北京市高等教育精品教材立项项目

中国科学院研究生院教材

Textbooks of Graduate University of Chinese Academy of Sciences

图论与网络流理论

高随祥 编著

Graph Theory and Network Flow Theory

高等教育出版社
Higher Education Press

北京市高等教育精品教材立项项目

中国科学院研究生院教材

Textbooks of Graduate University of Chinese Academy of Sciences

图论与网络流理论

高随祥 编著

Graph Theory and Network Flow Theory

高等教育出版社
Higher Education Press

内容提要

本书系统地阐述图论与网络流理论的基本概念、方法和定理, 介绍该领域重要的问题以及典型的算法, 展示图论与网络流模型及方法的广泛应用。全书立足基础、兼顾理论与应用, 选材精炼, 贴近研究和应用前沿, 注重思想和方法。主要内容包括图的基本概念、最短路及最小生成树、连通性、匹配、Euler 图、Hamilton 图、支配集、独立集、覆盖集、图的染色、平面图、有向图、网络流等方面的理论与算法。每章配有大量习题和前沿性的专题参考文献。

本书可作为数学、运筹学、系统科学各专业硕士研究生或本科高年级学生的教材或参考书, 也可供物理学、化学、生命科学、计算机科学与技术、电子科学与技术、信息科学与网络工程、资源与环境、物流与交通运输、管理科学与工程、过程工程、自动控制等学科专业的本科生、研究生使用, 还可供相关领域的科研工作者、广大图论爱好者参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

图论与网络流理论/高随祥编著. — 北京: 高等教育出版社, 2009. 1

ISBN 978-7-04-020009-6

I. 图··· II. 高··· III. ① 图论 ② 网络流 IV. O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 188887 号

策划编辑 张长虹 **责任编辑** 李 陶 **封面设计** 王凌波
版式设计 范晓红 **责任校对** 王 雨 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010 - 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800 - 810 - 0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http: //www. hep. edu. cn
总　　机	010 - 58581000		http: //www. hep. com. cn
		网上订购	http: //www. landraco. com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http: //www. landraco. com. cn
印　　刷	北京明月印务有限责任公司	**畅想教育**	http: //www. widedu. com
开　　本	787 × 1092　1/16	**版　　次**	2009 年 1 月第 1 版
印　　张	23	**印　　次**	2009 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	450 000	**定　　价**	35.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　20009 - 00

总 序

在中国科学院研究生院和高等教育出版社的共同努力下，凝聚着中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血和汗水的中国科学院研究生院教材面世了。这套教材的出版,将对丰富我院研究生教育资源、提高研究生教育质量、培养更多高素质的科技人才起到积极的推动作用。

作为科技国家队，中国科学院肩负着面向国家战略需求，面向世界科学前沿，为国家作出基础性、战略性和前瞻性的重大科技创新贡献和培养高级科技人才的使命。中国科学院研究生教育是我国高等教育的重要组成部分，在新的历史时期，中国科学院研究生教育不仅要为我院知识创新工程提供人力资源保障，还担负着落实科教兴国战略和人才强国战略，为创新型国家建设培养一大批高素质人才的重要使命。

集成中国科学院的教学资源、科技资源和智力资源，中国科学院研究生院坚持教育与科研紧密结合的“两段式”培养模式，在突出科学教育和创新能力培养的同时，重视全面素质教育，倡导文理交融、理工结合，培养的研究生具有宽厚扎实的基础知识、敏锐的科学探索意识、活跃的思维和唯实、求真、协力、创新的良好素质。

研究生教材建设是研究生教育中重要的基础性工作。由一批活跃在科学前沿,同时又具有丰富教学经验的科学家编写的中国

科学院研究生院教材，适合在校研究生学习使用,也可作为高校教师和专业研究人员的参考书。这套研究生教材内容力求科学性、系统性、基础性和前沿性的统一,使学习者不仅能获得比较系统的科学基础知识,也能体会蕴于其中的科学精神、科学思想、科学方法，为进入科学研究的学术殿堂奠定良好的基础；优秀教材不但是体现教学内容和教学方法的知识载体、开展教学的基本条件和手段，也是深化教学改革、提高教育质量、促进科学教育与人文教育结合的重要保证。

