

根据教育部《国家课程标准》编写

龙门品牌  学子至爱

# 龙门 考题

初中数学

函数及其图象

主 编：刘宗晓  
本册主编：刘宗晓



龍 門 書 局

[www.Longmenbooks.com](http://www.Longmenbooks.com)

新课标



## 初中数学

主 编: 刘宗晓

本册主编: 刘宗晓

编 者: 邱泽敬 李福顺 张立华  
刘蕾蕾 李 芳 刘桂阁  
管玉华 李述强 李可利  
潘希成 营春成

# 函数及其图象

龍 門 書 局

北 京

版权所有 侵权必究

举报电话:(010)64030229;(010)64034315;13501151303

邮购电话:(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

龙门专题:新课标. 初中数学:函数及其图象/刘宗晓主编;刘宗晓本册主编. —北京:龙门书局,2008

ISBN 978-7-5088-1696-8

I. 龙… II. ①刘…②刘… III. 数学课—初中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 154337 号

责任编辑:田旭 马建丽 董铮/封面设计:耕者

龙 门 书 局 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

北京一二零一工厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

\*

2008 年 10 月第 一 版 开本:A5(890×1240)

2008 年 10 月第一次印刷 印张:7 1/2

字数:268 000

定 价:14.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



## 生命如歌

未名湖畔，博雅塔旁。

明媚的晨光穿透枝叶，懒散的泻落在林间小道上，花儿睁开惺忪的眼睛，欣喜地迎接薄薄的雾霭，最兴奋是小鸟，扇动翅膀在蔚蓝的天空中叽叽喳喳地欢唱起来了。微风轻轻拂动，垂柳摇曳，舒展优美的身姿，湖面荡起阵阵涟漪，博雅塔随着柔波轻快地翩翩起舞。林间传来琅琅的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，三三两两静静的坐着，那是求索知识的学子……

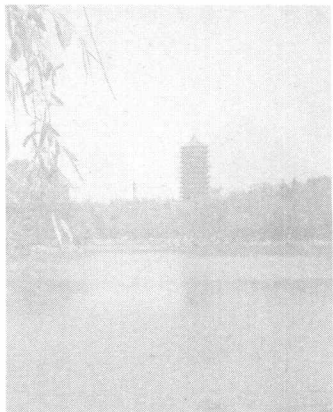
在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨都是这样的；在复旦，在交大，在南大，在武大……其实，在每一所高校里，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在过去几年时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥数金牌得主还有其他优秀的学子到全国各地巡回演讲。揭开他们“状元”的光环，他们跟我们是那么的相似，同样的普通与平凡。

是什么成就了他们的“状元”辉煌？

在来来往往带他们出差的路上，在闲来无事的聚会聊天过程中，我越来越发现，在普通平凡的背后，他们每个人都是一道亮丽独特的风景，都是一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的成功，是偶然中的必然。

小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，但学习一直平平；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，“家里什么都没有了，一切只能靠你自己了。”她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历：“你们有谁在大年



三十的晚上还学习到深夜三点？你们又有谁发烧烧到 39 度以上还在病床上看书？……”那一年，她以总分 684 分成为了浙江省文科高考状元。

陆文，一个出自父母离异的单亲家庭的女孩，她说，她努力学习的动力就是想让妈妈高兴，因为从小她就发现，每次她成绩考得很好，妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子，她选择了出国这条路，考托福，考 GRE，最后如愿以偿，被芝加哥大学以每年 6.4 万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。6.4 万美金，当时相当于人民币 52 万。

齐伟，湖南省高考第七名，清华大学计算机学院的研究生，最近被全球最大的软件公司 MICROSOFT 聘为项目经理；霖秋，北京大学数学学院的小妹，在坚持不懈的努力中完成了自身最重要的一次涅槃，昨天的她在未名湖上游弋，今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多很多优秀的学子，他们也都有自己的故事，酸甜苦辣，很真实，很精彩。我有幸跟他们朝夕相处，默默观察，用心感受，他们的自信，他们的执着，他们的勤奋刻苦，尤其是他们的“学而得其法”所透露出来的睿智更让人拍案叫绝，他们人人都有一套行之有效的学习方法，花同样的时间和精力他们可以更加快速高效，举一反三。我一直在想：如果当年我也知道他们的这些方法，或许我也能考个清华北大的吧？

