高等边界元法

黎在良　王　乘　著

科学出版社

高等边界元法

黎在良　王　乘　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书共分 17 章. 前两章分别介绍弹性力学的边界积分方程和边界元法的基本理论构架. 第 3 章介绍解面力边界积分方程应注意的问题及一种解面力边界积分方程的单元动态划分法. 第 4 章叙述求弹性体内部位移和应力场的边界元法后处理问题. 第 5～7 章介绍了传统边界元法一般不考虑的弹性体边界上面力与位移导数之间的关系. 第 8 章详细介绍了单节点二次连续单元的理论和实施技术. 第 9 章用几个典型的算例说明第 5～7 章理论的应用. 第 10～16 章主要介绍了边界元法在断裂力学中的应用. 为读者阅读方便，第 17 章简单地叙述了线弹性断裂力学的主要内容.

本书可作为大学力学、土木、机械、航空航天等专业研究生的教材或参考书，也可供从事相关专业的工程技术人员及教学与科学研究工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等边界元法/黎在良，王乘著. —北京：科学出版社，2008
ISBN 978-7-03-023735-4

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①黎…②王…　Ⅲ. 边界元法　Ⅳ. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 200872 号

责任编辑：张颖兵 / 责任校对：曾　莉
责任印制：彭　超 / 封面设计：苏　波

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉中远印务有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2008 年 12 月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2008 年 12 月第一次印刷　印张：18
印数：1—2 000　字数：460 000

定价：120.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

序

弹性力学的边界积分方程是弹性力学边值问题的精确描述,由边界元法所得到的边界积分方程的解的误差来源于场量形函数的形式和数值积分计算方法的质量.与区域型解法,例如与有限元法相比较,边界型解法需要处理的空间维数少了一维,这使数据输入的准备工作大为简化,网格的划分和重新调整更为方便,最后形成的代数方程组的规模也小得多,因此能够大大缩短计算时间.边界元法中作为权函数的基本解已严格满足问题的微分方程,基本解的奇异性使最后形成的代数方程组的系数矩阵中的对角线和近对角线元素的值远大于其他元素的值.这些特点使边界元法的计算精度大大提高,特别适于处理场量变化梯度很大的问题,例如边界几何形状或边界条件具有奇异性的问题.边界元法在裂纹问题的数值解法中占有特别重要的地位.边界元法在机械、岩土工程、石油管道、造船、航空航天、核工业等需要高精度力学数值分析的高科技领域已得到越来越广泛的应用.近年来边界元法日益受到学术界的重视,已存在几种专门发表有关边界元研究成果的期刊,每年都有有关的国际学术会议召开.

虽然边界元法的提出已有几十年的历史,但仍有很多问题没有解决.在理论方面,该书较详细地介绍了一般边界元法著作很少涉及但十分重要的内容,如边界积分方程中作为独立变量的边界位移和面力在边界几何和载荷的奇点处存在的内在联系、过去很少涉及的弱奇异性面力在边界元理论中的地位和作用、具有第一类间断或其他奇异性边界条件的处理方法、处理边界角点多值问题的完整理论等.在边界元法的具体技术方面,该书详细介绍了由著者近年发展的单节点二次连续单元.这种单元在单元交点处能自动满足边界场量及其沿边界方向导数的连续条件,并且可以准确模拟角点、裂尖等非规则单元交点处的特殊力学和几何特性,从而使边界元分析精度得到数量级的提高.同时,由于这种单元只含有一个内节点,使超奇异面力边界积分方程对源点处位移导数连续的要求自然满足,对解角点问题和裂纹问题具有特别的优势,也非常便于计算机程序的编写.作者在书中用较大的篇幅介绍了边界元法在断裂力学中的应用,包括含裂纹弹性体位移场计算的边界元法、应力强度因子数值计算的理论和方法,及裂纹扩展轨迹的边界元数值模拟等.最后得到的裂纹扩展轨迹的边界元数值模拟具有极高的效率和精度,与实验结果符合得很好,已达到工程实用的要求.

该书作者长期从事边界元法的研究工作,并得到了很多好的结果.书中主要内容是作者近些年完成的研究工作成果,叙述严谨简洁,既重视理论系统的完整、数学和力学意义上的严格,又着重讨论了边界元法在工程中的应用.相信该书将有助于我国广大科技工作者及高等院校有关专业的师生学习、使用和研究边界元法.