“十年树木，百年树人”。我相信，经过若干年的努力，中国科学院研究生院一定能建设起多学科、多类型、多品种、多层次配套的研究生教材体系，为我国研究生教育百花园增添一枝新的奇葩，为我国高级科技人才的培养作出新的贡献。

中国科学院 常务副院长
中国科学院研究生院 院长
中国科学院 院士

白春礼

二〇〇六年二月二十八日

前　　言

图论是研究集合元素间二元关系的学科分支, 这种关系可用拓扑图形来表示。图论研究这些拓扑图形的各种结构性质, 如连通性、可遍行性、可平面性、匹配性质、染色性质、某些特殊结构、特殊的顶点子集和边子集以及图形上流的性质。

历经数百年的发展, 特别是得益于计算机科学和信息科学的有力推动, 图论与网络流理论已形成了一门既有趣又有用、既成熟又活跃的学科分支, 其理论自成一体, 不需要大量的预备知识, 各组成部分有关联, 但又相互独立, 具有自己典型的方法, 内容充满思想性和技巧性, 是十分适合进行逻辑思维训练的 “智力体操”。许多易懂不易解的难题, 形成了图论与网络流理论的独特魅力, 对研究者和学习者具有巨大的挑战性。图论与网络流理论的应用十分广泛, 在运筹学、应用数学、计算机科学与技术、信息科学、生命科学、自动控制、工程建设以及能源、交通、电子、通信、化学、物流、管理、社会科学等众多领域都能找到其应用范例。图论与网络流理论中有大量典型的模型和算法, 是许多学科中值得借鉴的模型库和算法基础。图论与网络流理论中有大量的 $NP-$ 难解问题, 因而它是算法理论和设计的重要参照系和试验田。

本书是图论与网络流理论的一本入门读物, 书中较为系统地阐述图论与网络流理论的基本概念、方法和定理, 介绍该领域一些重要的问题以及典型的算法, 展示图论与网络流理论模型与方法的广泛应用, 试图为学习者从事有关方面的理论研究打下基础, 也为进行应用研究的读者提供一种有力的工具。

本书根据笔者多年为研究生授课的讲义整理编写而成。成书时尽量考虑了内容的多学科适用性, 力求深入浅出, 既照顾初学者的入门需要, 又考虑研究者的需求, 既重视理论分析, 又注意应用举例和内容延伸, 既体现数学推理的严密性, 又展示算法设计与分析的灵活性, 基础知识的阐述与应用技巧的介绍并重。在选材和内容编排上力求系统全面, 做到主体内容精炼、外延广泛。在文字表述上力求条理清晰、通俗易懂。

本书立足基础、面向研究和应用前沿。几乎每一章都是一个研究专题, 在相应章节中指出重要的研究方向, 并配有大量反映最新研究进展和成果的参考文献, 以便读者可以从入门很快进入到该专题的研究前沿。每章后配有大量习题, 其中既有较容易

的巩固性习题,又有关于正文内容的补充性习题,还有较难的拓展性习题。读者可根据自身情况选做。有些习题技巧性较强,建议初学者不必在某些难题上花费太多精力。

本书若作为本科生或研究生教材,以60学时为宜。有些章节可作为课后阅读材料。

笔者在图论与网络流理论的学习和研究中,得到堵丁柱教授、林诒勋教授、刘彦佩研究员、田丰研究员、胡晓东研究员等专家的指导和帮助,在此向他们表示谢意。本书的工作得到国家自然科学基金的支持并获得北京市精品教材资助。本书原稿和讲义在中科院研究生院图论与网络流理论课程的使用当中,学生们提出了不少很好的建议。本书的编写得到了中科院研究生院数学科学学院彭家贵教授和郭田德教授的鼓励与支持。中科院研究生院教材科张兆华先生为本书的出版做了不少工作。高丽丽女士参与了本书初稿的部分文字录入工作。此外,感谢高等教育出版社对本书出版的重视和支持,感谢本书引用的参考文献的所有作者。特别是本书在某些部分参考或引用了下列中文(中译文)文献的内容,特此致谢。

