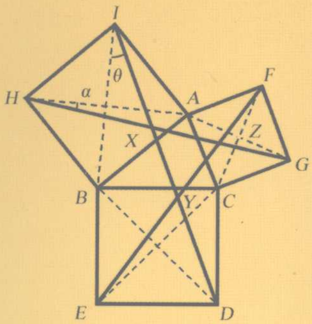
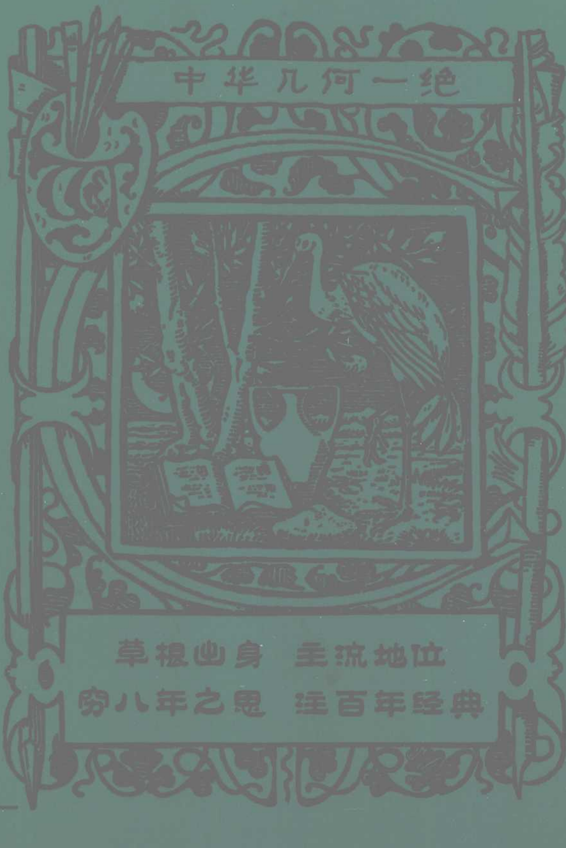


初等数学复习及研究(平面几何)习题解答

尚强 编著

CHUDENG SHUXUE
FUXI JI YANJIU
(PINGMIAN JIHE)
XITIJIEDA



哈尔滨工业大学出版社

CHUDENG SHUXUE FUXI JI YANJIU (PINGMIAN JIHE)

初等数学

复习及研究(平面几何)

习题解答

尚强　著

哈爾濱工業大學出版社

内容提要

本书为梁绍鸿著《初等数学复习及研究(平面几何)》一书的习题解答。本书对原书的大部分习题给出了解答。

本书可作为师范院校数学系师生及中学数学教师的参考书,也可作为数学竞赛培训用书。

图书在版编目(CIP)数据

初等数学复习及研究(平面几何)习题解答/尚强编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.1

ISBN 978-7-5603-2789-1

Ⅰ.初… Ⅱ.尚… Ⅲ.①初等数学-高等学校-解题 ②平面几何-高等学校-解题 Ⅳ.012-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 169732 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 唐 蕾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 29.5 字数 514 千字
版 次 2009 年 1 月第 1 版 2009 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2789-1
印 数 1~4 000 册
定 价 48.00 元

序

平面几何,既有优美的图形,又有众多的问题,可以培养想象、思维、论证以及表达的能力,是很多人青睐的数学分支.当下的数学竞赛中,无论是国内还是国际,平面几何的“幽灵”都不断地出现.

平面几何的著作,中文的,以梁绍鸿先生的《初等数学复习及研究(平面几何)》为最佳.这本书,内容丰富,结构谨严.不仅有大量的例题,而且作者独具慧眼,侧重于如何解题.书中既介绍推证通法,又分专题(相等,和差倍分与代数证法,不等,垂直与平行,共线点,共点线,共圆点,共点圆,线段计算)讲述证题术.此书一出,洛阳纸贵.当时国内师范院校数学系均以这本书作为教材或主要参考书.时至今日,对于中学教师及准备参加数学竞赛的中学生,这本书仍然是应当仔细研读的经典著作.

