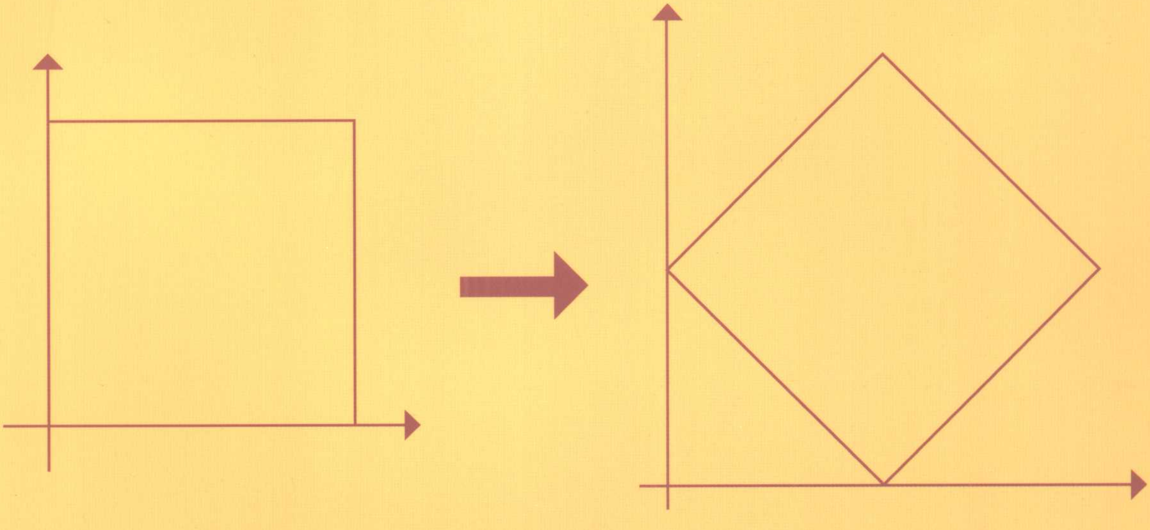
线性空间引论

（第3版）

陈恭亮　叶明训　郑延履　编著



清华大学出版社

线性空间引论

（第3版）

陈恭亮 叶明训 郑延履 编著

清华大学出版社
北京

内 容 提 要

全书共 9 章. 第 1 章和第 3 章通过群、环、域介绍线性空间的基本理论, 并利用它们在第 4 章和第 5 章讨论矩阵运算、矩阵相似和线性方程组; 第 2 章利用 n 次对称群讲述行列式; 第 9 章再深入讨论多重交错线性型的一般理论; 第 6 章讲述对偶空间, 第 7 章讲述对称的双线性型, 并讨论二次齐式、欧氏空间等, 第 8 章讲述埃尔米特型.

这是一本以线性空间与线性变换为理论基础的线性代数教材, 既注重理论和方法, 也强调其应用. 力求方便于教学和自学, 适用于综合大学数学专业、物理专业、计算机专业、信息安全专业等, 也可以作为其他院校线性代数课程的参考书.

图书在版编目 (CIP) 数据

线性空间引论 / 陈恭亮, 叶明训, 郑延履编著. — 3 版. —北京: 清华大学出版社, 2009.7

ISBN 978-7-302-20130-4

I. 线 ···　II. ① 陈 ··· ② 叶 ··· ③ 郑 ···　III. 线性空间 - 高等学校 - 教材　IV.O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 073210 号

责任编辑: 刘　颖
责任校对: 赵丽敏
责任印制: 王秀菊
出版发行: 清华大学出版社　　地　址: 北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　邮　编: 100084
社 总 机: 010-62770175　　邮　购: 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者: 清华大学印刷厂
装 订 者: 北京市密云县京文制本装订厂
经　销: 全国新华书店
开　本: 185×230　印 张: 22　字 数: 427 千字
版　次: 2009 年 7 月第 3 版　　印　次: 2009 年 7 月第1 次印刷
印　数: 1～4000
定　价: 33.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题, 请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话: (010)62770177 转 3103　　产品编号: 024479-01

第 3 版前言

线性代数是线性空间与线性变换的理论. 它既是学生需要掌握的数学理论和方法, 也是学生需要掌握的科学和技术的工具. 我们一方面以现代数学的观念阐述线性代数的理论和方法, 同时也强调有效应用这个理论和方法.

