21世纪高等民族院校

《经济应用数学》（跨理工专业）一

概率论与数理统计

Probability and Statistics for Economics and Engineering

白必瑞 郑树团 主编

陕西师范大学出版社

21 世纪高等民族院校

《经济应用数学》(跨理工专业)——

概率论与数理统计

Probability and Statistics for Economics and Engineering

主编　白必瑞　郑树团

编者　郑树团　白必瑞

王文鹏　尚婵娟

陕西师范大学出版社

图书代号:JC5N1281

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/白必瑞、郑树团编.—西安:陕西师范大学出版社,2006.1

ISBN 7-5613-3493-1

Ⅰ.概… Ⅱ.①白…②郑… Ⅲ.①概率论—民族学院—教材②数理统计—民族学院—教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第160045号

责任编辑 王志伟　　责任校对 李小光

出版发行:陕西师范大学出版社
(西安市南郊 陕西师大120信箱 邮编710062
http://www.snuph.com E-mail:if-centre@snuph.com)
印　　制:西安政治学院印刷厂

开本 850×1168 1/32　　印张 7.75　　字数 200千
版次印次:2006年1月第1版　　2006年1月第1次印刷
定　　价:18.00元

开户行:光大银行西安电子城支行　账号:0303080-00304001602
读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。
电　话:(029)85307864　85233753　85251046(传真)

内容提要

《概率论与数理统计》是根据教育部对本课程的基本要求编写的.是为适应大众化教育理论发展与实践的要求编写的民族类普通高校教材.

主要内容包括概率论和数理统计两部分,概率论部分主要介绍概率分布、数学特征、几种重要的分布、大数定理与中心极限定理.数理统计部分主要介绍样本分布、参数估计、假设检验与回归分析.

本书可作为民族类普通高校管理类、经济类和理工类各专业教育用书,也可供其他普通高校相关专业教学参考.

前　言

在当前我国大众化教育理论的发展与实践中，为培养社会经济建设所需高素质复合型人才，高等教育，尤其是民族类高等教育，对于应用数学在教学内容和方法上提出了许多新的要求，强调实用性和有效性，这是教育发展的趋势．基于这样的趋势和认识，结合民族类学员基础水平实际情况，我们组织编写了这本教材，以满足这种需求．

该教材主要介绍概率论和数理统计学科中的基本理论、基本知识以及基本计算方法，精选了经济管理上常用的理论、知识和方法；加强了应用性部分内容，同时强调对学习者分析问题和解决问题等方面的动手能力的培养；利用计算机通过 Excel 实现较为繁杂的不必要的计算工作；充分考虑民族学员的实际情况，在基本保证学科的系统性与科学性的基础上，对教材内容的编排进行适当的简化，并由浅入深，循序渐进，使学习者能够感到易学易懂，能够抓住关键、抓住重点、把握全局．在教材中设置了足够类型的例题和适当数量的习题，并对习题给出了答案和提示．

本教材由白必瑞、郑树团担任主编．白必瑞编写第一章至第五章，王文鹏第六、七章，郑树团第八章，尚婵娟第九章，郑树团对全文进行了统稿和审理工作．

在本书的编写过程中，承蒙西北工业大学教授刘小冬博士、华东师范大学教授刘永明先生不吝赐教，在此表示衷心地感谢！

编　者

2005 年 12 月

目 录

第一章 随机事件及其概率

§1.1 基本概念………………………………………(1)

§1.2 概率……………………………………………(7)

§1.3 概率的加法法则………………………………(12)

§1.4 条件概率与乘法法则…………………………(15)

§1.5 独立试验概型…………………………………(18)

§1.6 全概率公式与贝叶斯公式……………………(24)

习题一 ………………………………………………(28)

第二章 随机变量及其概率分布

§2.1 随机变量………………………………………(35)

§2.2 随机变量的分布函数…………………………(36)

§2.3 离散型随机变量………………………………(39)

§2.4 连续型随机变量………………………………(47)

§2.5 随机变量函数的分布…………………………(52)

§2.6 二维随机变量…………………………………(56)

§2.7 随机变量的相互独立性………………………(69)

习题二 ………………………………………………(73)

第三章 随机变量的数字特征

§3.1 离散型随机变量的数学期望…………………(80)

§3.2 连续型随机变量的数学期望…………………(82)

§3.3 数学期望的性质………………………………(84)

§3.4 方差 协方差…………………………………(87)

习题三 …………………………………………………… (98)

第四章 几种重要的分布

§4.1 二项分布…………………………………………… (103)

§4.2 超几何分布………………………………………… (106)

§4.3 泊松分布…………………………………………… (109)

§4.4 指数分布…………………………………………… (111)

§4.5 Γ——分布 ………………………………………… (113)

§4.6 正态分布…………………………………………… (114)

习题四 …………………………………………………… (123)