多年以来，我一直觉得我们的高考把简单的事情搞复杂了，学生们浪费了大量的时间和精力却收效甚微；多年以来，我们也一直在研究如何将一套优良的学习方法内化在图书中，让同学们在不知不觉中轻松快速的获取高分。这，就是出版《龙门专题》的原因了。

一本好书可以改变一个人的命运！名校，是每一个学子悠远的梦想和真实的渴望。“少年心事当拿云，谁念幽寒坐呜呃！”  
龙门专题，走向名校的阶梯！



总策划

王旭

2008 年 7 月

>>>>>>>>>>>>



# 编 委 会

主 编：刘宗晓

编委会成员：邱泽敬 李福顺 张立华  
刘蕾蕾 李 芳 刘桂阁  
管玉华 李述强 李可利  
潘希成 营春成 苗金秀  
闫作川 王爱兰 王 玲  
王德明 马洪刚 王春妹  
杜昆仑 颜丙才 郭 亮  
高华山 肖志亮 隋先华

# Contents

## 目录

|                    |         |
|--------------------|---------|
| 基础篇                | ( 1 )   |
| 第一章 函数及其图象         | ( 1 )   |
| 1.1 平面直角坐标系        | ( 1 )   |
| 1.2 变量与函数          | ( 6 )   |
| 1.3 函数的图象          | ( 13 )  |
| 1.4 中考热点题型评析与探究    | ( 20 )  |
| 第二章 一次函数           | ( 30 )  |
| 2.1 正比例函数及其图象      | ( 30 )  |
| 2.2 一次函数的图象与性质     | ( 35 )  |
| 2.3 一次函数与一元一次方程    | ( 43 )  |
| 2.4 一次函数与一元一次不等式   | ( 49 )  |
| 2.5 一次函数与二元一次方程(组) | ( 58 )  |
| 2.6 一次函数的应用        | ( 65 )  |
| 2.7 中考热点题型评析与探究    | ( 74 )  |
| 第三章 反比例函数          | ( 90 )  |
| 3.1 反比例函数及其图象      | ( 90 )  |
| 3.2 反比例函数的应用       | ( 100 ) |
| 3.3 中考热点题型评析与探究    | ( 110 ) |
| 第四章 二次函数           | ( 125 ) |
| 4.1 二次函数           | ( 125 ) |
| 4.2 二次函数的图象与性质     | ( 131 ) |
| 4.3 二次函数的函数表达式     | ( 142 ) |
| 4.4 二次函数与一元二次方程    | ( 152 ) |
| 4.5 二次函数的应用        | ( 159 ) |
| 4.6 中考热点题型评析与探究    | ( 168 ) |
| 综合应用篇              | ( 184 ) |
| 一、函数与方程            | ( 184 ) |
| 二、函数与几何            | ( 191 ) |
| 三、多解型问题            | ( 199 ) |
| 四、函数创新应用题          | ( 207 ) |
| 五、函数与动态几何          | ( 218 ) |



# 基础篇

## 第一章 函数及其图象

### 1.1 平面直角坐标系

#### 知识点精析与应用



#### 知识点精析

##### 知识点一 平面直角坐标系

在平面内有公共原点且互相垂直的数轴,构成平面直角坐标系,其中水平的数轴叫做  $x$  轴或横轴,通常取向右方向为正方向;竖直的数轴叫做  $y$  轴或纵轴,取原点向上方向为正方向;两轴交点  $O$  是坐标原点,这样构成的平面叫做坐标平面(如图 1-1-1 所示).

(1)  $x$  轴、 $y$  轴的单位“1”可以相同,也可以不相同,它与数轴一样,其单位长度应根据需要规定.