首先介绍群、环、域等基本代数结构, 线性空间和线性变换就看做带算子的加群和带算子的同态. 利用 n 次对称群的知识可以定义行列式, 并证明行列式的性质, 以及有效计算行列式.

其次, 线性方程组的讨论可转移成像子空间与核子空间的结论. 矩阵是线性变换的一种表现, 在不同基底下有不同的表现形式; 求矩阵的相似对角块形, 实质是将线性空间分解成不变子空间的直和. 进一步, 给出了具体求基础解系的方法, 以及初等变换的应用.

再次, 线性泛函也是一类线性变换, 对偶空间则是讨论多重线性型的基础. 二次齐式和欧氏空间可以统一在对称双线性型的内容中. 进一步, 给出了具体求正交基底的方法.

最后, 介绍张量代数和外代数的初步知识, 讨论多重交错的线性型.

在上述教材体系下, 我们注意以下几点. (1) 先讲述问题的背景, 再抽象到 “公理化” 的讨论, 使得抽象的概念和推理有实例可比照. (2) 利用空间和变换的思想来分析和解决问题, 同时保持矩阵运算的基本方法和技巧. (3) 对重要的计算, 给出详细的介绍. (4) 增加例题的类型和份量, 精讲多练, 力求使掌握理论知识与提高解题能力紧密配合. 例题篇幅达到全书之半, 习题偏多以供选做, 对较难的习题有提示性解答. (5) 前后呼应, 联系相关知识, 使形式相近的结论有统一的理解.

本书第 1 版出版于 1990 年, 以武汉大学中法数学班的 “线性代数” 教材为基础而形成. 先后在中法数学班、数学基地班, 数理经济专业等反复使用. 第 2 版出版于 2000 年, 又应用到数学专业、物理专业、计算机专业、信息安全专业等. 其间得到余家荣教授、文志英教授、王维克教授、姚家燕教授等许多师长和同事的指导和帮助, 也得到汪芹、李银、陈一阳等学生的宝贵意见. 顺致谢忱!

水平所限, 错误难免, 抛砖引玉, 力求更新教学内容.

作者

目 录

第1章　代　数　系

集合论的语言和方法, 是代数方面课程的重要基础. 本章首先介绍集合论的一些基本概念, 然后引入运算, 最后介绍几种常用的代数系. 主要包括以下 5 个问题: (1) 集合与元素; (2) 映射; (3) 等价关系和等价分类; (4) 运算与代数系; (5) 群、环、域.

§1.1　集　　合

在讨论一个数学问题的时候, 我们常常把一些讨论的对象作为一个整体来看待, 以便确定这些对象的共同性质和相互关系. 在一个问题中, 这些讨论对象的全体作为一个整体, 叫做**集合**, 通常用大写字母来表示, 如 E, F, X, Y 等; 其中的每一个对象叫做集合的**元素**, 简称为**元**, 通常用小写字母来表示, 如 x, y, a, b 等.

如果 x 是集合 E 的元素, 就称 x**属于** E, 记成 $x \in E$; 否则, 称 x**不属于** E, 记成 $x \notin E$.

例如: 所有的自然数即非负的整数组成一个集合, 叫做自然数集, 记成 $\mathbb{N}$; 所有的整数组成一个集合, 叫做整数集, 记成 $\mathbb{Z}$; 所有的非零整数组成一个集合, 记成 $\mathbb{Z}^*$; 此外, 类似的还有有理数集 $\mathbb{Q}$、实数集 $\mathbb{R}$、复数集 $\mathbb{C}$ 等.