第五章 大数定律与中心极限定理

§5.1 切比晓夫不等式…………………………………… (128)

§5.2 大数定律…………………………………………… (131)

§5.3 中心极限定理……………………………………… (133)

习题五 …………………………………………………… (140)

第六章 数理统计的基础知识

§6.1 总体与样本………………………………………… (144)

§6.2 样本分布函数……………………………………… (147)

§6.3 几种常用分布……………………………………… (149)

§6.4 抽样分布…………………………………………… (152)

习题六 …………………………………………………… (156)

第七章 参数估计

§7.1 点估计……………………………………………… (159)

§7.2 估计量的评价标准………………………………… (163)

§7.3 区间估计…………………………………………… (166)

§7.4 正态总体参数区间估计的 Excel 实现 ………… (170)

习题七 …………………………………………………… (175)

第八章 假设检验

§8.1 假设检验问题……………………………………… (178)

§8.2 单个正态总体的假设检验………………………… (182)

§8.3 两个正态总体的假设检验………………………… (194)

习题八 …………………………………………………… (202)

第九章 回归分析

§9.1 一元线性回归……………………………………… (206)

§9.2 一元线性回归的相关检验………………………… (210)

§9.3 可线性化的回归方程……………………………… (214)

习题九 …………………………………………………… (219)

附 表 …………………………………………………… (222)

习题答案 ………………………………………………… (230)

第一章　随机事件及其概率

§1.1 基本概念

"概率论与数理统计"是一门研究和揭示随机现象量的统计规律性的数学学科. 是近代数学的重要组成部分.

研究随机现象,首先要对客观事物进行观察,观察的过程就是试验. 概率论中所研究的试验具有以下共同特点:

(1) 重复性　可在相同的条件下重复进行;

(2) 明确性　每次试验的结果具有多种可能性,但是能事先明确试验的所有可能的结果;

(3) 随机性　试验之前不能确定哪一个结果会出现.

一般地,满足以上三个特点的试验称为**随机试验**,简称**试验**. 记作 E.

一、随机事件

随机试验的结果称为**随机事件**,**简称事件**.

如:掷骰子观察出现的点数,是一个随机试验. 它的一切可能的结果都是随机事件. 如,出现1点、2点、3点、4点、5点、6点,就是六个事件. 这种不能分解成其他事件的组合的随机事件称为**基本事件**. 再如"出现奇数点"也是随机事件,但它不是基本事件. 它是由"1点"、"3点"、"5点"这三个基本事件组合而成的事件,即:只要这三个基本事件中有一个出现,"奇数点"这个事件就必然出现. 由基本随机事件组成的事件叫**复合事件**.

在每次试验中一定会发生的事件称为**必然事件**,用符号 Ω 表

示. 如掷骰子试验中,"点数不大于 6" 就是必然事件.

每次试验中一定不会发生的事件称为**不可能事件**. 如掷骰子试验中"出现 7 点" 是不可能事件.

必然事件和不可能事件都不是随机事件. 因为作为随机试验的结果,它们都呈现着确定性(严格说不是随机试验). 不过为了研究上的方便,我们总是将它们看成特殊的随机事件来处理,作为随机事件的两种极端情形.

二、事件的集合

(一) 样本空间

定义 1.1 随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 S.

S 的元素,即 E 的一个可能结果称为样本点 (即基本事件),用 ω 表示.

设随机试验 E 的所有结果为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$,则 E 的样本空间 S 可表示为

$$S = \{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$$

例 1 写出抛硬币试验的样本空间.

解 设出现正面为 H,出现反面为 T. 它的基本事件有两个,因此,它的样本空间是 $S = \{H,T\}$

例 2 写出掷骰子试验的样本空间.

解 可能结果有六个:"出现 i 点"($i = 1,2,3,4,5,6$),即有 6 个基本事件. 所以它的样本空间是 $S = \{1,2,3,4,5,6\}$(其中1表示"出现 1 点",以此类推).

例 3 将一枚硬币连抛两次,观察正,反面出现的情况,写出样本空间.

解 设正面为 H,反面为 T. 则试验 E 的可能结果是 HH、HT、TH、TT. 这里 HH 表示第一次出现正面 H,第二次也出现正面 H,以此类推. 所以样本空间为

$$S=\{HH,HT,TH,TT\}$$

例 4　测试一只灯泡的寿命,写出样本空间.

解　测试灯泡寿命是一个随机试验,其结果是一个实数. 试验的所有可能结果(即基本事件)是一个非负实数. 样本空间为 $S=\{t\mid t\geqslant 0\}$

(二) 事件间的关系及其运算

如果用集合来表示事件,那么事件与集合之间有如下对应关系:

必然事件 $\Omega\leftrightarrow$ 样本空间 S

不可能事件 $\leftrightarrow$ 空集 ϕ

基本事件 $\omega\leftrightarrow S$ 的某个元素

复合事件 $\leftrightarrow S$ 的某个子集

1. 事件的包含

若事件 A 发生,必然导致事件 B 发生,即属于 A 的每一个样本点也都属于 B,则称事件 B 包含事件 A. 记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$. 如图1 - 1.