中国科学院院士

2008年6月

前　言

本书书名中“高等”二字的意思在于本书将较详细地介绍一般边界元法著作较少涉及但却十分重要的内容. 全书共分 17 章. 第 1 章和第 2 章分别介绍弹性力学的边界积分方程和边界元法的基本理论构架. 边界积分方程包括位移边界积分方程和面力边界积分方程两大类. 位移边界积分方程要求源点处位移连续，这个条件在物理上总是成立的，在计算方法上也容易实现. 面力边界积分方程则要求源点处位移沿边界的导数连续，这个条件在物理上不一定成立. 即使位移沿边界的导数处处连续，当使用边界元法解面力边界积分方程时，若用分片连续的线性或二次 Lagrangian 多项式组成的形函数描述单元的位移，位移沿边界的导数在单元的交点在形式上也会间断，因此面力边界积分方程的使用变得相当复杂. 然而，面力边界积分方程更适于解边界条件具有奇异性的问题，也更适于解边界几何存在奇异性的问题，例如角点问题和裂纹问题.

第 3 章专门介绍了解面力边界积分方程应注意的问题，并提出一种解面力边界积分方程的单元动态划分法. 用边界元法求得边界上的未知量之后，可用各种积分表达式来计算弹性体内任意点(源点)的位移和应力场.

第 4 章叙述了求弹性体内位移和应力场的边界元法后处理内容，特别介绍了源点非常接近光滑边界点时位移和应力场求解的方法及应注意的问题.

第 5～7 章介绍了传统边界元法一般不考虑的弹性体边界上面力与位移导数之间的关系. 这些内容是提高边界元分析的精度和彻底解决传统边界元法中角点多值难点的理论基础.

第 8 章详细地介绍了单节点二次连续单元的理论和实施技术. 这种单元只有一个内节点，边界场量沿边界的导数在单元交点处的连续或奇异性自动得到满足，因此特别适用于解面力边界积分方程.

第 9 章用几个典型的算例说明第 5～8 章理论的应用. 计算结果表明，当边条件具有第一类间断或边界角点处切应力互等不成立时，传统边界元法将不可避免地产生较大误差，而采用第 5～8 章的理论则可得到非常理想的结果. 这一章还介绍了弹性体内部源点非常接近应力多值角点时求源点位移和应力的方法及应注意的问题.

第 10～16 章主要介绍了边界元法在断裂力学中的应用. 第 10 章集中介绍了利用从边界元法得到的裂纹张开位移(COD)求应力强度因子(SIF)的各种方法，并对这些方法的优缺点进行了比较，特别介绍了裂纹张开位移全场拟合法求 SIF 的理论. 第 11～12 章叙述了现在已用得较少的两种解裂纹问题的边界元方法. 第 13 章重点介绍了解裂纹问题的 COD 法. 从几何上讲，这种方法是解裂纹问题的最优选择，但传统的边界元方法要求源点不能取在两单元的交点，从而只能采用在单元交点处位移不连续的间断元. 单节点二次连续单元的引入使这种方法摆脱了只能使用精度较差的间断元的局限. 这一章提供的大量算例说明，采用单节点二次连续单元使裂纹问题 COD 解的精度得到量级的提高，特别，裂

纹尖端附近的 COD 场的精度获得极大的改善,这使得对任意形状的曲裂纹都可用简单的两点位移公式求得高精度的 SIF. 这一章还介绍了弹性体内部源点非常接近裂尖时的应力计算方法. 第 14 章简单地介绍了解裂纹问题的 Green 函数方法.