值得注意的是, 集合不一定是数集, 元素不一定是数. 例如: 一个平面上的所有点组成一个集合; 直观空间内的所有直线组成一个集合; 所有实系数的一元多项式组成一个集合. 集合的例子很多, 是不胜枚举的.

集合有两种表示方法, 一种是枚举法, 即列举所有元素来表示集合. 如集合

$$E = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\},$$

是 30 的所有正因数组成的集合, 它的元素可以列举无遗. 又例如:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}, \qquad \mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\},$$

它们的元素不可能列举无遗, 只好辅以省略号. 集合的另一种表示方法是定性法, 指出集合内元素所具有的性质. 例如: 前面的 E 又可以表示成

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x|30\}.$$

又例如: 平面上以原点为圆心、以 1 为半径的圆上的所有点, 组成一个集合 F, 它可以表示成

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

同样, 奇数集、偶数集可以分别表示成

$$\{2x+1 \mid x \in \mathbb{Z}\}, \quad \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

通常约定：不含任何元素也组成一个集合, 叫做**空集**, 记成 $\varnothing$. 譬如,

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z},\ 3 < x < 4\}$$

就是空集. 我们还约定：集合不包含相同的元素. 即集合是不同元素的全体. 当集合的元素的个数有限时, 这个集合叫做**有限集**, 否则叫做**无限集**.

假设 E, F 是两个集合. 如果 E 的任何元素都属于 F, 即任意 $x \in E$ 时都有 $x \in F$, 就称 E 是 F 的**子集合**, 记成 $E \subseteq F$, 读成 F 包含 E, 或 E 包含在 F 内. 如果 $E \subseteq F$ 但是 $E \neq F$, 就称 F**真包含** E, 记成 $E \subset F$. 譬如,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

假设 E, F 是两个集合, $E \subseteq F$ 而且 $F \subseteq E$, 就称 E 与 F **相等**, 记成 $E = F$.

假设 E, F 是两个集合, 那么, E 与 F 的公共元素的全体, 组成一个新的集合, 叫做 E 和 F 的**交集**, 记成 $E \cap F$, 即

$$E \cap F = \{x \mid x \in E,\ x \in F\}.$$

另外, E 的所有元素及 F 的所有元素的全体, 组成一个新的集合, 叫做 E 和 F 的**并集**, 记成 $E \cup F$, 即

$$E \cup F = \{x \mid x \in E,\ 或\ x \in F\}.$$

最后, 属于 F 但不属于 E 的所有元素的全体, 组成一个新的集合, 叫做 F 对于 E 的**差集**, 记成 $F - E$, 即

$$F - E = \{x \mid x \in F,\ x \notin E\}.$$

譬如, $E = \{1,2,3\}, F = \{2,3,4\}, G = \{1,2\}$ 时, 就有

$$E \cap F = \{2,3\}, \qquad E \cup F = \{1,2,3,4\},$$
$$E - F = \{1\}, \qquad E - G = \{3\}, \qquad G - E = \varnothing.$$

像初等数学的运算一样, 集合的交集、并集、差集也有一些类似的性质.

性质 1.1.1 假设 E, F, G 是 3 个集合. 那么有

(1) 交换律：$E \cap F = F \cap E, \qquad E \cup F = F \cup E.$

(2) 结合律：$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G), \qquad (E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G).$

(3) 分配律：$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G), \qquad E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G).$

证　性质 1.1.1 的这些命题, 证明方法都是一样的. 我们只就分配律的第一个命题来证明, 其余留给读者作为练习.