(2) 由于  $x$  轴、 $y$  轴是数轴,故数轴上的点一律不带单位. 若所表示的平面直角坐标系具有实际意义时,一般在表示横轴和纵轴的字母后附单位. 如图 1-1-2 所示,横轴  $h(\text{m})$  表示海拔高度,单位:  $\text{m}$ ; 纵轴  $y(^{\circ}\text{C})$  表示温度,单位:  $^{\circ}\text{C}$ .

##### 知识点二 坐标平面的划分

$x$  轴和  $y$  轴将坐标平面分成四个部分,每一部分称为一个象限. 从右上的那个部分起,按逆时针方向依次称为第一象限、第二象限、第三象限和第四象限(如图 1-1-3 所示).

特别地,坐标原点、 $x$  轴和  $y$  轴不属于任何象限.

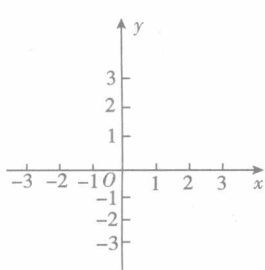


图 1-1-1

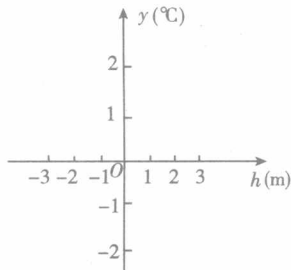


图 1-1-2

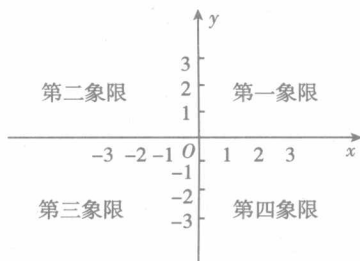


图 1-1-3



### 知识点三 点的坐标

在平面直角坐标系中,设点  $A$  是坐标平面上任一点,由点  $A$  向  $x$  轴作垂线,垂足  $M$  在  $x$  轴上的坐标是  $a$ ,由  $A$  向  $y$  轴作垂线,垂足  $N$  在  $y$  轴上的坐标是  $b$ ,我们说  $A$  的横坐标是  $a$ ,纵坐标是  $b$ ,合起来点  $A$  的坐标记作  $(a,b)$ .

(1)横坐标写在纵坐标前面,  $(a,b)$  是一个有序实数对.

(2)坐标平面上的点与有序实数对建立一一对应关系.

### 知识点四 象限内和坐标轴上点的坐标特征

(1)象限内点的坐标特征:

点  $P(x,y)$ ,

①若在第一象限,则  $x>0, y>0$ ;

②若在第二象限,则  $x<0, y>0$ ;

③若在第三象限,则  $x<0, y<0$ ;

④若在第四象限,则  $x>0, y<0$ .

(2)坐标轴上点的坐标特征:

点  $P(x,y)$ ,

①若在  $x$  轴上,则  $y=0, x$  为任意实数;

②若在  $y$  轴上,则  $x=0, y$  为任意实数;

③若在原点上,则  $x=y=0$ .



### 解题方法指导

#### 题型一 写出直角坐标系内点的坐标

这类题一般以选择、填空或解答题形式出现,通过过该点向  $x$  轴、 $y$  轴作垂线,然后观察分析便可准确求解.

[例1] 如图 1-1-4,写出图中  $A, B, C, D, E, F, G$  各点的坐标.