[1] D. B. West, *Introduction to Graph Theory* (second edition), Prentice Hall, 2001。(中译本:图论导引。李建中、骆吉周译。北京:机械工业出版社, 2006)。

[2] J. A. Bondy and U. S. Murty, *Graph theory with applications*, 1976。(中译本:图论及其应用。吴望名等译。北京:科学出版社, 1987)。

[3] C. H. Papadimitry and K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization — Algorithms & Complexity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982。(中译本:组合最优化 — 算法和复杂性。刘振宏,蔡茂诚译。北京:清华大学出版社, 1988)。

[4] F. Buckley and M Lewinter, *A Friendly Introduction to Graph Theory*, 2003。(中译本:图论简明教程。李慧霸等译。北京:清华大学出版社, 2005)。

[5] 王树禾。图论。北京:科学出版社, 2004。

[6] 王树禾。图论及算法。合肥:中国科学技术大学出版社, 1990

[7] 张先迪,李正良。图论及其应用。北京:高等教育出版社, 2005。

[8] 蒋长浩。图论与网络流。北京:中国林业出版社, 2001。

[9] 殷剑宏,吴开亚。图论及其算法。合肥:中国科学技术大学出版社, 2003。

[10] 谢政。网络算法与复杂性理论。2 版。长沙:国防科技大学出版社, 2003。

[11] 徐俊明。图论及其应用。合肥:中国科学技术大学出版社, 1998。

[12] 孙惠泉。图论及其应用。北京:科学出版社, 2004,

[13] 田丰,马仲蕃。图与网络流理论。北京:科学出版社, 1987。

[14] 王朝瑞。图论。3 版。北京:北京理工大学出版社, 2001。

[15] 魏暹荪。图论基础。西安:陕西师范大学出版社, 1991。

由于笔者水平所限,书中疏漏和不足在所难免,敬请读者不吝赐教。

高随祥
2008 年 3 月 29 日于北京

郑重声明

目　　录

第一章　图的基本概念

§1.1　图的基本概念

1. 图 (graph)

一集元素及它们之间的某种关系称为图. 具体地说, 图是一个二元组 (V, E), 其中集合 V 称为**顶点集**, 集合 E 是 V 中元素组成的某些无序对的集合, 称为**边集**.

例 1.1.1　给定 $G=(V,E)$, 其中

$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\},$$
$$E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_3,v_5),(v_1,v_5),(v_1,v_5),(v_5,v_5)\}.$$

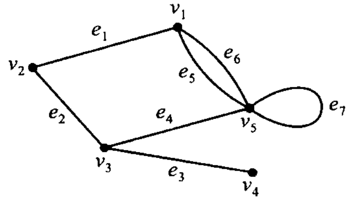
这便定义出一个图.

图的顶点集中的元素称为**顶点**, 边集中的元素称为**边**. 在本书中也常将边 $e=(u,v)$ 写为 $e=uv$, 顶点 u 和 v 称为边 e 的**端点**, 反过来也称边 e 连接顶点 u 和 v. 图 G 的顶点数目 $|V|$ 称为图 G 的**阶**, 边的数目 $|E|$ 称为图 G 的**边数**. 本书中一般将图的边数记为 ε, 将图的阶记为 ν.

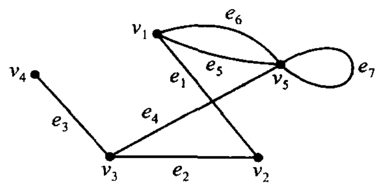
2. 图的图示

通常, 图的顶点可用平面上的一个点来表示, 边可用平面上的线段来表示 (直的或曲的). 这样画出的平面图形称为图的图示.

