一册在手　考试不愁

全国十大名校试卷汇编
——线性代数

- 清华大学
- 北京理工大学
- 华南理工大学
- 北京邮电大学
- 天津大学
- 北京航空航天大学
- 华东理工大学
- 哈尔滨工业大学
- 上海交通大学
- 北方交通大学

名校考题
大揭秘

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

全国十大名校试卷汇编

——线性代数

清华大学
北京理工大学
华南理工大学
北京邮电大学
天津大学
北京航空航天大学
华东理工大学
哈尔滨工业大学
上海交通大学
北方交通大学

天津大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国十大名校试卷汇编/清华大学等编.—天津:天津大学出版社,2003.1
ISBN 7-5618-1027-X

Ⅰ.全… Ⅱ.清… Ⅲ.线性代数-高等学校-试题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 092381 号

组稿编辑 郭建国 赵淑梅
责任编辑 郭建国 杨秀雯
技术设计 油俊伟
封面设计 谷英卉

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印　　刷 河北省昌黎县人民胶印厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm×260mm
印　　张 14.25
字　　数 356 千
版　　次 2003 年 1 月第 1 版
印　　次 2003 年 1 月第 1 次
印　　数 1—10 000
定　　价 20.00 元

(十大名校按收到稿件的先后顺序排列)

哪个方

①

②

ŀ矛盾.

③

三、(本题 15 分)设

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+1 & 2a & 3a+1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

且存在 3 阶非零方阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$,求 a.

四、(本题 15 分)

(1)设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,证明:$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆;

(2)对满足(1)中条件的 $\boldsymbol{A}$,设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 与之具有关系 $\boldsymbol{AX}=2(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{X}+2\boldsymbol{E}$,求 $\boldsymbol{X}$.

五、(本题 15 分)

设
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

(1)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(2)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵.

六、(本题 15 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶实对称矩阵且 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 均不可逆.已知齐次线性方程组

$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})X=\boldsymbol{0} \text{ 与 } (2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})X=\boldsymbol{0}$$

各一个解向量 $(1,1)^{\mathrm{T}}$ 与 $(1,-1)^{\mathrm{T}}$.

(1)求 $\boldsymbol{A}$;

(2)写出二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 的一个标准形,并指出二次曲线 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=4$ 的形状.

七、(本题 10 分)

一个电子公司生产三种计算器 $T1,T2,T3$.每台计算器由五种配件构成:P1(晶体管)、P2(电阻)、P3(按钮)、P4(外壳)、P5(计算机芯片),而生产这些配件需四种原材料:M1(铜)、M2(锌)、M3(玻璃)、M4(塑料).设

m_{ij} = 生产一个 Pj 所需 Mi 的数量,

p_{ij} = 生产一台 Tj 所需 Pi 的数量.

令 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{5\times3}$, $\boldsymbol{M}=(m_{ij})_{4\times5}$, $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{MP}$.问 $\boldsymbol{T}$ 的每个元素具有什么实际涵义?为什么?

五、(本题 15 分)

设
$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$$
是实二次型,证明:若 $f(x,y)$ 正定,则方程 $f(x,y)=d$ 确定的二次曲线是椭圆或圆,这里 d 是任意正实数.

六、(本题 15 分)

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,令
$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_{n-1}=\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\ \boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1.$$
当 $n=4$ 时,可推出如下结论:

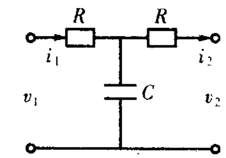
"因为
$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_4\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0},\end{aligned}$$
且系数 1, -1, 1, -1 不全为零,故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关."

(1)推广上述方法,证明:当 n 是偶数时,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性相关;

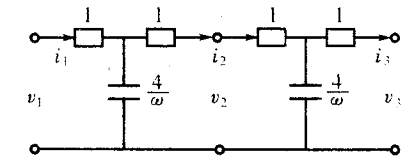
(2)当 $n=3$ 时,找三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.由此说明,(1)的结论在 n 是奇数时不成立.