梁先生的书有大量的习题,有的难度甚大.谁能将习题全部做出,平面几何的功力当然不凡.但做这些习题,需要花费很多时间,克服很多困难,若非嗜好平面几何的人多数读者或望而生畏,逡巡不前;或浅尝即止,半途而废;或心有余而力不足;或深感“我面前缺少一个指引的人”.

尚强先生早在17岁(1979年)时,即以惊人的毅力将梁书的习题解之过半.后来又将解答不断完善,整理成书,并于1985年由中国展望出版社出版,但印数不多,很快售罄.这次重新出版,非常符合社会的需求.数学教师可以借助这本题解,随时回答学生所提出的几何问题,免去许多演习的时间,以及临时无法解出的尴尬.勤勉的学生得到这本解答,可以与自己的解法对照,获取印证的快乐.遇到解不出的题,也可以得到提示,有所启发(当然,不要急着看完整的解答),不致陷入困境,无法解脱.

撰写、出版这本习题解答是一件大有功德的事情,造福千万莘莘学子.因此,对于尚强先生的辛勤劳动与付出的心血,我们应当说一声:"Thank you very much."

单　墫

2008年12月3日于南京师范大学

前　言

我大概在小学4年级的时候对数学有些兴趣，真正着迷是从初中开始，至今印象深刻：有时做一道方程解应用题连续十几个小时不停手．特别是在听老师讲述完华罗庚故事，我暗暗地下定决心——长大后我要做个数学家（美国著名数学家．前《美国数学月刊》主编哈尔莫斯先生的传记书名就叫《我要做个数学家》．刘培杰注）．可喜也可惜在1978年初，老师给我推荐了一本梁绍鸿先生编著的《初等数学复习及研究（平面几何）》，一下子我就掉进了前世今生的平面几何漩涡中，不能自拔，从此成为数学家的梦也就渐行渐远……

今天大家看的这本解答动笔于30年前，从开始到做完全部问题用了整整7年时间，初版于23年前，本书早已绝版，期间有人在互联网上卖100多块一本的盗版，在美国西北大学的儿子叫我雇律师维权，我怕麻烦，幸好刘培杰先生独具慧眼，才使本习题解答得以重新面世！

对我编写本解答给予帮助的老师有：王忠汉、胡炳生、吴雪庐、孙尚南、路家桥等．光阴荏苒，特别不能忘记那些已经仙逝的恩师：梁绍鸿、赵慈庚、朱德祥、李梦樵、唐以荣等．

尚　强

2008年12月4日于深圳教科院

目　录

第二章　中学平面几何摘要

习 题 2

3. 两个三角形若一边的高及另两边对应相等,试问它们是否全等? 为什么?

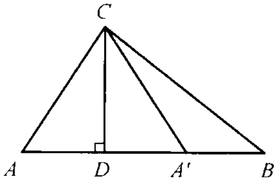
提要　如图,未必全等.

4. 求证:有两条中线相等的三角形必是等腰的.

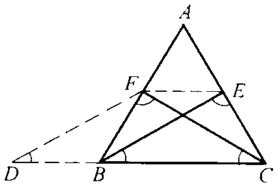
提要　如图,(1) $EFDB$ 为平行四边形;(2) $\triangle BCE \cong \triangle CBF$.

5. 求证:有两条高相等的三角形必是等腰的.

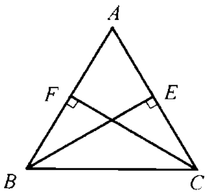
提要　如图,$\triangle BCE \cong \triangle CBF$.



3 题图



4 题图



5 题图

6. 在$\angle XOY$ 的边 OX 及 OY 上各取两点 A,B 及 C,D,使 $OA=OC$ 且 $OB=OD$. 联结 AD 与 BC 交于 E,求证:OE 平分$\angle XOY$.

提要　如图,$\triangle AOD \cong \triangle COB$;$\triangle ECD \cong \triangle EAB$;$\triangle EOA \cong \triangle EOC$.

7. 求证:三角形的任一边都小于该三角形周长的一半.