作为本书前面各章内容的应用,第 15 和 16 章详细地介绍了工程结构疲劳裂纹扩展的数值模拟. 虽有很多关于裂纹扩展轨迹数值模拟的报道,但很少见到对数值模拟误差的详细讨论,尤其很少见到较好的对数值模拟结果的实验验证. 裂纹扩展轨迹数值模拟的效果主要取决于以下两个因素:SIF 的计算精度和好的裂纹扩展轨迹的几何描述. 另一方面,裂纹扩展轨迹的数值模拟包含大量的迭代过程,计算程序的效率也是很重要的. 裂纹扩展轨迹的数值模拟的难度远大于对静态裂纹的应力分析,传统边界元分析方法的精确度往往达不到进行裂纹扩展数值模拟的要求. 对二维裂纹问题,用以上提到的单节点二次连续单元对平面任意形状裂纹进行边界元分析得到 COD 后,采用简单的两点位移公式所得到的 SIF 的相对误差已小于千分之一. 有了高精度的 SIF,由断裂力学理论就可得到可靠的裂纹扩展增量的大小和方向,然后采用裂纹扩展轨迹的连续圆弧模拟法得到裂纹扩展轨迹. 整个过程也适用于多裂纹同时扩展的复杂情况. 裂纹扩展轨迹的数值模拟与实验结果惊人地一致,表明线弹性二维任意裂纹的扩展的数值模拟已达到工程实用的阶段. 对三维裂纹问题,用最简单的常数单元对三维椭圆裂纹、矩形裂纹等工程上感兴趣的裂纹进行边界元分析得到 COD 后,采用裂纹张开位移全场拟合法求得裂纹前缘 SIF 的相对误差可达到小于百分之一的水平. 利用得到的 SIF 由断裂力学理论求得裂纹扩展面的增量,然后采用三次样条得到裂纹新的前缘. 裂纹的形状最后都趋于一个圆裂纹,这个结果与理论上的预言完全一致.

为读者阅读方便,第 17 章简单地叙述了线弹性断裂力学的主要内容.

本书的主要内容为作者和他的合作者及学生在近些年完成的研究工作成果,希望能对我国的力学发展起到微薄的促进作用.

黎在良　王乘

2008 年 4 月于华中科技大学

目　　录

第 1 章　弹性力学问题的边界积分方程

弹性力学问题的边界积分方程可以从若干不同的途径得到. 最通常的途径是从问题的基本解出发,利用弹性理论中的倒易定理先得到弹性体内部位移场的积分表达式,然后令内点趋于边界,得到问题的边界积分方程. 这种做法的优点是力学意义明确,因此以下按此途径叙述.

1.1　弹性力学问题的基本解

考虑表面为 S 的弹性体 V,以位移 u_m 表示的平衡方程为(参阅 17.1 节)

$$c_{ijmn}\frac{\partial^2 u_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_n x_j}=-f_i(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in V,\tag{1.1.1}$$

式中,c_{ijmn}为材料的弹性系数,f_i 为连续分布的体力密度矢量.

现引入集中力的概念. 设在包含点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 的体积 Ω 之中作用着不恒为零的体力密度 $f_i(\boldsymbol{x})$,在 Ω 之外 $f_i(\boldsymbol{x})$恒为零. 体积 Ω 之中总的体力 F_i 为

$$F_i=\int_\Omega f_i(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega(\boldsymbol{x}).$$

如果保持 F_i 不变,体力密度 $f_i(\boldsymbol{x})$作用的体积 Ω 逐渐缩小,但点 $\boldsymbol{y}$ 始终在 Ω 的内部,则 Ω 内的平均体力密度

$$\bar{f}_i=\frac{F_i}{\Omega}$$

将逐渐增大. 当 $\Omega\to 0$ 时, 点 $\boldsymbol{y}$ 的体力密度 $f_i(\boldsymbol{y})$将变成无穷大,将这个极限过程写成

$$\lim_{\Omega\to 0}\int_\Omega f_i(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega(\boldsymbol{x})=F_i,\quad \boldsymbol{y}\in\Omega,\tag{1.1.2}$$

并称在点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 作用一集中力 F_i. 式(1.1.2)表示的集中力在数学上可用 δ 函数写成

$$f_i(\boldsymbol{x})=F_i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).$$

δ 函数具有以下性质:

$$\int_\Omega F_i(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}\Omega(\boldsymbol{x})=\begin{cases}F_i, & \boldsymbol{y}\in\Omega;\\ 0, & \boldsymbol{y}\notin\Omega.\end{cases}$$

在单位集中力的作用下,以位移表示的平衡方程(1.1.1)化为

$$c_{ijmn}\frac{\partial^2 u_{mk}^G(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})}{\partial x_n x_j}=-\delta_{ik}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\tag{1.1.3}$$