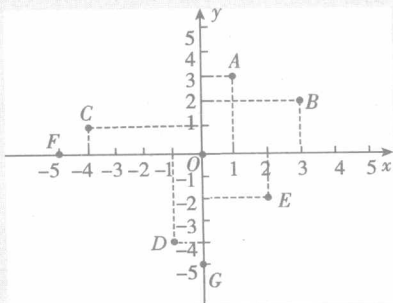


图 1-1-4

**解答**  $A(1,3), B(3,2), C(-4,1), D(-1,-4), E(2,-2), F(-5,0), G(0,-5)$

### 题型二 利用象限内和坐标轴上点的坐标特征解题

**【例2】** 指出下列各点所在的象限或坐标轴:

$A(-2,3); B(1,-2); C(-1,-2); D(3,2); E(-3,0); F(0,1); G(0,0).$

**解答**  $A$  点在第二象限;  $B$  点在第四象限;  $C$  点在第三象限;  $D$  点在第一象限;  $E$  点在  $x$  轴负半轴上;  $F$  点在  $y$  轴正半轴上;  $G$  是坐标原点.

**名师警示** 应特别注意坐标平面内特殊位置的点的坐标特征.

**【例3】** 如果点  $P(4-2m, m)$  在第四象限, 那么  $m$  满足 ( )

A.  $m > 0$

B.  $m < 0$

C.  $0 < m < 2$

D.  $m > 2$

**解答**  $\because$  点  $P(4-2m, m)$  在第四象限,  $\therefore \begin{cases} 4-2m > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow m < 0,$

$\therefore$  选 B.

**名师警示** 根据第四象限内点的坐标特征: 横坐标为正, 纵坐标为负, 列出不等式组求解.

**【例4】** 若点  $P(a, b)$  的坐标满足  $ab=0$ , 则点  $P$  一定在 ( )

A. 原点

B.  $x$  轴上

C.  $y$  轴上

D. 坐标轴上

**解答** 由  $ab=0$  知  $a$  与  $b$  至少有一个为 0,  $a=0$  或  $b=0$  或  $a=b=0$ , 所以  $P$  点应在坐标轴上. 故选 D.

**名师警示** 点  $P$  坐标  $a=0$  时在  $y$  轴上,  $b=0$  时在  $x$  轴上,  $a=b=0$  时在坐标原点上, 综上,  $P$  应在坐标轴上, 不能误选 A、B、C 中任一个.



### 基础达标演练

- 已知点  $A(m, n)$  在第四象限, 那么点  $B(n, m)$  在 ( )  
A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
- (经典题) 点  $N$  位于  $x$  轴下方, 距  $x$  轴 3 个单位长度, 且位于  $y$  轴右方, 距  $y$  轴 2 个单位长度, 则  $N$  点的坐标是 ( )  
A.  $(-3, -2)$       B.  $(-3, 2)$       C.  $(-2, -2)$       D.  $(2, -3)$
- 若点  $A(2, n)$  在  $x$  轴上, 则点  $B(n-2, n+1)$  在 ( )  
A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
- (2007 · 江西) 在平面直角坐标系中, 点  $(-1, m^2+1)$  一定在 ( )  
A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
- (易错题) 若点  $(a, b)$  在第三象限, 则点  $(-a+1, 3b-2)$  在 ( )  
A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限



6. (经典题) 平面直角坐标系中, 点  $P$  到  $x$  轴负半轴的距离为 8, 到  $y$  轴负半轴的距离为 3, 则  $P$  点的坐标为 \_\_\_\_\_.
7. 如果点  $M(a+b, ab)$  在第二象限, 那么点  $N(a, b)$  在第 \_\_\_\_\_ 象限.
8. 指出下列各点所在象限或坐标轴:  
 $A(-3, -5), B(6, -7), C(0, -6), D(-3, 5), E(4, 0)$