提要　由 $a+b>c$,有 $a+b+c>2c$.

8. 求证:若一三角形中有一边等于另一边的 2 倍,则最短边的长介于周长的$\frac{1}{6}$与$\frac{1}{4}$之间.

提要　如图,(1)必有 $a>b$,故 b 为最短边.

(2)令$\triangle ABC$的周长为l,因为

$$l = AB + BC + CA = 3AC + BC = 3b + a$$

所以
$$a = l - 3b$$

又
$$AB - AC < BC < AB + AC$$

即
$$AC < BC < 3AC$$

故有
$$b < l - 3b < 3b$$

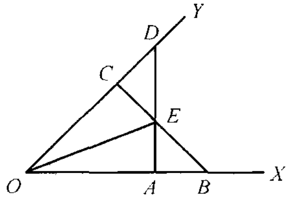
所以
$$\frac{l}{6} < b < \frac{l}{4}$$

9.求证:三角形任一边的中线小于其他两边和的一半,而大于它们差的一半.

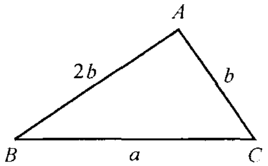
提要 如图,作$MN /\!/ CA$,有

$$AM > AN - MN = \frac{AB - AC}{2}$$

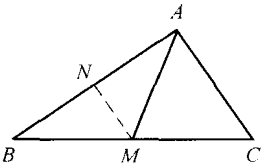
又
$$AM < AN + MN = \frac{AB + AC}{2}$$



6 题图



8 题图



9 题图

10.设在$\triangle ABC$中,$AB > AC$,D是边BC的中点,求证:$\angle ADB > \angle ADC$且$\angle BAD < \angle CAD$.

提要 如图,延长AD至E,使$DE = AD$,则$ABEC$为平行四边形,且$AB > BE$,所以$\angle AEB > \angle EAB$,即$\angle BAD < \angle CAD$.又$\angle C > \angle B$,所以$\angle C + \angle CAD > \angle B + \angle BAD$,即$\angle ADB > \angle ADC$.

11.求证:三角形任一角的平分线不大于对边的中线.

提要 (1)当$\triangle ABC$是等腰三角形时,则对$\angle A$的平分线AD与对边中线AM有$AD = AM$.

(2)如图,若$AB > AC$,由上题有$\angle BAM < \angle CAM$,故$\angle BAC$的角分线AD交边BC于MC的内部一点D.因为$\angle B + \angle BAM < \angle C + \angle CAD$,所以$\angle AMD < \angle ADM$,故$AD < AM$.

由(1),(2)有 $AD \leqslant AM$.

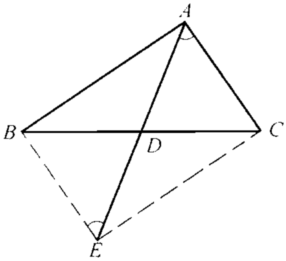
12.设在$\triangle ABC$中,$\angle A$的平分线交边BC于D,求证:

(1)$AB > BD$且$AC > CD$;

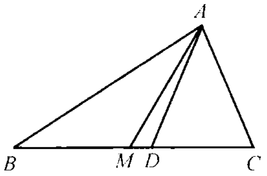
(2)若$AB > AC$,则$BD > CD$.

提要　如图,(1)由$\angle ADB > \angle DAC = \angle DAB$得$AB > BD$;同理,$AC > CD$.

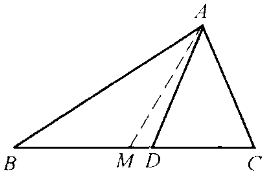
(2)作BC上的中线AM,若$AB > AC$.如上题所述,D在MC内部,故$BD > CD$.(或用角平分线定理)



10题图



11题图



12题图

13.设P是$\triangle ABC$内部的任一点,求证:

(1)$\angle BPC > \angle BAC$;

(2)$\frac{1}{2}(BC + CA + AB) < PA + PB + PC < BC + CA + AB$.

提要　如图,(1)$\angle BPD + \angle CPD > \angle BAP + \angle CAP$.