式(1.1.3)的解称为弹性力学问题的位移基本解. $u_{mk}^G(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$ 表示在源点 $\boldsymbol{y}$ 沿 x_k 方向作用的单位集中力在场点 $\boldsymbol{x}$ 处沿 x_m 方向的位移分量. 由于边条件没有给定,满足方程(1.1.3)的解是无穷多的. 若某一基本解同时还满足 S 上的边界条件,则该基本解称为该弹性力学问题的 Green 函数. 由弹性力学问题解的存在唯一性定理知,Green 函数是唯一的. 基本解可表达为奇异部分和非奇异部分之和,其中非奇异部分可以相差一个满足齐次平衡方程的任意函数,而奇异部分则是唯一的,因此有时只把奇异部分称为基本解. 实际上,这种意义上的基本解为无穷远处具有自由边条件的全空间弹性问题的 Green 函数.

以 $\sigma_{ijk}^G(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$ 表示在源点 $\boldsymbol{y}$ 沿 x_k 方向作用的单位集中力在场点 $\boldsymbol{x}$ 产生的应力,称之为弹性力学问题的应力基本解. $\sigma_{ijk}^G(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$ 与 $u_{mk}^G(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$ 由 Hooke 定律相联系,即

$$\sigma_{ijk}^G(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=\sigma_{jik}^G(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=c_{ijmn}\frac{\partial u_{mk}^G(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})}{\partial x_n}.\tag{1.1.4}$$

设 $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$,$\mu$ 和 ν 分别为材料的剪切模量和 Poisson 比,下面列出各向同性线弹性问题基本解的解析表达式[1].

1. 平面问题($i,\ j,\ k=1,\ 2$)

$$u_{ik}^G(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=a\left[b\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{ik}+\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right],\tag{1.1.5}$$

式中,

$$a=\frac{1}{8\pi\mu(1-\bar{\nu})};\quad b=3-4\bar{\nu}.\tag{1.1.6}$$

$$\bar{\nu}=\begin{cases}\nu, & \text{平面应变;}\\ \dfrac{\nu}{1+\nu}, & \text{平面应力.}\end{cases}\tag{1.1.7}$$

$$\sigma_{ijk}^G(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=\frac{c}{r}\left[d\left(\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial x_k}-\delta_{ik}\frac{\partial r}{\partial x_j}-\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)-2\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right],\tag{1.1.8}$$

式中,

$$c=\frac{1}{4\pi(1-\bar{\nu})};\quad d=1-2\bar{\nu}.\tag{1.1.9}$$

2. 反平面问题

$$u_{33}^G(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=\frac{1}{2\pi\mu}\ln\left(\frac{1}{r}\right).\tag{1.1.10}$$

$$\sigma_{3j3}^G(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=-\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial r}{\partial x_j}.\tag{1.1.11}$$

3. 三维问题(i, j, k=1, 2, 3)

$$u_{ik}^{G}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r}\left[(3-4\nu)\delta_{ik}+\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right]. \tag{1.1.12}$$

$$\sigma_{ijk}^{G}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left[(1-2\nu)\left(\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial x_k}-\delta_{ik}\frac{\partial r}{\partial x_j}-\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)\right.$$
$$\left.-3\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right]. \tag{1.1.13}$$

注意,当 $r\to 0$ 时,基本解具有奇异性:

对二维问题,$u_{ik}^{G}\sim\ln r$, $\sigma_{ijk}^{G}\sim\frac{1}{r}$;对三维问题,$u_{ik}^{G}\sim\frac{1}{r}$, $\sigma_{ijk}^{G}\sim\frac{1}{r^2}$.

为了以后表达式的统一,令

$$U_{ki}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=u_{ik}^{G}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}). \tag{1.1.14}$$

此外,当场点 $\boldsymbol{x}$ 在边界 S 上时,定义

$$T_{ki}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=\sigma_{ijk}^{G}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{x}), \tag{1.1.15}$$

式中,$n_j(\boldsymbol{x})$为边界 S 的外法向单位矢量. 令 $\frac{\partial r}{\partial n}=\frac{\partial r}{\partial x_j}n_j(\boldsymbol{x})$, $T_{ki}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$ 的解析表达式如下:

平面问题

$$T_{ki}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=\frac{c}{r}\left[d\left(\frac{\partial r}{\partial x_k}n_i-\frac{\partial r}{\partial x_i}n_k\right)-\left(d\delta_{ik}+2\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right)\frac{\partial r}{\partial n}\right], \tag{1.1.16}$$

式中,c 和 d 由式(1.1.9)定义.