### 答案与提示

1. B 提示:  $\because A(m, n)$  在第四象限,  $\therefore m > 0, n < 0$ ,  $\therefore B(n, m)$  在第二象限.
2. D 提示:  $N$  在  $x$  轴下方, 说明  $N$  的纵坐标小于 0, 位于  $y$  轴右方, 说明  $N$  的横坐标大于 0.
3. B 提示: 由于点  $A(2, n)$  在  $x$  轴上, 则  $n = 0$ , 所以  $n - 2 = -2, n + 1 = 1$ , 所以点  $B(n - 2, n + 1)$  的坐标为  $(-2, 1)$ , 横坐标小于 0, 纵坐标大于 0, 应在第二象限, 故选 B.
4. B 提示:  $\because -1 < 0, m^2 + 1 \geq 1 > 0$ ,  $\therefore$  点  $(-1, m^2 + 1)$  在第二象限, 故选 B.
5. D 提示: 由  $(a, b)$  在第三象限, 得  $a < 0, b < 0$ , 所以  $-a + 1 > 0, 3b - 2 < 0$ , 故  $(-a + 1, 3b - 2)$  在第四象限.
6.  $(-3, -8)$  提示: 易错成  $(-8, -3)$ .
7. 三 提示:  $\because a + b < 0, ab > 0$ ,  $\therefore a < 0, b < 0$ .
8.  $A(-3, -5)$  在第三象限,  $B(6, -7)$  在第四象限,  $C(0, -6)$  在  $y$  轴上,  $D(-3, 5)$  在第二象限,  $E(4, 0)$  在  $x$  轴上.

## 能力拓展



### 释疑解难

#### 1. 象限角平分线上的点的坐标特征

第一、三象限角平分线上的点  $P(x, y)$  的横、纵坐标相等, 即  $x = y$ ;

第二、四象限角平分线上的点  $P(x, y)$  的横、纵坐标互为相反数, 即  $x = -y$  或  $x + y = 0$ .

#### 2. 平行于坐标轴的直线上点的坐标特征

平行于  $x$  轴的直线上的所有点的纵坐标相同, 若  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ , 且  $AB \parallel x$  轴, 则  $y_A = y_B$ ;

平行于  $y$  轴的直线上的所有点的横坐标相同, 若  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ , 且  $AB \parallel y$  轴, 则  $x_A = x_B$ .

#### 3. 关于 $x$ 轴、 $y$ 轴、原点对称的点的坐标特征

关于哪个轴对称, 哪个轴上的坐标就相等, 另一个轴上的坐标均互为相反数; 关于原点对称的两个点的横纵坐标均互为相反数.

**口诀:** 关谁谁不变,

关原全相反.



4. 点  $P(x, y)$  到  $x$  轴的距离为  $|y|$ , 到  $y$  轴的距离为  $|x|$ , 到原点的距离为  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

### 综合探究

#### 应用 空间想象能力

**[例5]** 若点  $P(m^2 - 2, m)$  在第四象限的角平分线上, 则点  $(|m|, m^{-1})$  关于  $y$  轴的对称点坐标是\_\_\_\_\_.

**解答** 由题意知  $(m^2 - 2) + m = 0$ , 解得  $m_1 = -2, m_2 = 1$  (舍去), 所以点  $(2, -\frac{1}{2})$  关于  $y$  轴对称的点的坐标是  $(-2, -\frac{1}{2})$ .

**说明** 一三象限夹角平分线上的点的横纵坐标相等; 二四象限夹角平分线上的点的横纵坐标互为相反数.

**[例6]** 已知两点  $A(-3, m), B(n, 4)$ , 且  $AB \parallel x$  轴, 求  $m$  的值, 并确定  $n$  的取值范围.

**解答**  $\because AB \parallel x$  轴且  $A, B$  是不同的两点,  $\therefore m = 4$  且  $n \neq -3$ .

**说明** 直线平行于  $x$  轴, 则直线上的任意两点的纵坐标相等.

**[例7]** 已知点  $A(a, 2), B(-1, b)$ , 若点  $A, B$  关于  $y$  轴对称, 则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_, 若点  $A, B$  关于原点对称, 则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_.

**解答** 点  $A, B$  关于  $y$  轴对称, 则  $b = 2, a = 1$ ; 点  $A, B$  关于原点对称, 则  $a = 1, b = -2$ .

**说明** 应用对称问题口诀: 关谁谁不变, 关原全相反.

**[例8]** 点  $M(\sqrt{3}, -1)$  到  $x$  轴的距离是\_\_\_\_\_, 到  $y$  轴的距离是\_\_\_\_\_, 到原点的距离是\_\_\_\_\_.

**解答**  $M$  到  $x$  轴的距离是  $|-1| = 1$ ,  $M$  到  $y$  轴的距离是  $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ ,  $M$  到原点的距离是  $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ .