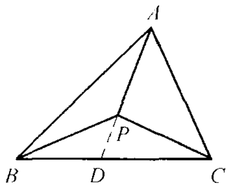
(2)由
$$(PA + PB) + (PB + PC) + (PC + PA) > AB + BC + CA$$
得
$$PA + PB + PC > \frac{1}{2}(BC + CA + AB)$$
由
$$(PB + PC) + (PC + PA) + (PA + PB) < (AB + AC) + (BC + BA) + (CA + AB)$$
得
$$PA + PB + PC < AB + BC + CA$$

14.自等腰三角形底边上任一点引两腰的平行线,且与两腰相交组成平行四边形,求证:这样的平行四边形有一定的周长.

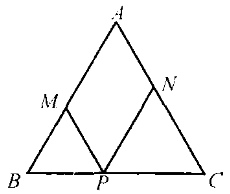
提要　如图,由$MB = MP$,$NP = NC$,得平行四边形的周长为定长$AB + AC$.

15.求证:顺次联结四边形各边的中点,必成一个平行四边形.

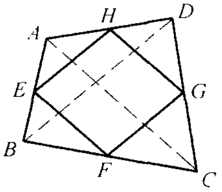
提要　如图,$EF /\!/ HG$且$EF = HG = \frac{AC}{2}$.



13 题图



14 题图



15 题图

16. 求证:若四边形的两对角线互相垂直,则对边中点的连线彼此相等.

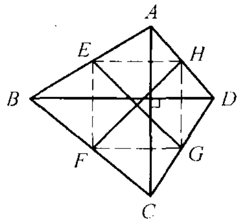
提要 如图,由上题知,$EFGH$ 为矩形.

17. 求证:梯形的两腰中点及两对角线的中点同在一条直线上.

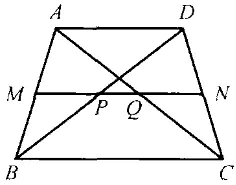
提要 如图,$PN // BC // MN // AD // QN$.

18. 设 G 是△ABC 的重心,延长 BG, CG 至 E, F,使 $GE = 2BG$ 且 $GF = 2CG$,求证:E, A, F 三点同在一条直线上.

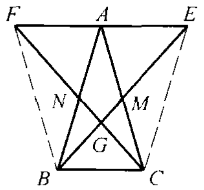
提要 如图,$ME = GE - GM = 4GM - GM = 3GM = BM$,所以 $ABCE$ 为平行四边形,故 $BC // AE$;同理,$BC // AF$.



16 题图



17 题图



18 题图

19. 设 O 是正三角形△ABC 的中心,求证:BO 与 CO 的中垂线必三等分边 BC.

提要 如图,BN, CM 是正△ABC 的中线,所以 $BG = \frac{BN}{3}$,而 $GE // AC$,所以 $BE = \frac{BC}{3}$.

20. 设 I 是△ABC 的内心,过 I 引线平行于 BC 而交 AB, AC 于 E, F,求证:$EF = BE + CF$.

提要 如图,$BE = EI$, $IF = CF$.

21. 设 I, I_1, I_2, I_3 依次是△ABC 的内心及对着 A, B, C 的旁心,求证:

(1) $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$;

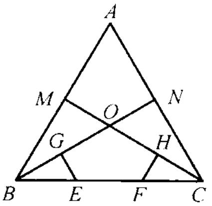
(2)$\angle BI_1C=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$;

(3)$\angle BI_2C=\angle BI_3C=\frac{1}{2}\angle A$.

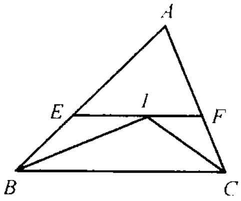
提要　如图,(1)$\angle BIC=(\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle A)+(\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}\angle A)=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$

(2)　$$\angle BI_1C=180^\circ-\angle BIC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$$

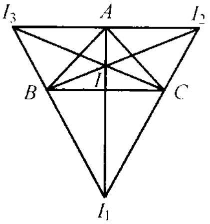
(3)　$$\angle BI_2C=90^\circ-\angle BI_1C=\frac{1}{2}\angle A$$



19 题图



20 题图



21 题图

22. 设 O 是$\triangle ABC$ 的外心,求证:$\angle BOC$ 等于 $2\angle A$ 或等于 $360^\circ-2\angle A$.