反平面问题

$$T_{33}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=-\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial r}{\partial n}. \tag{1.1.17}$$

三维问题

$$T_{ki}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left[(1-2\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_k}n_i-\frac{\partial r}{\partial x_i}n_k\right)\right.$$
$$\left.-\left((1-2\nu)\delta_{ik}+3\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right)\frac{\partial r}{\partial n}\right]. \tag{1.1.18}$$

注意,由以上有关的解析表达式可以看出,$U_{ki}=U_{ik}$,但 $T_{ki}\neq T_{ik}$. 同时注意

$$\frac{\partial U_{ki}}{\partial y_l}=-\frac{\partial U_{ki}}{\partial x_l}.$$

1.2 弹性力学问题解的积分表达式

考虑表面为 S 体积为 V 的弹性体，在 V 上定义一张量

$$W_{jk}=\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})u_{ik}^{G}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})-u_{i}(\boldsymbol{x})\sigma_{ijk}^{G}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}), \tag{1.2.1}$$

式中，σ_{ij} 和 σ_{ijk}^{G} 分别满足方程

$$\frac{\partial\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}=-f_i(\boldsymbol{x}), \tag{1.2.2}$$

$$\frac{\partial\sigma_{ijk}^{G}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})}{\partial x_j}=-\delta_{ik}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{1.2.3}$$

式(1.2.1)两边对 x_j 求偏导，利用式(1.2.2)和(1.2.3)，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_{jk}}{\partial x_j}&=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}u_{ik}^{G}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\sigma_{ijk}^{G}+\sigma_{ij}\frac{\partial u_{ik}^{G}}{\partial x_j}-u_i\frac{\partial\sigma_{ijk}^{G}}{\partial x_j}\\&=-f_iu_{ik}^{G}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\sigma_{ijk}^{G}+\sigma_{ij}\frac{\partial u_{ik}^{G}}{\partial x_j}+u_k\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

由 Hooke 定律，容易得到以下倒易关系：

$$\sigma_{ij}\frac{\partial u_{ik}^{G}}{\partial x_j}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\sigma_{ijk}^{G}. \tag{1.2.5}$$

利用倒易关系(1.2.5)，式(1.2.4)变为

$$\frac{\partial W_{jk}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})}{\partial x_j}=-f_i(\boldsymbol{x})u_{ik}^{G}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})+u_k(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{1.2.6}$$

将式(1.2.6)两边在体积 V 上积分，利用联系体积分和面积分的 Gauss 公式，得

$$\begin{aligned}\varepsilon(\boldsymbol{y})u_k(\boldsymbol{y})&=\int_V\frac{\partial W_{jk}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})}{\partial x_j}\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})+\int_V f_i(\boldsymbol{x})u_{ik}^{G}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})\\&=\int_S W_{jk}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S(\boldsymbol{x})+\int_V f_i(\boldsymbol{x})u_{ik}^{G}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y}\notin S,\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

式中，

$$\varepsilon(\boldsymbol{y})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{y}\in V;\\0, & \boldsymbol{y}\notin V.\end{cases}$$

注意到

$$\begin{aligned}W_{jk}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{x})&=\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})n_j(\boldsymbol{x})u_{ik}^{G}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})-u_i(\boldsymbol{x})\sigma_{ijk}^{G}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{x})\\&=t_i(\boldsymbol{x})U_{ki}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})-u_i(\boldsymbol{x})T_{ki}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}),\end{aligned}$$

式中，$t_i(\boldsymbol{x})=\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})n_j(\boldsymbol{x})$ 为表面 S 上的面力分量，式(1.2.7)变为

$$\varepsilon(\boldsymbol{y})u_k(\boldsymbol{y})=\int_S[U_{ki}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})t_i(\boldsymbol{x})-T_{ki}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})u_i(\boldsymbol{x})]\mathrm{d}S(\boldsymbol{x})+\int_V U_{ki}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})f_i(\boldsymbol{x})\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}).\tag{1.2.8}$$