### 思维拓展训练

1. 已知点  $A(5a - 7, -6a - 2)$  在第二、四象限的角平分线上, 求  $a$  的值.
2. 已知点  $A(a, 2)$  和点  $B(-1, b)$ , 根据下列条件求出  $a, b$  的值. (1)  $A, B$  在坐标轴上; (2)  $AB \parallel x$  轴.
3. 点  $A(2 - 3a, a + 1)$  关于原点的对称点在第四象限, 求  $a$  的取值范围.
4. 点  $P$  在一、三象限角平分线上, 且到原点的距离为 6, 求  $P$  点坐标.
5. 已知点  $N(3a - 2, 4 - a)$  到  $x$  轴的距离等于到  $y$  轴的距离的 2 倍, 求  $a$  的值.



## 答案与提示

- $a = -9$  提示:  $\because A$  点在第二、四象限的角平分线上,  $\therefore A$  点的横纵坐标互为相反数,  $\therefore (5a-7) + (-6a-2) = 0$ , 解得  $a = -9$ .
- (1)  $a = 0, b = 0$  (2)  $a \neq -1, b = 2$  提示: (1)  $\because A, B$  在坐标轴上,  $\therefore a = 0, b = 0$ ; (2)  $AB \parallel x$  轴,  $\therefore a \neq -1, b = 2$ .
- $a > \frac{2}{3}$  提示: 由题意知点  $A$  在第二象限, 则  $\begin{cases} 2-3a < 0 \\ a+1 > 0 \end{cases}$ , 解得  $a > \frac{2}{3}$ .
- $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$  或  $(-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$  提示: 符合题意的点有两个, 一个在第一象限, 另一个在第三象限, 这两个点关于原点对称.
- $a = \frac{8}{7}$  或  $a = 0$  提示:  $\because |4-a|$  是  $N$  点到  $x$  轴的距离,  $|3a-2|$  是  $N$  点到  $y$  轴的距离, 依题意得  $|4-a| = 2|3a-2|$ , 即  $4-a = 2(3a-2)$  或  $4-a = -2(3a-2)$ ,  $\therefore a = \frac{8}{7}$  或  $a = 0$ .

## 1.2

## 变量与函数

### 知识点精析与应用

#### 知识点精析

##### 知识点一 常量与变量

在某一变化过程中, 固定不变的量称为常量; 可以取不同数值的量叫做变量.

(1) 例如圆的面积  $S(\text{cm}^2)$  与半径  $r(\text{cm})$  之间的关系式是  $S = \pi r^2$ , 其中  $S, r$  为变量,  $\pi$  为常量, 当常量不含单位时, 也称常量为常数.

(2) 变量与常量是相对的, 在不同的变化过程中是可以相互转换的.

##### 知识点二 函数的概念

在某一变化过程中, 如果有两个变量  $x$  与  $y$ , 并且对于  $x$  的每一个确定的值,  $y$  都有唯一确定的值与其对应, 我们就说  $x$  是自变量,  $y$  是  $x$  的函数.

(1) 在一个变化过程中必须有两个变量  $x$  和  $y$ ;

(2) 变量  $x$  具有一定的取值范围(在某个变化过程中);

(3) 对  $x$  在这个范围内的每一个值,  $y$  都有唯一确定的值与之对应.

##### 知识点三 函数自变量的取值范围的确定

使函数有意义的自变量的取值的全体叫做函数的自变量的取值范围, 在确定自变量取值范围时应注意以下技巧:



(1) 整式函数: 自变量的取值范围是全体实数, 如  $y=3x+5$ ,  $y=x^2+2x-3$  等.

(2) 分式函数: 自变量的取值范围是使分母不等于零的实数, 如函数  $y=\frac{1}{x-2}$  中, 自变量  $x$  的取值范围是  $x-2 \neq 0$ , 即  $x \neq 2$ .

