0$ 的向量称为零向量.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点放在原点处，若$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$，则终点 P 的坐标(x,y,z)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标. 记作 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$. 这时

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

2. 向量的方向角与方向余弦

设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与坐标向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. 方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 这时向量$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量. 从而有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

若 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$. 则 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y+z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3. 向量的线性运算

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为向量，如图 1 向量按三角形法则定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

设 λ 为数，$\boldsymbol{a}$ 为向量. 数 λ 与向量相乘记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它也是向量，其方向由 λ 的正负号决定，其模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$.

向量的加法运算与数乘运算称为向量的线性运算.

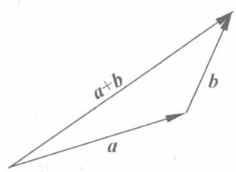


图 1

4. 向量与向量的数量积

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，它是数，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

数量积的运算规律：

交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

与数乘的结合律$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；

分配律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

5. 向量与向量的向量积

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它是向量.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所在的平面(平移到同一平面)，且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 符合右手规则，且

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.$$

若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}.$$

向量积的运算规律：

反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$；

与数乘的结合律$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$；

分配律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$.

6. 三向量的混合积

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为三向量，则$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三向量的混合积，记作$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$. 混合积有性质：

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$，则

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 平行于同一平面，称为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$.

7.1.2 典型考题

1. 向量的性质与运算

例 1 已知单位向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴正向夹角为$\frac{\pi}{3}$，与 Oxy 坐标面的夹角为$\frac{\pi}{4}$，试求向量 $\boldsymbol{a}$.

解 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦分别为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. 由条件知 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\gamma=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}$. 由于

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

而 $\cos^2\alpha=\frac{1}{4}$，$\cos^2\gamma=\frac{1}{2}$，代入上式解得 $\cos\beta=\pm\frac{1}{2}$. 这时可得 $\boldsymbol{a}$ 的四个解：

$$\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

例 2 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模分别为 $|\boldsymbol{a}|=5,|\boldsymbol{b}|=10$，且 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=11$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

分析 由条件可求出 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|$，再求出 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}$.

解 由 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，得

$$2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=25+100-121=4.$$

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{25+100+4}=\sqrt{129}$.

例 3 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$________.

（1995 年考研数学一）

分析 用性质 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$ 计算.

解
$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})&=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4.\end{aligned}$$

例 4 化简 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

分析 用 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 的定义与 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的定义.

解
$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\\&=[|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle]^2+[|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle]^2\\&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2.\end{aligned}$$

例 5 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模分别是 $|\boldsymbol{a}|=4,|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4$. 则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$________.

解 $-4=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=4\cdot2\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，故得 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\dfrac{1}{2}$，于是 $\cos(\pi-\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)=-\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{1}{2}$，即 $\pi-\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{3},\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{2}{3}\pi$. 于是有

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=8\sin\frac{2}{3}\pi=8\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}.$$

2. 利用向量求面积与体积

例 6 已知三角形三个顶点的坐标是 $A(2,1,3),B(2,4,3),C(0,1,4)$，求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

分析 用两向量向量积的几何意义讨论.

解 $\overrightarrow{AB}=(0,3,0),\overrightarrow{AC}=(-2,0,1)$，因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&3&0\\-2&0&1\end{vmatrix}=(3,0,6),$$

于是 $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{45}$.

例 7 设四面体的顶点为 $A(1,1,1)$，$B(1,2,3)$，$C(3,4,6)$，$D(2,3,4)$. 求此四面体的体积 V.

分析 不共面的三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 的绝对值为以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 而四面体的体积为相应的平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$.

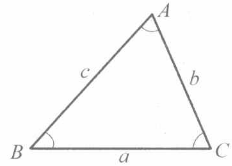
解 $\overrightarrow{AB}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,3,5)$，$\overrightarrow{AD}=(1,2,3)$，故

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}0&1&2\\2&3&5\\1&2&3\end{vmatrix}=1,\quad \text{所以}\quad V=\frac{1}{6}.$$

3. 以向量为工具的证明题

例 8 试用向量方法证明正弦定理. 如例 8 图所示，在$\triangle ABC$ 中，证明

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$



例 8 图

证 由$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$，得$(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\times\overrightarrow{AB}=0$. 所以

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}.$$

两边取向量的模，有

$$|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|.$$

而$|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=b\cdot c\sin A$，$|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=c\cdot a\sin B$，由此得到

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

类似有$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 因此$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

例 9 试用向量方法证明余弦定理. 如例 8 图所示. 证明 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

证
$$\begin{aligned}c^2&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\\&=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}\\&=b^2+a^2-2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=a^2+b^2-2ab\cos C,\end{aligned}$$

即 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

7.2 平面与直线的方程

7.2.1 内容小结

1. 平面的点法式方程与一般方程

过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，以 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为法向量的平面 S 的方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

设(A,B,C)为非零向量，则方程

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

称为平面的一般方程. 此平面的法向量为(A,B,C).

2. 平面的截距式方程

设平面α在x,y,z轴上分别有非零截距a,b,c,则平面α的截距式方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

3. 直线的参数方程与标准方程

设直线l过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$,且以$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$为方向向量,则$l$的参数方程为

$$x = x_0 + ta_1,\quad y = y_0 + ta_2,\quad z = z_0 + ta_3,\quad t \in \mathbb{R}.$$

l的标准方程为

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

4. 直线的一般方程

设平面$S_i(i=1,2)$的方程为$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$与$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,若S_1与S_2不平行. 则方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

称为直线l(它为S_1与S_2的交线)的一般方程.