式(1.2.8)将问题的位移解表达成 S 上的位移及面力在 S 上的面积分和体力在 V 上的体积分之和，称为弹性力学问题解的积分表示定理. 值得指出的是，对一个定解问题，在边界 S 上或者给定位移，或者给定面力，或者给定位移和面力的某种函数关系，不可能同时给定位移和面力. 因此，式(1.2.8)只是问题的解在形式上的一种表达式，它并没有给出问题的解. 但是，若式(1.2.8)中的 U_{ki} 和 T_{ki} 是问题的 Green 函数(例如，在自由边界上 $T_{ki}=0$，在固定边界上 $U_{ki}=0$)，则式(1.2.8)确实以积分的形式给出了问题的解答. 遗憾的是，除极个别情况之外，问题的 Green 函数很难求得. 另一方面，当源点 $\boldsymbol{y}$ 趋于表面 S 时，式(1.2.8)将导出一个解此问题的边界积分方程，详细内容将在下节讨论.

当 $\boldsymbol{y}$ 为 V 的内点时，$\boldsymbol{y}$ 点的应力 $\sigma_{ij}(\boldsymbol{y})$ 可利用 Hooke 定律由式(1.2.8)求出

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{y})=c_{ijnl}\frac{\partial u_n(\boldsymbol{y})}{\partial y_l}=\int_S[D_{ijk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})t_k(\boldsymbol{x})-S_{ijk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})u_k(\boldsymbol{x})]\mathrm{d}S(\boldsymbol{x})+\int_V D_{ijk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})f_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}),\tag{1.2.9}$$

式中，

$$D_{ijk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=c_{ijnl}\frac{\partial U_{nk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})}{\partial y_l}=-c_{ijnl}\frac{\partial U_{nk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})}{\partial x_l};\tag{1.2.10}$$

$$\begin{aligned}S_{ijk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})&=c_{ijnl}\frac{\partial T_{nk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})}{\partial y_l}=c_{ijnl}\frac{\partial\sigma^G_{kmn}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})}{\partial y_l}n_m(\boldsymbol{x})\\&=-c_{ijnl}\frac{\partial\sigma^G_{kmn}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})}{\partial x_l}n_m(\boldsymbol{x}).\end{aligned}\tag{1.2.11}$$

式(1.2.9)即应力的积分表达式. 利用式(1.1.14)和关系 $u^G_{kn}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=u^G_{nk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$，式(1.2.10)可表达为

$$D_{ijk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=-c_{ijnl}\frac{\partial u^G_{kn}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})}{\partial x_l}=-c_{ijnl}\frac{\partial u^G_{nk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})}{\partial x_l}=-\sigma^G_{ijk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}).\tag{1.2.12}$$

$\sigma^G_{ijk}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ 的解析式已在上一节给出. 以下给出各向同性线弹性问题式(1.2.11)所定义的 S_{ijk} 的显式.

1. 平面应变问题($i,j,k=1,2$)

$$S_{ijk}=\frac{2\mu c}{r^2}\left\{2\frac{\partial r}{\partial n}\left[\mathrm{d}\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial x_k}+\nu\left(\delta_{ik}\frac{\partial r}{\partial x_j}+\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)-4\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right]\right.$$

$$+2\nu\left(n_i\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}+n_j\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right)$$
$$+\mathrm{d}\left(2n_k\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}+n_j\delta_{ik}+n_i\delta_{jk}\right)-(1-4\nu)n_k\delta_{ij}\Big\},\tag{1.2.13}$$

式中,c 和 d 由式(1.1.9)定义.

2. 反平面应变问题

$$S_{3j3}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=\frac{\mu}{r^2}\left(n_j-2\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right),\quad j=1,2.\tag{1.2.14}$$

3. 三维问题(i, j, k=1, 2, 3)

$$S_{ijk}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=\frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r^3}\Big\{3\frac{\partial r}{\partial n}\Big[(1-2\nu)\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial x_k}+\nu\left(\delta_{ik}\frac{\partial r}{\partial x_j}+\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)$$
$$-5\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}\Big]+3\nu\left(n_i\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}+n_j\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right)$$
$$+(1-2\nu)\left(3n_k\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}+n_j\delta_{ik}+n_i\delta_{jk}\right)-(1-4\nu)n_k\delta_{ij}\Big\}.\tag{1.2.15}$$