七、(本题 10 分)

已知图(a)表示的四端网络中,输入电流 i_1、输入电压 v_1 与输出电流 i_2、输出电压 v_2 有如下关系:
$$\begin{bmatrix}v_1\\i_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\mathrm{i}\omega CR & R(2+\mathrm{i}\omega CR)\\ \mathrm{i}\omega C & 1+\mathrm{i}\omega CR\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_2\\i_2\end{bmatrix}.$$
求图(b)表示的网络中,输入电流 i_1、输入电压 v_1 与输出电流 i_3、输出电压 v_3 的关系式(i 是虚数单位).



图(a)



图(b)

种可能的组

四、(本题 15 分)

已知实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_2+x_3+x_4)^2+(x_1+x_3+x_4)^2+(x_1+x_2+x_4)^2+(2x_1+2x_2+2x_3+tx_4)^2$$

构造线性变换

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_2+x_3+x_4,\\ y_2 &= x_1+x_3+x_4,\\ y_3 &= x_1+x_2+x_4,\\ y_4 &= 2x_1+2x_2+2x_3+tx_4,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(1) t 取何值时,线性变换①是非退化的?

(2)当 $t=3$ 时,是否可找到 4 个不全为零的实数 c_1,c_2,c_3,c_4 使

$$f(c_1,c_2,c_3,c_4)=0;$$

(3)当 $t=3$ 时,线性变换①把二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 化为

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2,$$

问是否可断言实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 是正定的?

(对上述问题的回答须说明原因)

五、(每题 15 分)设 F_n 表示 n 阶行列式

$$F_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}\ (n\geqslant 2),$$

称 F_n 为 Fibanacci 数.

(1)证明:$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{n-1}\\ F_{n-2}\end{bmatrix}$;

(2)把矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 对角化;

(3)求 F_n(选做).

六、(本题 15 分)

某公司为了技术更新,计划对职工实行分批脱产轮训.已知该公司现有 2 000 人正在脱产轮训,而不脱产职工有 8 000 人.若每年从不脱产职工中抽调 30% 的人脱产轮训,同时又有 60% 脱产轮训职工结业回到生产岗位.设职工总数不变.令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\ 0.3 & 0.4\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}8\ 000\\ 2\ 000\end{bmatrix}.$$

试用 A 与 X 通过矩阵运算表示一年后和二年后的职工状况,并据此计算届时不脱产职工与脱产职工各有多少人.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

五、(本题 12 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

求:(1)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值;

(2)所有的特征向量;

(3)求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 成为对角矩阵.

六、(本题 9 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,试证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.

七、(本题 12 分)

某乳品市场,有三家供应厂商,各厂商的顾客经常互相流动。在 6 月份中顾客增减得失情况如下表所示:

客户得失转移情况表

企业	期初	新增户数			失去户数			期末
	客户数	得自 A	得自 B	得自 C	流向 A	流向 B	流向 C	客户数
A	560	-	80	30	-	10	20	640
B	280	10	-	20	80	-	60	170
C	160	20	60	-	30	20	-	190

此表所述情况是假设顾客总数不变,所有新增加的顾客系来自其他厂商的原有顾客,所失去的顾客亦皆转为其它供应厂商的顾客.

问:(1)定义:市场占有率 $=\dfrac{\text{当期企业客户数}}{\text{市场客户总数}}$;

请用向量 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 表示期初(6 月底)市场占有率.

(2)定义:转移矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{3\times3}$,

其中 $p_{ij}=\dfrac{\text{从 } i \text{ 企业流向 } j \text{ 企业的客户数}}{i \text{ 企业期初客户总数}}$, $i=\mathrm{A,B,C}; j=\mathrm{A,B,C}$;

请用矩阵表示 7 月底市场占有率的预测式,并计算预测值.

(3)如果市场发展达到稳定平衡状态,即上一期市场占有率同下一期市场占有率不变,请求出平衡状态下的市场占有率.