(3) 二次根式中含自变量: 其自变量的取值范围是使被开方数为非负实数. 如函数  $y=\sqrt{x+2}$  中, 自变量的取值范围是  $x+2 \geq 0$ , 即  $x \geq -2$ .

(4) 在一个函数关系式中, 分式和二次根式中同时含有自变量  $x$  时, 函数自变量的取值范围应是它们的公共解. 如函数  $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$  中, 自变量  $x$  的取值范围应是  $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases}$ , 即  $x+1 \geq 0$  与  $x^2-1 \neq 0$  的公共解, 即  $x > -1$  且  $x \neq 1$ .

(5) 实际问题: 必须使实际问题有意义, 如圆的周长  $C$  与半径  $r$  的函数关系式  $C=2\pi r$ , 尽管这是一个整式函数, 但是自变量  $r$  的取值范围应是  $r > 0$ , 否则实际问题无意义.

(6) 自变量的取值范围既可以是无限的, 也可以是有限的, 还可以是几个数或单独的一个数. 例如函数  $y=\sqrt{-x^2}$  中, 因为  $x^2 \geq 0$ ,  $\therefore -x^2 \leq 0$ , 因此使  $\sqrt{-x^2}$  有意义的  $x$  的值只有一个数, 即为 0, 所以  $y=\sqrt{-x^2}$  中自变量的取值范围是  $x=0$ .

(7) 两个函数相同, 其解析式、自变量的取值范围均相同, 如函数  $y=x$  与  $y=\frac{x^2}{x}$  是不同的两个函数, 因为它们自变量的取值范围不同.

#### 知识点四 函数值

对于自变量在取值范围内的每一个确定的值, 如当  $x=a$  时, 函数有唯一确定的对应值, 这个对应值叫做当  $x=a$  时的函数值, 简称函数值.

(1) 若函数是由一个解析式表示的, 求函数值就要求代数式的值;

(2) 当已知函数解析式, 又给出函数值, 求相应的自变量的值时, 就要解方程;

(3) 当给定函数值的一个取值范围, 求相应的自变量的取值范围时, 就要解不等式.

#### 知识点五 函数的三种表示方法

函数的三种表示方法分别是解析法、图象法、列表法.



### 解题方法指导

#### 题型一 结合实际问题列函数解析式

本类题解法是寻找问题的等量关系, 运用列方程的方法写出函数关系式, 书写格式是将表示函数的变量的一个字母写在等式的左边, 将含有自变量的代数式写在右边.

**例1** 已知一支蜡烛长 30cm, 每分钟燃烧 1.5cm, 试写出剩余蜡烛的长  $l$ (cm) 与时间  $t$ (min) 的函数关系式为 \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ min 后蜡烛将燃烧完.

**解答**  $l=30-1.5t$ , 当  $l=0$  时,  $t=20$ .



## 题型二 求自变量的取值范围

[例2] 求下列函数自变量的取值范围.

$$(1)y=\frac{1}{2}x+3; (2)y=\frac{1}{3x+2}; (3)y=\sqrt{5-2x}; (4)y=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1};$$

$$(5)y=\frac{1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-7}}.$$

解答 (1)自变量  $x$  的取值范围是全体实数.

$$(2)\because 3x+2\neq 0, \therefore x\neq -\frac{2}{3}.$$

$$(3)\because 5-2x\geq 0, \therefore x\leq \frac{5}{2}.$$

$$(4)\because \begin{cases} x+1\geq 0 \\ x-1\neq 0 \end{cases}, \therefore x\geq -1 \text{ 且 } x\neq 1.$$

$$(5)\because \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-7>0 \end{cases}, \therefore x>7.$$

名师警示 求函数自变量的取值范围,必须抓住自变量  $x$  所在的代数式的具体特征,再根据确定技巧求得.

## 题型三 求函数值

[例3] 已知函数  $y=\frac{2x-1}{x+1}$ , 分别求出当  $x=0, 1, -\frac{1}{2}$  时的函数值.

解答 当  $x=0$  时,  $y=-1$ ;

当  $x=1$  时,  $y=\frac{1}{2}$ ;

当  $x=-\frac{1}{2}$  时,  $y=-4$ .

