编号

高等数学作业集

（总　册）

西北工业大学高等数学教材编写组　编

GAODENG SHUXUE ZUOYEJI

姓名 ______________________

班级 ______________________

学号 ______________________

西北工业大学出版社

高等数学作业集

（总册）

西北工业大学高等数学教材编写组　编

西北工業大學出版社

【内容简介】 本练习册与西北工业大学高等数学教材编写组编写的《高等数学》配套使用。本练习册选题注重基本概念、基本定理、基本运算，适当配有提高题，以训练学生的解题技巧，其中穿插有数学家小传和数学史资料等，每册书后附有习题答案。本练习册的特点是选题精，内容系统，适合于工科专业本科生使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学作业集/西北工业大学高等数学教材编写组编．—西安：西北工业大学出版社，1999.8

ISBN 7-5612-1146-5

Ⅰ.高… Ⅱ.西… Ⅲ.高等数学—高等学校—习题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第27977号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号 **邮编**：710072
电　　话：029—88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西友盛印务有限责任公司印刷
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：17.25
字　　数：430千字
版　　次：2005年8月第1版　2005年8月第1次印刷
印　　数：1～6 000
定　　价：25.00元(本册定价：6.00元)

前　言

高等数学是工科院校最重要的基础课之一，学生对其内容掌握的程度如何，不仅直接影响到后续课程的学习，而且对今后工作将产生重要影响。在高等数学课程的学习中，学生不仅要注意获取必要的数学知识，更为重要的是，在获取数学知识的同时，要努力提高自己的抽象思维、逻辑推理、运算技能、综合应用等方面的能力。一本好的作业集，对内容的消化、所学知识的巩固以及上述各种能力的培养与训练，都将有重要的作用。

本练习册是由西北工业大学应用数学系具有丰富教学经验的教师于 1993 年编写完成并开始在教学中使用的。十二年来，曾几次修订、完善。习题的深广度，紧扣原国家教委颁发的"高等工业学校高等数学课程教学基本要求"。实践表明，使用该作业集，对保证高等数学课的教学质量起到了积极的作用。

本练习册与西北工业大学高等数学教材编写组编的《高等数学》教材配套使用。全书共分十二章，每一章由若干节及总习题组成。各节中的习题是大课后的作业，每一章的总习题是习题课后的作业。本作业集共分四册，这是为了方便学生交作业而编排的，为了提高学生对数学的兴趣，开阔眼界，增长知识，作业集中还穿插了一些数学家简介、数学笑话、智力趣题等，可以使学生的大脑在紧张中得到放松。每册书的末尾都附有习题答案。

参加本书编写工作的有肖亚兰、陆全、孟雅琴、杨月茜、刘哲、刘小冬、郑红婵、符丽珍、李云珠、郑兴媛、陈瑜、杨敬娟、王寿生、陈淑云。

限于编者水平，书中难免有错误、疏漏之处，敬请同行们批评指正。

编　者

2005 年 5 月

目　　录

第一章　函数与极限

1. 设 $f(x+1)=x^2-1$，则 $f(\sin x)=$ ________________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ \dfrac{1}{1+x^2}, & x\geqslant 0\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}1-e^x, & x>0\\ x^2, & x\leqslant 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

3. 计算下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$ $(|a|<1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n\sin\dfrac{t}{a^n}$ $(a\neq 0,\ t\neq 0)$.

4. 计算下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}$.

5. 已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-[A+B(x-1)]}{x-1}=0$，试求 A,B 之值．

6. 设 $A=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，且 $a_k>0(k=1, 2, \cdots, m)$，用夹逼准则证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$，这里 n 是自然数．

7. 已知 $x_1=\sqrt{6}$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\leqslant x<0\end{cases}$,试研究 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性.

9. 研究函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}$ $(-\infty<x<+\infty, n\in N)$ 的连续性.

10. 设在 $x=x_0$ 处,$f(x)$ 连续,$g(x)$ 间断,试证明 $f(x)\pm g(x)$ 在 $x=x_0$ 也间断.

设有一对新出生的兔子,两个月之后成年。从第三个月开始每个月产一对小兔,且新生的每对小兔也在出生两个月之后成年,第三个月开始每月生一对小兔,假定出生的兔子均无死亡,(1) 问一年后共有几对兔子?(2) 问 n 个月之后有多少对兔子?(3) 若 n 个月之后有 F_n 对兔子,试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$(题中所讲一对兔子均是雌雄异性的).

