初中数学复习指导

HUZHONGSHUXUEFUXI ZHI DAO

湖北教育出版社

初中数学复习指导

CHUZHONGSHUXUEFUXI ZHI DAO

（代数） 熊大寅　樊　恺
（几何） 成应琭　张广德　编

湖北教育出版社

初中数学复习指导

(代数)熊大寅　樊　恺 编
(几何)成应璩　张广德

*

湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行
宜昌市新华印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本　12.25印张　282,000字
1984年1月第1版　1984年1月第1次印刷
印数：1—200,700

统一书号：7306·56　定价：0.88元

编 者 的 话

面向大多数，从初中抓起，这是提高中学教学质量的关键。现行数学教材，从初中学生实际出发，几何、代数分别独立设科，这是一个改进。但是，在怎样相互沟通、综合应用上，也不能不受到一定的限制。而目前流行的数学参考书，适合初中学生课外阅读的并不太多。为此，我们特编写了这本书。编写这本复习指导，目的在于帮助初中学生进一步掌握基础知识，并在此基础上，从加强基本训练入手，逐步做到灵活应用，从而加强综合解题能力。

全书共分十一章。每章(节)内容包括“内容提要”、“范例”和“习题”三部分。对于部分范例，加了扼要的分析或说明以揭示范例的作用和解题的规律性。习题分（A）、（B）两类。（A）类是基本练习题，（B）类则在综合性上有所加强，但都严格控制在中学数学教学大纲范围之内，极少提供选学的内容，以星号＊予以注明。为了便于读者自学，书末附有全部习题的答案，对于部分较难的习题还给出了简要的提示。

希望这本书能对初中同学学习数学知识，特别是对初中总复习有所帮助。欢迎同学们在使用本书后提出意见，欢迎有关教师和教学研究工作者提出批评，以便今后再版时进一步修改、补充。

编　者

1981年9月

目 录

代 数

几 何

①②本章节内容，教材是安排在《代数》内，为了复习的方便，我们列在这里，特此说明。

代　数

第一章　实　数

内　容　提　要

一、实数的概念

1．实数的定义和分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{array}\right.\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\\c\\d\\e\end{array}}\right\}\text{有限小数或者无限循环小数}\\\text{无理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

说明（1）整数和分数统称为有理数。任何一个有理数都可以写成有限小数或者无限循环小数的形式。例如：

$$3=3.0,\quad -\frac{3}{5}=-0.6,\quad \frac{9}{11}=0.\dot{8}\dot{1};$$

反过来也对，即任何有限小数和无限循环小数都是有理数①。

（2）无限不循环小数叫做无理数。

（3）有理数和无理数统称为实数。

（4）有理数和无理数都有正负之分，所以实数也有正实数

---

①无限循环小数化分数的方法将在高中学习。

和负实数之分。零既不是正数，也不是负数。正（实）数和零通常统称为非负（实）数。

2．数　轴

规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴。

每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数。这就是说，实数和数轴上的点一一对应。

3．相反数和绝对值

（1）相反数

只有符号不同的两个数，叫做互为相反数。

实数 a（a≠0）和 −a 互为相反数，数轴上表示它们的点关于原点对称。

图 1—1

零的相反数仍是零。

（2）绝对值

一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。即

$$|a|=\begin{cases}a\,(a>0),\\0\,(a=0),\\-a\,(a<0)。\end{cases}$$

一个实数的绝对值等于数轴上表示它的点到原点的距离，是一个非负实数。

4．实数大小的比较

正数都大于零；负数都小于零；正数大于一切负数。

两个负数，绝对值大的反而小。

数轴上的点，越往右边的点表示的数越大。

5．近似数和有效数字

一个近似数，四舍五入到哪一位，就说这个近似数精确到哪一位。这时，从左边第一个不是零的数字起，到这一位数字止，所有的数字都叫做这个数的有效数字。例如，对于$\lg 2=0.30102999\cdots$，取近似值0.3010，是精确到万分位（即精确到0.0001），有四个有效数字3、0、1、0。