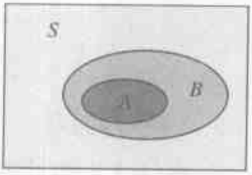

图 1 - 1

对于任何事件 A 有

$$\phi\subset A\subset S.$$

2. 事件的相等

若 $A\supset B$ 且 $B\supset A$,即 A 与 B 的样本点完全相同,则称事件 A 与事件 B 相等. 记为 $A=B$.

3. 事件的和(并)

事件 A 和事件 B 至少有一个发生,这一事件称为 A 与 B 的和. 它是由属于 A 或属于 B 的所有样本点构成的集合. 记作 $A\cup B$(或 $A+B$),如图 1 - 2. 由图可见,$A\cup B$ 包括以下三种情况:

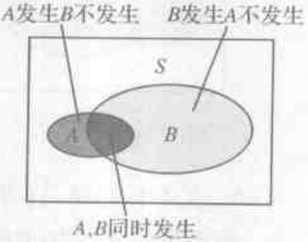

图 1 - 2

(1) A 发生,B 不发生;

(2) B 发生,A 不发生;

(3) A、B 同时发生.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生,这一事件,称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和,记作

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \text{ 或 } A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

4. 事件的积(交)

两个事件 A 与 B 同时发生,这一事件称为事件 A 与 B 的积. 它是由既属于 A 又属于 B 的共同样本点构成的集合. 记作 $A \cap B$ 或 AB,如图 1 - 3.

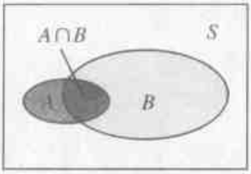

图 1 - 3

5. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生,这一事件称为 A 与 B 的差. 它是由属于 A 但不属于 B 的那些样本点构成的集合,记作 $A - B$,如图 1 - 4,1 - 5 所示.

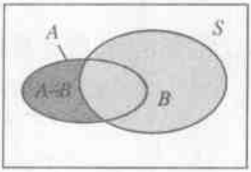

图 1 - 4

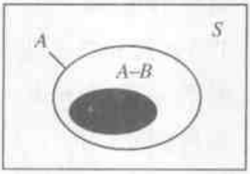

图 1 - 5

6. 互不相容事件(互斥事件)

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $A \cap B = \phi$,称事件 A 与 B 互不相容(或称互斥). 互不相容事件 A 与 B 没有公共的样本点.

显然基本事件间是互不相容的,如图 1 - 6 所示.

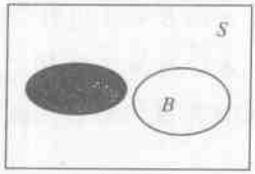

图 1 - 6

7. 对立事件(逆事件)

事件"非 A" 称为 A 的对立事件(或逆事件). 它是由样本空间中所有不属于 A 的样本点组成的集合. 记作 $\overline{A}$. 如图 1 - 7 所示.

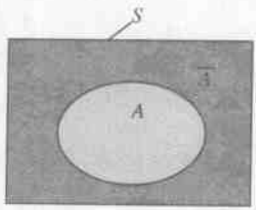

图 1 - 7

对立事件必满足

$$A \cup \overline{A} = S(\text{必然事件});$$

$$A \cap \overline{A} = \phi(\text{不可能事件}).$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

对立事件必然是互斥事件. 但互斥事件不一定是对立事件.

从集合的运算法则可以得到随机事件的运算法则. 设 A,B,C 是随机事件,则有下列运算规律

(1) 交换律　$A \cap B = B \cap A$　(1.1.1)

$A \cup B = B \cup A$　(1.1.2)

(2) 结合律　$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$　(1.1.3)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$　(1.1.4)

(3) 分配律　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$　(1.1.5)

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (1.1.6)$$

(4) 狄·莫根律 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (1.1.7)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (1.1.8)$$

概率论中事件之间的关系与集合之间的关系及运算是一致的，现列表对照如下：

记号	概率论	集合论
S	样本空间	全集
ϕ	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素(单点集)
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的补集(余集)
$A \subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A、B 相等	A 与 B 相等
$A \cup B$	事件 A、B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
AB	事件 A、B 同时发生	A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB = \phi$	事件 A、B 互不相容	A 与 B 没有相同元素

例1 设 A,B,C 是随机事件，则事件①A 与 B 发生，C 不发生；②A,B,C 至少有两个发生；③A,B,C 恰好发生两个；④A,B,C 中有不多于一个事件发生. 试用运算符号表示.