例如, 例 1.1.1 中图的一个图示为



注 (1) 表示顶点的平面点, 其相对位置并无限制. 因此, 同一个图可以画出形状迥异的很多图示. 比如下图是例 1.1.1 中图的另一个图示:



(2) 图的图示直观易懂, 因此以后一般说到一个图, 我们总是画出它的一个图示来表示.

3. 一些术语和概念

设 $G=(V,E)$ 是一个图, 下述概念中顶点均取自 V, 边均取自 E.

(1) **点与边的关联**(incident): 如果在图 G 中点 v 是边 e 的一个端点, 则称点 v 与边 e 在图 G 中相关联.

(2) **点与点的相邻** (adjacent): 如果图上两点 u, v 被同一条边相连, 则称 u,v 在图 G 中相邻.

(3) **边与边的相邻**: 若图 G 中两条边有至少一个公共端点, 则称这两条边在图 G 中相邻.

(4) **环边** (loop): 图中两端点重合的边称为环边.

(5) **重边** (multipleedges): 设 u 和 v 是图 G 的顶点, 图 G 中连接 u 和 v 的两条或两条以上的边称为图 G 中 u、v 间的重边.

(6) **简单图** (simple graph): 既无环边也无重边的图称为简单图.

(7) **完全图** (complete graph): 任意两点间都有一条边的简单图称为完全图, n 阶完全图记为 K_n.

(8) **空图** (empty graph): 边集为空的图称为空图.

(9) **平凡图** (trivial graph): 边集为空且只有一个顶点的图称为平凡图.

(10) **零图** (null graph): 边集和顶点集都为空的图称为零图. (注: 顶点集为空则边集自然为空.)

(11) 顶点 v 的**度** (degree): 图 G 中顶点 v 所关联的边的数目 (环边计两次) 称为顶点 v 的度, 记为 $d_G(v)$ 或 $d(v)$.

(12) 图 G 的**最大度**: $\Delta(G)=\max\{d_G(v)|v\in V(G)\}$;

(13) 图 G 的**最小度**: $\delta(G)=\min\{d_G(v)|v\in V(G)\}$.

(14) **正则图** (regular graph): 各个顶点的度都相等的图称为正则图. 每个顶点的度都等于 k 的图称为 k - 正则图.

(15) **图的补图** (complement): 设 G 是一个图, 以 $V(G)$ 为顶点集, 以 $\{(x,y)|(x,y)\notin E(G)\}$ 为边集的图称为 G 的补图, 记为 $\overline{G}$.

定理 1.1.1 对任何图 G, 其各顶点度数之和等于边数的 2 倍, 即 $\sum\limits_{v\in V(G)} d(v) = \boldsymbol{2}\varepsilon$.

证明 按每个顶点的度来计数边, 每条边恰数了两次. 证毕.

推论 1.1.1 任何图中, 奇度顶点的个数总是偶数 (包括 0).

证明 设图 G 中有 k 个奇度顶点, 不妨设 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 为奇度顶点, 而 $v_{k+1}, v_{k+2}, \cdots, v_\nu$ 为偶度顶点, 则由定理 1.1.1, $\sum\limits_{i=1}^{k} d(v_i) + \sum\limits_{i=k+1}^{\nu} d(v_i) = \boldsymbol{2}\varepsilon$, 即

$$\sum_{i=1}^{k} d(v_i) = \boldsymbol{2}\varepsilon - \sum_{i=k+1}^{\nu} d(v_i),$$

此式右端为偶数, 而左端为 k 个奇数之和, 因此 k 必定为偶数. 证毕.

4. 子图

子图 (subgraph): 对图 G 和 H, 如果 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$, 则称图 H 是图 G 的子图, 记为 $H \subseteq G$.