在实数运算中，对于无理数可根据问题的要求，用近似的有限小数代替来进行计算。

二、实数的运算

1．代数运算

加法、减法、乘法、除法、乘方（指数为正整数）和开方等六种运算，叫做代数运算。其中，加法、减法、乘法和除法等四种运算，通常叫做四则运算。

2．实数的四则运算

（1）运算法则

运算	两数同号		两数异号	
	符号	绝对值	符号	绝对值
加法	保持原号	相加	同绝对值较大的数	相减
减法	减去一个数，等于加上这个数的相反数			
乘法	正	相乘	负	相乘
除法	正	相除	负	相除

说明 （i）实数四则运算的结果仍是实数。

（ii）减法和加法互为逆运算。一切加法和减法的运算，都可以统一成加法运算。

（iii）除法和乘法互为逆运算。除以一个数，等于乘以这个数的倒数。零不能作除数。

（2）运算定律

（i）交换律：$a+b=b+a$，$ab=ba$；

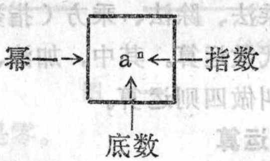
（ii）结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$，$(ab)c=a(bc)$；

（iii）分配律：$a(b+c)=ab+ac$。

3. 实数的乘方

n（n是大于1的整数）个相同的因数a相乘，即$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}}$，

叫做a的n次方，记作a^n。



这种求几个相同因数的积的运算，叫做乘方。实数乘方的结果仍是实数：

（1）当$a>0$时，$a^n>0$；

（2）当$a=0$时，$a^n=0$；

（3）当$a<0$时，$a^n\begin{cases}<0\text{（n为奇数），}\\>0\text{（n为偶数）。}\end{cases}$

二次方也叫平方，三次方也叫立方。求平方数、立方数可以查"平方表"、"立方表"。

4. 实数的开方

(1) 开方和方根

如果$x^n=a$（n是大于1的整数），那么x叫做a的n次方根。求a的n次方根叫做把a开n次方，a叫做被开方数，n叫做根指数。

这种求一个数的方根的运算，叫做开方。开方和乘方互为逆运算。

在实数范围内，非负数的开方运算总可以实施，负数开奇次方也总可以实施，但是负数没有偶次方根。如下表：

a的正负	n的奇偶	方根	符号
$a>0$	n是奇数	有一个正的方根	$\sqrt[n]{a}$
	n是偶数	有两个互为相反数的方根	$\pm\sqrt[n]{a}$
$a=0$	n不论奇偶	$\sqrt[n]{0}=0$	
$a<0$	n是奇数	有一个负的方根	$\sqrt[n]{a}$
	n是偶数	没有方根	

求平方根、立方根可以查“平方根表”、“立方根表”。

(2) 幂和方根的关系

(i) $(\sqrt[n]{a})^n=a$（n为偶数时，$a\geqslant 0$）。

特别地，当$n=2$时，有

$$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)。$$

例如，$(\sqrt{2})^2=2$，$(\sqrt[3]{-2})^3=-2$。

(ii) $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a\text{（n为奇数），} \\ |a|\text{（n为偶数）。}\end{cases}$

特别地，当$n=2$时，有

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\ (a>0),\\0\ (a=0),\\-a\ (a<0)。\end{cases}$$

例如，$\sqrt{2^2}=2$，$\sqrt{(-2)^2}=|-2|=2$，$\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$。

（3）算术根

正数a的正的n次方根，叫做a的n次算术根。零的n次算术根仍是零。

这就是说，当$a\geqslant0$时，符号$\sqrt[n]{a}$表示a的n次算术根。

5。实数的混合运算顺序

先算乘方、开方，再算乘、除，最后算加、减；在同一级运算中，从左到右依次运算；如果有括号，就先算括号里面的运算。

此外，根据实数的运算定律，上述运算顺序也可以变更。

范　例

例 1　用数轴上的点表示下列各实数，并把它们按从小到大的顺序用不等号连接起来：

$$-\left(-2\frac{2}{3}\right),\ -|1.75|,\ 0,\ -2,\ \sqrt{3},\ -\frac{1}{2}|-\sqrt{2}|.$$