[例4] 一种树苗,栽种时高度约为 90 厘米,为研究它的生长情况,测得数据如下表:

| 栽种以后的年数 $n$ 年 | 高度 $h$ 厘米 |
|---------------|-----------|
| 1             | 120       |
| 2             | 150       |
| 3             | 180       |
| 4             | 210       |
| ...           | ...       |

(1)写出栽种以后的年数  $n$  和树的高度  $h$  之间的关系式;

(2)求出栽种 2.5 年和 5 年树的高度;

(3)栽种几年后树的高度为 270 厘米.



解答 (1)  $h=90+30n$ ;

(2) 当  $n=2.5$  时,  $h=165(\text{cm})$ ; 当  $n=5$  时,  $h=240(\text{cm})$ .

(3) 当  $h=270$  时,  $90+30n=270$ ,  $n=6(\text{年})$ .

**名师警示** 本题先需要根据数字规律探究出函数关系式, 然后把  $n$  的值分别代入求函数值. 而已知函数值求变量  $n$  需要解一元一次方程.



### 基础达标演练

1. (易错题) 下列关于变量  $x$  与  $y$  的关系式中:  $y=3x$ ,  $y=\pm\sqrt{x}(x>0)$ ,  $y^2-x=1$ ,  $3x^2-y=0$ ,  $y=\frac{1}{3-x}(x\neq3)$ ,  $y$  是  $x$  的函数的有 ( )

A. 1 个      B. 2 个      C. 3 个      D. 4 个

2. 设路程为  $s$  km, 速度为  $v$  km/h, 时间为  $t$  (h), 当  $s=50$  km 时, 求时间的表达式为  $t=\frac{50}{v}$ , 这个关系式中 ( )

A. 路程是常量,  $t$  是  $s=50$  km 的函数      B. 速度是常量,  $t$  是  $v$  的函数  
C. 时间和速度是变量,  $t$  是  $v$  的函数      D. 路程与时间是变量,  $t$  是  $v$  的函数

3. (2007·天门) 函数  $y=\frac{1-\sqrt{x+1}}{x-2}$  中, 自变量  $x$  的取值范围是 ( )

A.  $x\geq-1$       B.  $x>2$       C.  $x>-1$  且  $x\neq2$       D.  $x\geq-1$  且  $x\neq2$

4. (创新题) 如果函数  $f(x)=x+1$ , 那么  $f(1)=$  \_\_\_\_\_.

5. (经典题) 求下列函数中自变量  $x$  的取值范围.

$$(1) y = \sqrt{x-4} + \frac{1}{x-5} + (x+2);$$

$$(2) y = \sqrt{3x-1} + \sqrt{1-3x}.$$

6. (易错题) 某函数  $y=2x-4$  中,  $x$  的取值范围是  $1<x\leq3$ , 试求  $y$  的取值范围.

7. (原创题) 在地理中, 我们知道, 海拔每升高 1 千米, 气温下降  $6^\circ\text{C}$ , 设地面气温是  $30^\circ\text{C}$ .

(1) 求气温  $t(^\circ\text{C})$  与高度  $h(\text{千米})$  的函数关系式;

(2) 若某人此时要爬到 5 千米的山顶上, 请问他是否需带棉衣上山?



### 答案与提示

1. C 提示: 函数  $y=\pm\sqrt{x}(x>0)$ ,  $y^2-x=1$  不符合要求, 因为对于  $x$  的每一个确定的值,  $y$  都不是有唯一值与其对应.

2. C 提示: 根据变量与函数的概念判断.

3. D 提示: 由  $x+1\geq0$  且  $x-2\neq0$  得  $x\geq-1$  且  $x\neq2$ , 故选 D.

4. 2 提示:  $f(1)=1+1=2$ .

5. (1) 由  $\begin{cases} x-4\geq0 \\ x-5\neq0 \end{cases}$  解之得:  $x\geq4$  且  $x\neq5$ .