生成子图 (spanning subgraph): 若 H 是 G 的子图且 $V(H) = V(G)$, 则称 H 是 G 的生成子图.

点导出子图 (induced subgraph): 设 G 是一个图, $V' \subseteq V(G)$. 以 V' 为顶点集, 以 G 中两端点均属于 V' 的所有边作为边集所组成的子图, 称为 G 的由顶点集 V' 导出的子图, 简称为 G 的点导出子图, 记为 $G[V']$.

边导出子图 (edge-induced subgraph): 设 G 是一个图, $E' \subseteq E(G)$. 以 E' 为边集, 以 E' 中边的所有端点作为顶点集所组成的子图, 称为 G 的由边集 E' 导出的子图, 简称为 G 的边导出子图, 记为 $G[E']$.

设 $V' \subseteq V(G)$, $E' \subseteq E(G)$, 今后经常用 $G - V'$ 表示从图 G 中删除顶点子集 V' (连同它们关联的边一起删去) 所获得的子图, 用 $G - E'$ 表示从图 G 中删除边子集 E' (但不删除它们的端点) 所获得的子图. 特别地, 对顶点 v 和边 e, 常用 $G - v$ 表示 $G - \{v\}, G - e$ 表示 $G - \{e\}$.

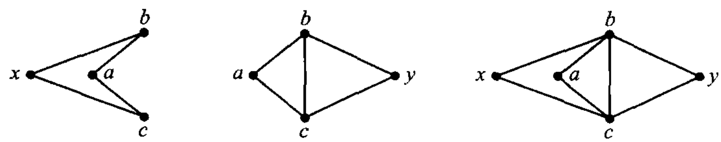
5. 图的并、联和对称差

设 G_1、G_2 是两个图, $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$, 则 G_1 与 G_2 的**并** (union) 是指图 $(V_1 \bigcup V_2, E_1 \bigcup E_2)$, 记为 $G_1 \bigcup G_2$. 特别地, 若 $V_1 \bigcap V_2 = \varnothing$, 则图 G_1 与 G_2 的并 $G_1 \bigcup G_2$ 称为 G_1 与 G_2 的**不交并** (disjoint union), 不交并有时也称为**和** (addition), 记为 $G_1 + G_2$.

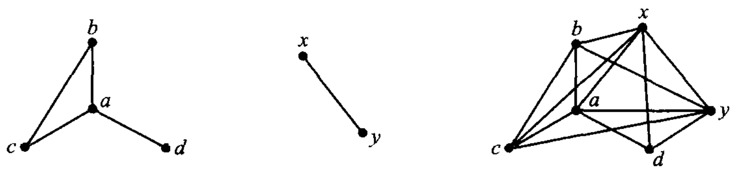
两个无公共顶点的图 G_1、G_2 的不交并 G_1+G_2 再添加边集 $\{xy|x\in V(G_1),y\in V(G_2)\}$ 后得到的图称为 G_1 与 G_2 的**联** (join, 有时也称为**连接**), 记为 $G_1\vee G_2$.

设 A、B 是两个集合, 集合 $(A-B)\bigcup(B-A)$ 称为 A 与 B 的对称差, 记为 $A\oplus B$. 容易证明: $A\oplus B=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$. 设 $G_1=(V,E_1)$ 与 $G_2=(V,E_2)$ 是两个具有相同顶点集的图, 则图 $(V,E_1\oplus E_2)$ 称为 G_1 和 G_2 的**对称差** (symmetric difference), 记为 $G_1\oplus G_2$.