〔**解**〕　如图1—2，数轴上的A、B、O、C、D、E各点分别表示$-\left(-2\frac{2}{3}\right)$，$-|1.75|$，$0$，$-2$，$\sqrt{3}$，$-\frac{1}{2}|-\sqrt{2}|$。

它们之间的大小顺序为：

$$-2<-|1.75|<-\frac{1}{2}|-\sqrt{2}|<0<\sqrt{3}<-\left(-2\frac{2}{3}\right)。$$

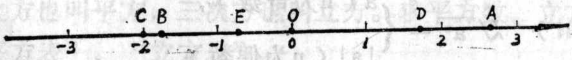


图 1—2

说明 $\sqrt{3}$和$-\frac{1}{2}|-\sqrt{2}|$是无理数，可以通过取近似值，如取$\sqrt{3}\approx1.73$，$-\frac{1}{2}|-\sqrt{2}|\approx-0.71$，从而确定数轴上的D、E两点的大致位置。也可以用几何作图的方法，准确地在数轴上确定D、E两点的位置。例如，由$\sqrt{3}=\sqrt{2^2-1^2}$，可根据勾股定理，如图1—3在数轴上得到D点。

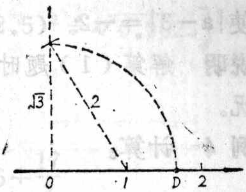


图 1—3

例 2 比较$-\sqrt{0.0331}$和$-\frac{2}{11}$的大小。

分析 为比较$-\sqrt{0.0331}$和$-\frac{2}{11}$的大小，须比较$\sqrt{0.0331}$和$\frac{2}{11}$的大小，这就要把它们都用小数的形式表示出来。但求平方根较难计算，为此可考虑从比较这两数的平方数的大小入手。

〔**解**〕 $\because(\sqrt{0.0331})^2=0.0331,\left(\frac{2}{11}\right)^2=\frac{4}{121}\approx0.03306$，

$\therefore$ $(\sqrt{0.0331})^2>\left(\frac{2}{11}\right)^2$，$\sqrt{0.0331}>\frac{2}{11}$。

$\therefore$ $-\sqrt{0.0331}<-\frac{2}{11}$。

例 3 当a是什么实数时，有

（1） $|a-3|=2$；　　（2） $|a-3|=0$；

（3） $|a-3|=-2$。

〔解〕（1）∵ $|a-3|=2$，∴ $a-3=\pm 2$。

∴ $a=5$ 或 $a=1$。

（2）∵ $|a-3|=0$，∴ $a-3=0$，$a=3$。

（3）因为任何实数的绝对值是非负数，所以不存在实数 a，使 $|a-3|=-2$。

说明 解第（1）题时应注意，不要遗漏了 $a-3=-2$ 这种情况。

例 4 计算：

（1）$3.56-(-3)-\left(-5\frac{1}{2}\right)+(-2)-\left(+5\frac{1}{4}\right)-(+4.56)$；

（2）$\left(-1\frac{1}{2}\right)\div\frac{3}{4}\times(-0.2)\times1\frac{3}{4}\div1.4\times\left(-\frac{3}{5}\right)$。

〔解〕（1）原式 $=3.56+3+5\frac{1}{2}-2-5\frac{1}{4}-4.56$

$$=3.56-4.56+3-2+5\frac{1}{2}-5\frac{1}{4}$$

$$=-1+1+\frac{1}{4}=\frac{1}{4};$$

（2）原式 $=\left(-\frac{3}{2}\right)\times\frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{5}\right)\times\frac{7}{4}\times\frac{5}{7}\times\left(-\frac{3}{5}\right)$

$$=-\frac{3\times4\times1\times7\times5\times3}{2\times3\times5\times4\times7\times5}=-\frac{3}{10}。$$

说明 （1）加减混合运算可统一成连加的形式（通常加号省略不写），并根据情况利用交换律、结合律对所有加数重新组合，如按正数、负数先分别合并，或按整数、小数、分数先分别合并等。但如果加数中出现互为相反数，则可把它们先行消去。

（2） 乘除混合运算可统一成连乘的形式，连乘积（不等于零时）的符号由负因数的个数决定：当负因数有偶数个时，积为正；当负因数有奇数个时，积为负。

例 5 计算：

(1) $\left[36\div\left(-1\frac{2}{7}\right)^3\times2\frac{25}{28}-(-2.5)^2\div\sqrt{0.0625}\right]\div\sqrt[3]{-0.027}$；