华南理工大学
2000 ~ 2001 学年
线性代数期末考试试卷

一、填空题(本题 30 分,每小题 3 分)

1.设方程 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 3 & 3 \\ 3 & 3 & x & 4 \\ 4 & 4 & 4 & x \end{vmatrix} = 0$,方程的解是________.

2.设 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{X} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{X} =$________.

3.设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 7\boldsymbol{E} = 0$,则 $(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E})^{-1} =$________.

4.已知 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的三阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}| = 3$,则 $|\boldsymbol{A}^*| =$________.

5.设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,则 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^{-1} =$________.

6.设 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,当 t 满足________时,二次型 f 是正定的.

7.设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-6,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,5)$,$\boldsymbol{\alpha}_3 = (3,7,8)$,$\boldsymbol{\beta} = (7,-2,t)$,当 $t =$________时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

8.当 $t =$________时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,3)$,$\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,t)$线性相关.

9.若 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2,\lambda_2 = 3,\lambda_3 = 1$,则 $|\boldsymbol{A}| =$________.

10. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$________.

二、(本题 10 分)

求方程 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 + x \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & a_4 \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & a_4 \\ a_1 + x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$ 的全部解.

三、(本题 10 分)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

四、(本题 10 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.

五、(本题 10 分)

解方程组(用基础解系表示解)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

六、(本题 10 分)

当 a, b 取何值时,方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ 有唯一解,有无穷多解,无解.

七、(本题 10 分)

用正交变换化二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

为标准形.

八、(本题 10 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,它有一个特征值 $\lambda = 3$,且线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$.

可量均线性无关.

【 】

为 n 阶方阵,则

:.

关.

【 】

$\neq b \neq c$,则方程 $f(x)=0$ 的全部根为________.

$A_{42}+2A_{43}+A_{44}=$ ________.

____.

$^2-9\boldsymbol{E})=$ ________(其中 $\boldsymbol{E}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的单位

$\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{X}=$ ________.

$|\boldsymbol{B}|=3$,求:

四、(本题 10 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}$ 是非零的 3 阶矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,求 t 值.

五、(本题 10 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-4&-3&1\\-5&-3&1\\6&4&-1\end{bmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,求 $\boldsymbol{B}$.

六、(本题 10 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

(1)求向量组的一个极大无关组和向量组的秩;

(2)求出其余向量由极大无关组的线性表示.

七、(本题 10 分)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}$. 试讨论

(1) a,b 取何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2) a,b 取何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,并写出此表达式.

八、(本题 10 分)

已知 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的一个特征向量,利用此条件

(1)确定常数 a,b;

(2)确定特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 对应的特征值 λ;

(3)问矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵,并说明理由.

九、(本题 10 分,每小题 5 分)

(1)设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|<0$,证明: $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

(2)设 $\mathbf{R}^3$ 的子集 $W=\{(x,y,z)\mid 2x-y+3z=0\}$,

证明: W 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间,并求空间 W 的 一个基.

阵，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$.

x_2x_3

向量分别为 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$,

四、(本题 10 分)

当 a、b 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a, \\ \quad\ \ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

无解？何时有解？并在有解时，求出其通解.

五、(本题 8 分)

向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,0,1),$

$\boldsymbol{\alpha}_4=(-3,-2,3,0,-1)$.

(1)求向量组 $\boldsymbol{A}$ 的秩及其一个极大线性无关组；

(2)将 $\boldsymbol{A}$ 的每一个向量用极大线性无关组线性表示.

六、(本题 10 分)

用正交变换把下面二次型化为标准形.

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3.$$

七、(本题 8 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由向量组 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且表示式中 $\boldsymbol{\beta}$ 的系数不为零.求证向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价.

八、(本题 5 分)

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，证明：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵.

九、(本题 4 分)

设 n 阶实对称的幂等阵 $\boldsymbol{A}$(即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$)的秩为 r，且 $0<r<n$，计算行列式

$$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^n|.$$