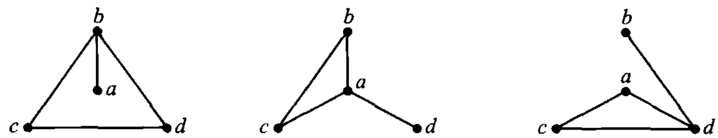
通俗地说, 两个图 G_1 与 G_2 的并 $G_1\bigcup G_2$ 就是将两个图的顶点和边都放在一起所形成的图 (重复的顶点和边只取一次); 两个无公共点的图 G_1 与 G_2 的并即为不交并 G_1+G_2, 它就是将这两个图作为分支放在一起组成的图; G_1 与 G_2 的联 $G_1\vee G_2$ 表示将 G_1 的每个顶点与 G_2 的所有顶点都连边构成的图. 两个具有相同顶点集的图 G_1 与 G_2 的对称差 $G_1\oplus G_2$, 是与 G_1、G_2 具有相同顶点集的图, 其边集由恰在 G_1、G_2 之一中出现的边所构成. 下图是并、联、对称差的示例.



G_1 G_2 $G_1\cup G_2$



G_1 G_2 $G_1\vee G_2$



G_1 G_2 $G_1\oplus G_2$

6. 路和圈

途径 (walk): 图 G 中一个点边接续交替出现的序列 $w=v_{i_0}e_{i_1}v_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}v_{i_k}$ 称为图 G 的一条途径, 其中 v_{i_0}、v_{i_k} 分别称为途径 w 的起点和终点, w 上其余顶点称为中途点.

迹 (trail): 图 G 中边不重复出现的途径称为迹.

路 (path): 图 G 中顶点不重复出现的迹称为路.

闭途径 (closed walk): 图 G 中起点和终点相同的途径称为闭途径.

闭迹 (closed trail): 图 G 中边不重复出现的闭途径称为闭迹, 也称为回路 (circuit).

圈 (cycle): 中途点不重复的闭迹称为圈.

注 (1) 简单图中的路可以完全用顶点来表示, 如 $P = v_{i_0}v_{i_1}\cdots v_{i_k}$.

(2) 图中从一点 u 到另一点 v 的路(迹)有时简称为 (u,v) 路(迹).

(3) 途径 (闭途径)、迹 (闭迹)、路 (圈) 上所含的边的数目称为它们的**长度**.

(4) 简单图 G 中长度为奇数和偶数的圈分别称为**奇圈** (odd cycle) **和偶圈** (even cycle).

(5) 对任意 $u,v \in V(G)$, 从 u 到 v 的具有最小长度的路称为 u 到 v 的**最短路** (shortest path), 其长度称为 u 到 v 的**距离** (distance), 记为 $d_G(u,v)$ 或 $d(u,v)$.

(6) 简单图 G 中最短圈的长度称为图 G 的**围长** (girth), 最长圈的长度称为图 G 的**周长** (circumference).

例 1.1.2 设 G 是一个简单图, 若最小度 $\delta(G) \geqslant 2$, 则 G 中必含有圈.

证明 设 G 中的最长路为 $P = v_0v_1\cdots v_k$. 因 $d(v_0) \geqslant 2$, 故存在与 v_1 相异的顶点 v 与 v_0 相邻. 若 $v \notin P$, 则得到比 P 更长的路, 这与 P 的取法矛盾. 因此必定 $v \in P$, 从而 G 中有圈. 证毕.

例 1.1.3 设 G 是简单图, 若最小度 $\delta(G) \geqslant 3$, 则 G 必有偶圈.

证明 设 $P = v_0v_1\cdots v_k$ 是 G 的最长路.

因为 $d(v_0) \geqslant 3$, 所以存在两个与 v_1 相异的顶点 v' 和 v'' 与 v_0 相邻. v', v'' 必都在路 P 上, 否则会得到比 P 更长的路. 无妨设 $v' = v_i$, $v'' = v_j$ $(2 < i,j \leqslant k,\ i < j)$.

若 i, j 中有奇数, 比如 i 是奇数, 则路 P 上 v_0 到 v_i 的一段与边 v_0v_i 构成一个偶圈;

若 i, j 都是偶数, 则路 P 上 v_i 到 v_j 的一段与边 v_0v_i 及 v_0v_j 构成一个偶圈. 证毕.