提要　(1)如图(a),当$\angle A$ 是锐角时,有

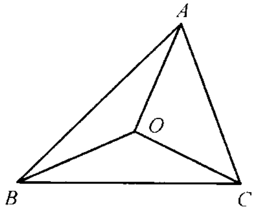
$$\angle BOC=180^\circ-(\angle OBC+\angle OCB)=180^\circ-[180^\circ-(\angle OBA+\angle OCA+\angle A)]=2\angle A$$

(2)当$\angle A$ 为直角时,有

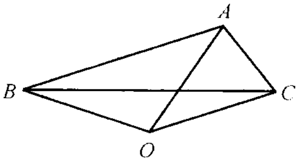
$$\angle BOC=180^\circ=2\angle A$$

(3)如图(b),当$\angle A$ 为钝角时,有

$$\angle BOC=[180^\circ-(\angle OBA+\angle OAB)]+[180^\circ-(\angle OCA+\angle OAC)]=360^\circ-2\angle A$$



(a)



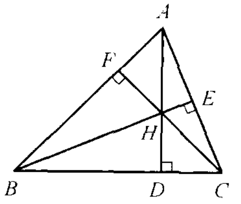
(b)

22 题图

23. 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，求证：$\angle BHC$ 等于 $180-\angle A$ 或等于 $\angle A$.

提要 (1)当 $\angle A=90°$ 时，垂心 H 与点 A 重合，有 $\angle BHC=\angle A$.

(2)如图，当 $\triangle ABC$ 为非直角三角形时，因为 $\angle BHC=\angle EHF$，而 $\angle AEH=\angle AFH=90°$，所以 $\angle BHC=180°-\angle A$.



23 题图

24. 求证：若有四点，其中有一点是其余三点连成的三角形的垂心，则其余三点都有同样的性质.(这样的四点合称为一垂心组.)

提要 如 23 题图，设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，因为 $AH\perp BC$，$AB\perp CH$，$AC\perp BH$，所以 A 为 $\triangle HBC$ 的垂心.

习题 3

1. 求证：若一个线段的两端在圆内，则整个线段全在圆内.

提要 如图，因为 A，B 在圆内，有 $OA<r$，$OB<r$. 作 $OH\perp AB$ 于 H，则 $OH<OB<r$. 设 $HB<HA$，P 为 AB 上任一点，总有 $HP<HA$，因而 $OP<OA<r$，所以点 P 在圆内，故 AB 整个线段在圆内.

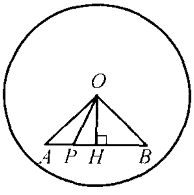
2. 设 AB 是 $\odot O$ 的直径，P 是射线 OA 上的点，C 是 $\odot O$ 上的任意点，求证：$PA\leqslant PC\leqslant PB$.

提要 如图，由 $|CO-OP|\leqslant PC\leqslant PO+OC$，有 $|AO-OP|\leqslant PC\leqslant PO+OB$，所以 $PA\leqslant PC\leqslant PB$.

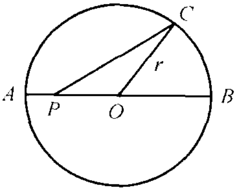
3. 设 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 外离，连心线 OO' 交 $\odot O$ 及 $\odot O'$ 于 A，B 及 C，D，四交点成 $\{ABCD\}$ 的顺序，今在 $\odot O$ 及 $\odot O'$ 上各任取一点 E 及 F，求证：$BC\leqslant EF\leqslant AD$.