1.3 Cauchy 主值积分和 Hadamard 有限部分积分的概念

上节介绍的弹性力学问题的各种积分表达式中,源点 $\boldsymbol{y}\in V$, $\boldsymbol{y}\notin S$,而场点 $\boldsymbol{x}\in S$,从而 $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\neq 0$,因此,积分是正常的. 当源点 $\boldsymbol{y}$ 趋于边界 S 上的场点 $\boldsymbol{x}$,即 $r\to 0$ 时,位移积分表达式的积分核 $U_{ki}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$以 $\ln r$(二维问题)或$\frac{1}{r}$(三维问题)趋于无穷大,但相关的积分在 Riemann 意义下是可积的,我们称 $U_{ki}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$具有弱奇异性;积分核 $T_{ki}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$以$\frac{1}{r}$(二维问题)或$\frac{1}{r^2}$(三维问题)趋于无穷大,相关的积分在 Cauchy 主值意义下是可积的,我们称 $T_{ki}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$具有强奇异性. 当 $r\to 0$ 时,应力积分表达式的积分核 $D_{ijk}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$具有以$\frac{1}{r}$(二维问题)或$\frac{1}{r^2}$(三维问题)趋于无穷大的 Cauchy 强奇异性;而积分核 $S_{ijk}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$以$\frac{1}{r^2}$(二维问题)或$\frac{1}{r^3}$(三维问题)趋于无穷大,相关的积分在 Hadamard 主值意义下才是可积的,我们称 $S_{ijk}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$具有超强奇异性. 以后将说明,当 $r\to 0$ 时,各种积分表达式将变为相应的边界积分方程. 在进一步讨论弹性力学问题的边界积分方程之前,本节先介绍以后经常用到的 Cauchy 主值积分和 Hadamard 有限部分积分的概念.

首先讨论一维问题. 对函数 $f(x)$，若存在一个正的实数 C 和 $0<\alpha\leqslant 1$，使

$$|f(x)-f(s)|\leqslant Cr^{\alpha} \tag{1.3.1}$$

成立，则称 $f(x)$ 在 $x=s$ 附近具有 Hölder 意义下的连续性. 若 $f(x)$ 在 $x=s$，$a<s<b$，满足 Hölder 条件(1.3.1)，则积分

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_a^{s-\varepsilon}\frac{f(x)}{x-s}\mathrm{d}x+\int_{s+\varepsilon}^{b}\frac{f(x)}{x-s}\mathrm{d}x\right\} \tag{1.3.2}$$

定义为 Cauchy 意义下的主值积分，并记为

$$I=⨍_a^b\frac{f(x)}{x-s}\mathrm{d}x.$$

可以这样理解 Cauchy 主值积分：当 $\varepsilon\to 0$ 时，式(1.3.2)右边两个积分的发散部分互相抵消. 设

$$g(x)=\frac{1}{(x-a)^n}+h(x),\quad n\geqslant 1,$$

式中，$h(x)$ 是一 Riemann 意义下的可积函数. 令

$$J_\varepsilon=\int_{a+\varepsilon}^{b}g(x)\mathrm{d}x=I(\varepsilon)+F(\varepsilon),$$

式中，

$$I(\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-1)\varepsilon^{n-1}}, & n>1;\\ -\ln\varepsilon, & n=1;\end{cases}$$

$$F(\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-n}}{1-n}+\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b}h(x)\mathrm{d}x, & n>1;\\ \ln(b-a)+\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b}h(x)\mathrm{d}x, & n=1.\end{cases}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，$I(\varepsilon)$ 发散而 $F(\varepsilon)$ 有限. Hadamard[2] 定义 $F(0)$ 为发散积分 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 的有限部分，或称为 Hadamard 主值积分，记作

$$F(0)=\mathop{⨎}_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Cauchy 主值积分也可以当作两个 Hadamard 主值积分之和，即

$$⨍_a^b\frac{f(x)}{x-s}\mathrm{d}x=\mathop{⨎}_a^s\frac{f(x)}{x-s}\mathrm{d}x+\mathop{⨎}_s^b\frac{f(x)}{x-s}\mathrm{d}x. \tag{1.3.3}$$