例 1.1.4 设 G 是简单图, 若最小度 $\delta(G) \geqslant 3$, 则 G 中各个圈长的最大公因数是 1 或 2.

证明 取 G 中最长路 $P = v_0v_1\cdots v_k$. 由上例知, G 中存在 $v_i, v_j \in P$, 使 P 上 (v_0,v_i) 段、(v_0,v_j) 段、(v_i,v_j) 段与边 v_0v_i、v_0v_j 构成长度分别为 $i+1$, $j+1$ 和 $j-i+2$ 的圈. 若 $i+1$, $j+1, j-i+2$ 三数的公因数 $m > 2$, 则因 m 整除前两数的差 $j-i$, 同时又整除第三个数, 于是 m 整除2, 这是不可能的. 因此 $i+1$, $j+1, j-i+2$ 三数的公因数必不超过 2. 从而各个圈长的最大公因数是 1 或 2. 证毕.

7. 二部图

二部图 (bipartite graph): 若图 G 的顶点集可划分为两个非空子集 X 和 Y, 使得 G 的任一条边都有一个端点在 X 中, 另一个端点在 Y 中, 则称 G 为二部图 (或偶图), 记为 $G=(X\bigcup Y,E)$ 或 $G=(X,Y)$, (X,Y) 称为 G 的一个顶点二划分.

完全二部图 (complete bipartite graph): 在二部图 $G=(X\bigcup Y,E)$ 中, 若 X 的每个顶点与 Y 的每个顶点有边连接, 则称 G 为完全二部图; 若 $|X|=m,|Y|=n$, 则记此完全二部图为 $K_{m,n}$.

定理 1.1.2 一个图是二部图当且仅当它不含奇圈.

证明 必要性 设 $C=v_0v_1v_2\cdots v_kv_0$ 是二部图 $G=(X\bigcup Y,E)$ 的一个圈. 无妨设 $v_0\in X$, 由二部图的定义知, $v_1\in Y, v_2\in X,\cdots$, 一般地, $v_{2i}\in X, v_{2i+1}\in Y, (i=0,1,\cdots)$. 又因 $v_0\in X$, 故 $v_k\in Y$, 因而 k 是奇数. 注意到圈 C 上共有 $k+1$ 条边, 因此 C 是偶圈.

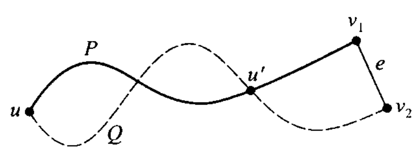
充分性 设 G 不含奇圈. 任取 $u\in V(G)$, 令

$X=\{v\in V(G)|u,v$ 间的距离为奇数$\}$, $Y=\{v\in V(G)|u,v$ 间的距离为偶数$\}$.

任取 G 的一条边 $e=v_1v_2$, 欲证 v_1,v_2 分属于 X 和 Y. 设 P,Q 分别是 u 到 v_1,v_2 的最短路.

(1) 如果 P 与 Q 的最后一个公共顶点是 v_1 或 v_2 (无妨设为 v_1, 如下图所示), 则因 P 和 Q 的 (u,v_1) 段都是 u 到 v_1 的最短路, 故这两段长度相等. 因此 P 的长度与 Q 的长度相差 1, 从而 u 到 v_1,v_2 的距离奇偶性相反, v_1,v_2 分属于 X 和 Y.

(2) 如果 P 与 Q 的最后一个公共顶点不是 v_1 和 v_2, 设其为 u' (如下图), 因 P 的 (u,u') 段和 Q 的 (u,u') 段都是 u 到 u' 的最短路, 故这两段长度相等.



假如 P,Q 的奇偶性相同, 则 P 的 (u',v_1) 段和 Q 的 (u',v_2) 段奇偶性相同, 这两段与边 e 构成一个奇圈, 与定理条件矛盾. 可见 P,Q 的奇偶性不同, 从而 v_1,v_2 分属于 X 和 Y.

这便证明了 G 是一个二部图. 证毕.