说明:该问题是意大利数学家 Fibonacci 于 13 世纪初(1202 年)研究兔子繁殖过程中数量变化规律时提出来的,其中正数列 F_n 被后人称为 Fibonacci 数列.有趣的是,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$ 正是“黄金分割”数,在优选法及许多领域得到很多新的应用.

第二章　导数与微分

1. 证明可导的偶函数的导数为奇函数．

2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义的函数，且具有如下性质：
(1) $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$；
(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 $x=0$ 可导，且已知 $f(0)=0$，$g(0)=1$.
证明：$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导．

3. 设 $f(x)=2^{|a-x|}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的可导性，并求 $f'(x)$.

4. 设 $y=\ln\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 y'.

5. (1) 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\dfrac{1}{x})^{2tx}$，则 $f'(t)=$ ________;

(2) 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$ ________.

6. 设 $y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$.

7. 设 $y = f(e^x + \sin x)$，f 具有二阶导数，求 y' 及 y''.

8. 证明：$(\sin^4 x + \cos^4 x)^{(n)} = 4^{n-1}\cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

9. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ ax^2 + bx + c, & x \geqslant 0 \end{cases}$，$f''(0)$ 存在，确定常数 a，b，c 的值 .

10. 设参数方程$\begin{cases} x = t - \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$，求$\dfrac{dx}{dy}$及$\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

11. 已知$\sqrt{x^2+y^2} = a e^{\arctan\frac{y}{x}}$，求 y''.

12. 设 $y = x^{x^a} + x^{a^x}$ $(a > 0, x > 0)$，求 y'.

13. 液体从深为 18 cm，顶部直径为 12 cm 的正圆锥形漏斗，漏入直径为 10 cm 的圆柱形桶中．开始时漏斗盛满液体．已知漏斗中液面深 12 cm 时，液面下落速度为 1 cm/min，问此时桶中液面上升的速度是多少？

牛顿(1642—1727)是英国物理学家、数学家、天文学家，是世界上最伟大的科学家之一，贡献卓著。

在数学方面，他在前人的基础上，提出了“流数法”，与莱布尼兹几乎同时创立了微积分学，为高等数学奠定了基础，开创了数学史上的一个新纪元，他还建立了二项式定理。

在力学方面，他在伽利略等人工作的基础上，经过研究总结出了力学上的三大定律，奠定了现代物理学的基础。他进一步发展了开普勒等人的工作，发现了万有引力定律，他把地球上物体的力学和天体力学统一到一个基本的力学体系中，创立了经典力学体系，这正确地反映了宏观物体低速运动的客观规律。这是人类对自然界认识的一次飞跃，在光学和天文学等方面，牛顿也有重要贡献。

第三章　微分中值定理与导数的应用

1. 若 $f(x)$ 是$[a, b]$上的正值可微函数,则有点 $\xi(a<\xi<b)$,使

$$\ln\frac{f(b)}{f(a)}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a)$$

2. 设 $f(x)$ 在$[0, 1]$上可微,证明:一定存在 $\xi\in(0, 1)$,使得 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

3. 设 $a>1$, $n\geqslant 1$,证明不等式$\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\ln(1-x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{a_1^{1/x}+a_2^{1/x}+\cdots+a_n^{1/x}}{n}\right)^{nx}$（其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n>0$）.

5. 假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在二阶导数，并且 $g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证：

(1) 在开区间 (a, b) 内 $g(x)\neq 0$；

(2) 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ 使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

6. 研究函数 $y=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$($n$ 为自然数)的极值.

7. 函数 $y=a\ln x+bx^2+x$ 在 $x_1=1$,$x_2=2$ 处有极值,试求 a 和 b 之值,证明已给函数对于 a 和 b 这两个值在点 x_1 处为极小,在点 x_2 处为极大.

8. 求椭圆 $x^2-xy+y^2=3$ 上纵坐标最大和最小的点.

9. 设点$(1,-1)$是曲线 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 的拐点,$x=0$ 是函数 x^3+ax^2+bx+c 的极值点,求常数 a,b,c.