解 ①$AB\overline{C}$；

②$AB \cup AC \cup BC$；

③$AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$；

④$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$ 或$(\overline{AB} \cap \overline{BC} \cap \overline{AC})$.

例2 设样本空间 $S = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$，事件 $A = \{b,c,d\}$，事件 $B = \{c,d,e\}$，事件 $C = \{e,f,g\}$. 写出 ①$AB \cup C$；②$(A \cup$

$C)(B\cup C)$.

解　① 因为 $AB=\{c,d\}$,所以 $AB\cup C=\{c,d,e,f,g\}$.

② 因为 $A\cup C=\{b,c,d,e,f,g\}$,$B\cup C=\{c,d,e,f,g\}$,所以 $(A\cup C)(B\cup C)=\{c,d,e,f,g\}$

或 $(A\cup C)(B\cup C)=(A\cap B)\cup C=\{c,d\}\cup\{e,f,g\}=\{c,d,e,f,g\}$

例 3　若用 A,B,C 分别表示三个射手击中目标,描述下列事件:① ABC,② $A+B+C$,③ $\overline{ABC}$,④ $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$,⑤ $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$.

解　① 表示"三个射手都击中目标";

② 表示"三个射手中至少有一个射手击中目标";

③ 表示"三个射手没都击中目标";

④ 表示"三个射手中至少有一个没击中目标";

⑤ 表示"三个射手都没击中目标".

§1.2 概率

一、频率

在相同条件下进行 n 次重复试验. 设随机事件 A 在这 n 次试验中出现了 n_A 次,则比值 $\frac{n_A}{n}$ 叫做 n 次试验中事件 A 出现的**频率**. 记为 $f_n(A)$,即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}\tag{1.2.1}$$

注意　必然事件的频率为 1,不可能事件的频率为 0,一般事件的频率在 0 与 1 之间.

分析一个简单例子. 在"抛硬币"这个随机试验中,将硬币连抛 n 次,观察 n 次试验中正面 H 出现的次数. 分别取 $n=5,50,500$,并将 n 分别取这三个值时的试验各做十遍. 得到数据如下表

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	H 出现次数 n_H	频率 $f_n(H)$	H 出现次数 n_H	频率 $f_n(H)$	H 出现次数 n_H	频率 $f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

由上表可以看出：

(1) 频率具有波动性. 以 $n=5$ 为例，所做的10遍试验，各遍的频率并不全同，最大者为1，最小者为0.2，这种差异称为**频率的波动性**.

(2) 频率具有稳定性. 随着抛硬币次数的增加，频率的波动愈来愈小，呈现出一种稳定状态——在0.5附近摆动. 并逐渐稳定于0.5. 这种性质称为**频率的稳定性**. 如 $n=5$ 的10次试验中，频率的波动范围是 $1-0.2=0.8$，$n=50$ 时的波动范围是 $0.62-0.36=0.26$，当 $n=500$ 时的波动范围是 $0.524-0.488=0.036$.

在 n 次重复试验中，随机事件的频率随着 n 的不断增大围绕着某个确定的常数 P 作幅度愈来愈小的摆动. 把数 P 称为**频率的稳定值**.

频率的性质

设 S 是随机试验 E 的样本空间，A、B 是两个随机事件，则有

(1) 规范性

$f_n(S) = 1$ （必然事件的频率为1） (1.2.2)

$f(\phi) = 0$ （不可能事件的频率为0）

（2）非负性

$$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$$

这是因为 $0 \leqslant n_A \leqslant n$，所以有 $0 \leqslant \frac{n_A}{n} \leqslant 1$.

（3）可加性　若 A，B 互不相容.（即 $AB = \phi$）则

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$$

证明　因为 A、B 互不相容，所以 A、B 不可能同时发生. 在 n 次试验中，$A \cup B$ 发生的次数必为 A 发生的次数与 B 发生的次数的和. 即

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B$$

所以 $$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$$

二、概率的统计定义

定义1.2　在相同的条件下，重复进行 n 次随机试验，事件 A 出现的频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数 p，这时，我们称该常数 p 为事件 A 的概率. 记为 $P(A) = p$.

由定义可知随机事件 A 的概率 p 是衡量事件 A 出现可能性的大小的一个数量指标.

频率和概率的关系

（1）概率是当试验次数不断增加时频率的稳定值.

（2）频率是统计数字，与试验次数有关，具有波动性. 概率是事件客观存在的固有性质，是一个常数，与试验次数无关.

（3）当试验次数 n 足够大时，频率可以作为概率的近似值. 即

$$P(A) \approx f_n(A) \tag{1.2.3}$$

这里"足够大"是一个笼统的说法，究竟 n 取什么数值才算足够大，要由具体的试验条件和试验目的具体确定，不作统一规定.