提要 如图，由定理 10①

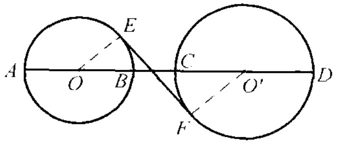
$$\begin{cases}EO+OO'+O'F\geqslant EF\\ OE+EF+FO'\geqslant OO'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AO+OO'+O'D\geqslant EF\\ EF\geqslant OO'-OB-O'C\end{cases}\Rightarrow AD\geqslant EF\geqslant BC$$



1 题图



2 题图



3 题图

① 本书中所有引用的定理、推论及例题均出于梁绍鸿著《初等数学复习及研究(平面几何)》.

4. 设一直线上四点 A,B,C,D 排成 $\{ABCD\}$ 顺序，求证：

(1) 直径各为 AB,CD 的两圆外离；

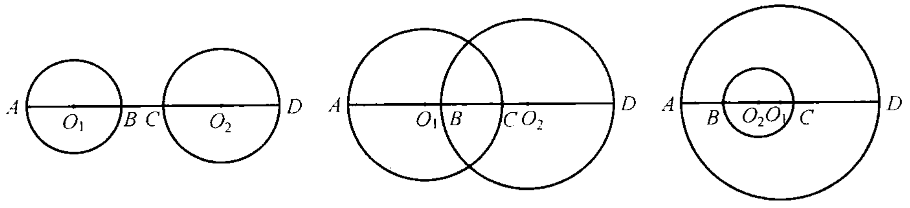
(2) 直径各为 AC,BD 的两圆相交；

(3) 直径各为 AD,BC 的两圆内含.

提要　(1) 如图(a)，$O_1O_2 > r_1 + r_2$，相离.

(2) 如图(b)，$r_1 + r_2 = O_1C + O_2B > O_1B + BO_2 = O_1O_2$；$|r_1 - r_2| = |O_1C - BO_2| < O_1O_2$，相交.

(3) 如图(c)，$|r_1 - r_2| = O_1A - O_2B = AB + O_1O_2 > O_1O_2$，内含.



(a)　　(b)　　(c)

4 题图

5. 在圆上依次取 A,B,C,D 四点，若 $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{CD} > \overset{\frown}{DA}$，求证：弦 $AC < BD$.

提要　如图，因为 $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}$ 大于半圆，故 $\angle ADC$ 为钝角.

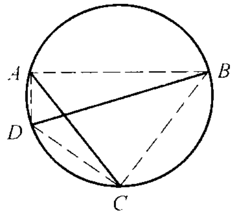
因为 $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$，所以 $\angle ADC > \angle DAB$，同理 $\angle ADC > \angle DCB$，故有 $AC < BD$.

7. 求证：以等腰三角形的腰为直径所作的圆必平分底边.

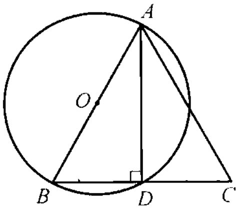
提要　如图，因为 $AD \perp BC$，所以 $DB = DC$.

8. 求证：直角三角形的内切圆直径等于勾股的和减去弦所得的差.

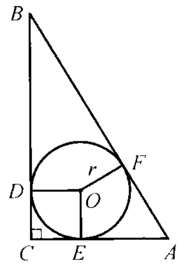
提要　如图，$2r = CD + CE = CA + CB - AB$.



5 题图



7 题图



8 题图

9. 在半径为 r 的圆中有六个轮回两两外切的等圆都与原圆内切,试求这六圆的半径长,并证明这六圆同外切于另一个相等的圆.

提要 (1)如图,设六等圆的半径为 x,因为

$$OO_1 = OO_2 = OO_3 = r - x$$

$$O_1O_2 = 2x = O_2O_3$$

所以

$$\triangle OO_1O_2 \cong \triangle OO_2O_3$$

可得$\triangle OO_1O_2$ 为正三角形,有 $r - x = 2x$,所以 $x = \dfrac{r}{3}$.

(2)因为 $OO_i = r - r_i = \dfrac{2}{3}r,(i = 1,2,\cdots,6)$,所以$\odot O_i(\dfrac{r}{3})$与$\odot O(\dfrac{r}{3})$必外切.