5. 平面束方程

设平面S_1与S_2不平行,其方程分别为

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad 与 \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

则过S_1与S_2的交线除S_1外的平面束方程为

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0,\quad \lambda 为任意实数.$$

过S_1与S_2的交线除S_2外的平面束方程为

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,\quad \lambda 为任意实数.$$

6. 平面、直线间的关系

设两直线$l_i(i=1,2)$的方向向量为$\boldsymbol{a}_i$,则直线l_1与l_2夹角θ的余弦为

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|}.$$

设两平面$S_i(i=1,2)$的法向量为$\boldsymbol{n}_i$,则平面S_1与S_2夹角θ的余弦为

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}.$$

设直线l的方向向量为$\boldsymbol{a}$,平面S的法向量为$\boldsymbol{n}$. 则直线l与平面S夹角θ的正弦为

$$\sin\theta = \frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{n}|}.$$

这时直线 l_1 与 l_2 垂直的充要条件为 $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=0$，平行的充要条件为 $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}$.

7. 点到面、线的距离

点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 S：$Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

设 M_0 为直线 L 外一点，M 为 L 上任一点，L 的方向量为 $\boldsymbol{a}$. 则点 M_0 到直线 L 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}.$$

7.2.2 典型考题

1. 求平面的方程

例 1 试求经过点 $A(4,2,1)$，且与 z 轴重合的平面方程.

解 所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$. 既有 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{OA}$，又有 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{k}$. 所以

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}\times\overrightarrow{OA}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&0&1\\4&2&1\end{vmatrix}=(-2,4,0).$$

因此所求平面的方程为 $-2x+4y=0$，即 $x-2y=0$.

例 2 求过点 $(3,0,-2)$，$(4,1,5)$，且平行于 y 轴的平面方程.

解 由条件知，可设所求平面 π 的方程为

$$Ax+Cz+D=0. \qquad ①$$

代入两点的坐标得

$$\begin{cases}3A-2C+D=0,\\4A+5C+D=0.\end{cases}$$

解方程组得 $A=-7C$，$D=23C$. 代回方程①消去 C 得所求平面的方程为

$$7x-z-23=0.$$

例 3 求过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases}x=-t+2,\\y=3t-4,\\z=t-1\end{cases}$ 垂直的平面方程.

（1990 年考研数学一）

解 由题设知，所求平面的法向量为 $(-1,3,1)$. 所以所求平面的方程为 $-(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0$，即 $x-3y-z+4=0$.

例 4 已知两条直线的方程是 l_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$；$l_2$：$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$. 则过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程是________. （1991 年考研数学一）

解 由题设，所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与两直线的方向向量都垂直. 因此有

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(1,-3,1).$$

又所求平面过点(1,2,3)，故所求平面的方程为

$$(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0,\quad 即\quad x-3y+z+2=0.$$

例 5 设一平面经过原点及点(6,−3,2)，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则此平面方程为________. （1996 年考研数学一）

解 由题设，所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 既与平面 $4x-y+2z=8$ 的法向量(4,−1,2)垂直，也与向量(6,−3,2)垂直，因此

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}=(4,4,-6)=2(2,2,-3).$$

故所求平面的方程为 $2x+2y-3z=0$.

2. 平面、直线间的位置关系

例 6 在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线________.

(A) 只有 1 条　　(B) 只有 2 条　　(C) 至少有 3 条　　(D) 不存在

（1992 年考研数学一）

解 曲线的切线的方向量为 $\boldsymbol{a}=(x',y',z')=(1,-2t,3t^2)$，它应与所给平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$垂直. 因此应满足：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad 即\quad (1,-2t,3t^2)\cdot(1,2,1)=1-4t+3t^2=0.$$

解得 $t=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}$. 上述方程只有两个实根，因此切线中只有两条与已知平面平行，故选(B).

例 7 设有直线 l_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 l_2：$\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$ 则 l_1 与 l_2 的夹角为________.

(A) $\frac{\pi}{6}$　　(B) $\frac{\pi}{4}$　　(C) $\frac{\pi}{3}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

（1993 年考研数学一）

分析 先求出两条直线的方向向量，再按定义求夹角即可.

解 直线 l_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(1,-2,1)$，直线 l_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}_2$ 为

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,2),$$

从而直线 l_1 和 l_2 的夹角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

因此 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,故应选(C).

7.3　空间曲线与曲面的方程，二次曲面

7.3.1　内容小结

1. 曲面的方程

曲面 S 的一般方程为

$$F(x,y,z)=0.$$

曲面 S 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v)\in D. \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

曲线 $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转的旋转曲面的方程为 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$,(其+、−号与曲线 $f(x,y)=0$ 中 y 的符号相同)绕 y 轴旋转的旋转曲面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$.

2. 曲线的方程

曲线 L 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

曲线 L 的参数方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad t\in I.$$

3. 几类常见的二次曲面的标准方程

椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 当 $|a|=|b|=|c|=R$ 时,为球面方程.

双曲面 $\begin{cases} \text{单叶：} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}+\frac{z^2}{r}=1\text{,其中 } p,q,r\text{,两项为正,一项为负.} \\ \text{双叶：} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}+\frac{z^2}{r}=1\text{,其中 } p,q,r\text{,两项为负,一项为正.} \end{cases}$