(2) $\dfrac{3\frac{1}{2}\div2\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{17}-0.125\div\frac{17}{3}}{1.25\div5\frac{2}{3}}$。

〔**解**〕

(1) 原式 $=\left[36\times\left(-\frac{7^3}{9^3}\right)\times\frac{81}{28}-\left(\frac{5}{2}\right)^2\div0.25\right]\div(-0.3)$

$=\left[-7^2-\frac{25}{4}\times4\right]\div(-0.3)$

$=[-49-25]\div(-0.3)$

$=(-74)\div(-0.3)=246\frac{2}{3}$；

(2) 原式 $=\dfrac{\left(\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)\times\frac{3}{17}}{\frac{5}{4}\times\frac{3}{17}}=\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{8}}{\frac{5}{4}}$

$=\dfrac{6-1}{10}=\dfrac{1}{2}$。

说明 在进行实数的混合运算时，要注意运算顺序。但在有些情况下，若能运用实数的运算定律或运算性质，往往可以

使运算得到简化。如在解第（2）题时，我们就运用了分配律和分数的基本性质。

例 6　怎样的实数x，能使$|x-3|+\sqrt{(x-8)^2}=5$成立？

〔**解**〕　原式即$|x-3|+|x-8|=5$。

如图1—4，把数轴分成三段$x<3$，$3\leqslant x<8$和$x\geqslant 8$来讨论。

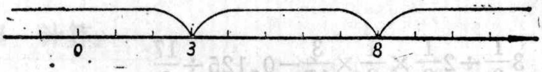


图　1—4

(1) 若$x<3$，则原式化为

$$-(x-3)-(x-8)=5。$$

解得　$x=3$，与假设矛盾舍去。

(2) 若$3\leqslant x<8$，则原式化为

$$(x-3)-(x-8)=5。$$

上式是恒等式，一切满足$3\leqslant x<8$的实数都适合。

(3) 若$x\geqslant 8$，则原式化为

$$(x-3)+(x-8)=5。$$

解得　$x=8$。

故使原式成立的实数x的范围是$3\leqslant x\leqslant 8$。

说明　为了去掉几个绝对值的符号，常采用在数轴上分段讨论的方法。端点（如本题中的3、8）是使各绝对值的符号中的式子取零的值，在讨论时不可遗漏。

例 7　若x、y为实数，且$(x-y)^2+(2y+1)^2=0$，求x、y的值。

〔**解**〕　因$(x-y)^2\geqslant 0$，$(2y+1)^2\geqslant 0$，且$(x-y)^2+(2y+1)^2=0$，故

$$\begin{cases} x-y=0, \\ 2y+1=0. \end{cases}$$

解得 $x=y=-\frac{1}{2}$。

说明 这里给出的方法，是数学解题中常见的一种方法。它的依据是："若干个非负数的和为零，则其中的任何一个都必为零。"运用完全相同的方法，可求得适合

$$|x-y|+|2y+1|=0$$

或 $\sqrt{x-y}+\sqrt{2y+1}=0$

的实数x、y的值仍是 $x=y=-\frac{1}{2}$。

例 8 证明：$\sqrt{2}$是一个无理数。

分析 直接证明$\sqrt{2}$是无限不循环小数是困难的。但由于凡是有理数（无论是整数还是分数）都可以用$\frac{m}{n}$（m、n是互质的整数，且$n\neq 0$）的形式来表示，而无理数不能用这种形式来表示，所以可以考虑用反证法来证明。

〔**证**〕 若$\sqrt{2}$是有理数，则可令$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$（m、n是互质的整数，且$n\neq 0$）。由此$2=\frac{m^2}{n^2}$，$m^2=2n^2$，m必为一个偶数。

设$m=2m_1$（m_1是整数），把$m=2m_1$代入$m^2=2n^2$，得$4m_1^2=2n^2$，即$n^2=2m_1^2$，n也必为一个偶数。

既然m和n有公约数2，那么$\frac{m}{n}$就不是一个最简分数，这