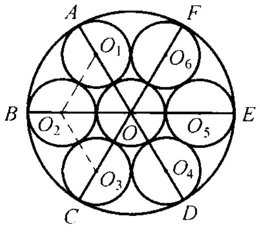
10. 自点 P 向$\odot O$ 引切线 PA,PB,延长半径 OB 至 C,使 $BC = OB$,求证:$\angle APC = 3\angle BPC$.

提要 如图,因为 $\mathrm{Rt}\triangle PBC \cong \mathrm{Rt}\triangle PBO$,所以$\angle CPB = \angle OPB = \angle OPA$.

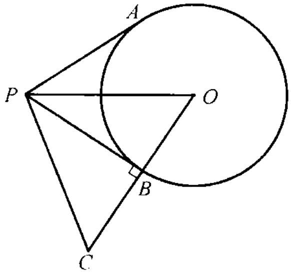
11. AB 是$\odot O$ 的直径,自 AB 的延长线上一点 C 引一割线交$\odot O$ 于 D,E,

若 $CD = OA$,求证:$\angle C = \dfrac{1}{3}\angle AOE$.

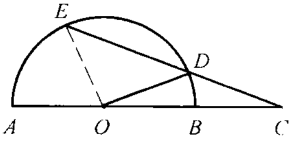
提要 如图,$\angle AOE = \angle E + \angle C = 3\angle C$.



9 题图



10 题图



11 题图

12. 自两相交圆的一交点各引两圆的直径,求证:这两条直径的另一个端点与两圆的另一个交点在同一条直线上.

提要 如图,$\angle PQA$,$\angle PQB$ 均为直角.

13. 圆中有两弦,过每弦的端点作本弦的垂线,求证:所作四线交成的平行四边形的中心与圆心重合.

提要 如图,AB,CD 为圆中的两弦,$PQRS$ 为四线交成的平行四边形,过 O 作 MN,IJ 使分别垂直于 PQ,RS 与 PS,QR,所以 $CG = DH$,$AE = BF$,有 $OM =$

ON，$OI = OJ$，即点 O 与 PQ，RS 及 PS，QR 均等距离．所以圆心 O 为平行四边形 $PQRS$ 的中心．

14．求证：若 AB，CD 是交于圆内且互相垂直的两弦，则 $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}$．反之，若 $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}$，则 $AB \perp CD$．

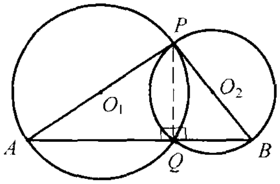
提要　如图，(1)当 $AB \perp CD$ 时，有

$$\angle EBC + \angle ECB = \angle EBD + \angle EDB = 90°$$

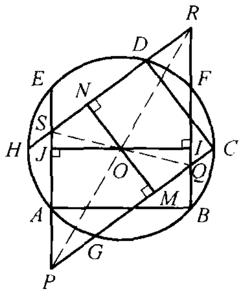
所以

$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}$$

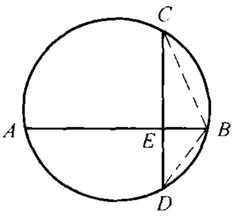
(2)反之可得 $AB \perp CD$．



12 题图



13 题图



14 题图

15．从圆内挖去一个内接凸四边形，造成四个弓形，试证：相对弓形的弧的中点连线互相垂直．

提要　如图，$\overset{\frown}{EH} + \overset{\frown}{FG} = \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{GH}$．

16．从圆内挖去一个内接三角形，造成三个弓形，试证：联结它们的弧的中点所成的三角形，以原三角形的内心为垂心．

提要　(1)如图，设 $\triangle ABC$ 为挖去的内接三角形，则 AD，BE 的交点 I 为 $\triangle ABC$ 的内心．

(2)因为 $\overset{\frown}{AF} + \overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{FB} + \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AE}$，有 $EF \perp AD$，可得 I 为 $\triangle DEF$ 的垂心．

17．设两圆外切于 T，一条外公切线切它们于 A，B，求证：$\angle ATB = 90°$．

提要　如图，$\angle TAB + \angle TBA = \frac{1}{2}(\angle O_1 + \angle O_2) = 90°$．