对于任意 $x \in E \cap (F \cup G)$, 有 $x \in E$ 同时 $x \in F \cup G$. 从而得, $x \in E$ 同时 $x \in F$, 或者 $x \in E$ 同时 $x \in G$. 即 $x \in E \cap F$, 或 $x \in E \cap G$. 即 $x \in (E \cap F) \cup (E \cap G)$. 这就证明了

$$E \cap (F \cup G) \subseteq (F \cap F) \cup (E \cap G). \tag{1.1}$$

反过来, 显然 $E \cap F \subseteq F, E \cap G \subseteq G$, 因此

$$(E \cap F) \cup (E \cap G) \subseteq F \cup G. \tag{1.2}$$

同理可证

$$(E \cap F) \cup (E \cap G) \subseteq E \cup E = E. \tag{1.3}$$

由 (1.2),(1.3) 两式可得

$$(E \cap F) \cup (E \cap G) \subseteq E \cap (F \cup G). \tag{1.4}$$

由 (1.1),(1.4) 两式说明, 分配律的第一个命题成立. 证毕

性质 1.1.2 假设 A, B 是 E 的子集合. 那么有

(1) $E - (A \cup B) = (E - A) \cap (E - B)$;

(2) $E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B)$.

证　先来证明第一个命题.

对于任意 $x \in E - (A \cup B)$, 有 $x \in E$ 但 $x \notin A \cup B$. 从而得

$$x \in E,\ x \notin A,\ x \notin B.$$

所以 $x \in E - A, x \in E - B$. 因而 $x \in (E - A) \cap (E - B)$. 这就证明了

$$E - (A \cup B) \subseteq (E - A) \cap (E - B). \tag{1.5}$$

反过来, 对于任意 $x \in (E - A) \cap (E - B)$, 有 $x \in E - A$ 和 $x \in E - B$. 从而得, $x \in E$ 但 $x \notin A, x \notin B$. 即 $x \in E$ 但 $x \notin A \cup B$. 所以, $x \in E - (A \cup B)$. 这就证明了

$$(E - A) \cap (E - B) \subseteq E - (A \cup B). \tag{1.6}$$

(1.5), (1.6) 两式说明命题 (1) 成立.

利用命题 (1), 又得到

$$E - ((E - A) \cup (E - B)) = (E - (E - A)) \cap (E - (E - B)) = A \cap B.$$

再由差集的定义, 不难得到

$$E-(A\cap B)=(E-A)\cup(E-B).$$ **证毕**

最后, 我们来介绍集合的直积, 它是由若干个集合导出的一个新的集合.

假设 E,F 是两个集合. 由 $x\in E$, $y\in F$ 作一个有顺序的元素对 (x,y). 当 x,y 分别取遍 E,F 的元素时, 所有这样的元素对的全体, 组成一个新的集合, 叫做 E 与 F 的**直积**, 记成 $E\times F$, 即

$$E\times F=\{(x,y)\mid x\in E,\ y\in F\}.$$

用同样的方法, 可以定义 n 个集合 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 的直积

$$E_1\times E_2\times\cdots\times E_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in E_i,\ i=1,2,\cdots,n\}.$$

特别地, $E_1=E_2=\cdots=E_n=E$ 时, 记 $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n=E^n$, 即

$$E^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in E,\ i=1,2,\cdots,n\}.$$

在几何内有许多集合直积的实例, 平面上的点的集合可以看成两个实数集的直积、空间内的点的集合可以看成 3 个实数集的直积.

习 题

1. 列举下面每个集合的元素:

$$A=\{x\mid x\in\mathbb{Z},\ 4<x<10\},\qquad B=\{x\mid x\text{是偶数},\ x^2\text{是奇数}\},$$
$$C=\{x\mid \text{存在 } y\in\mathbb{Z} \text{ 使得 } x=5y+1\},\qquad D=\{x\mid x^3=1\},\qquad E=\{x\mid x\in\mathbb{Z},\ x>1 \text{ 或 } x<2\}.$$

2. 假设 A,B 都是 E 的子集合. 那么, $B=E-A$ 的充要条件是

$$A\cup B=E,\quad A\cap B=\varnothing.$$

3. 假设 A,B 都是 E 的子集合. 那么, 下面 4 个条件是等价的:

$$A\subseteq B;\ E-B\subseteq E-A;\ A\cup B=B;\ A\cap B=A.$$

4. 假设 A,B,C 都是 E 的子集合. 那么有
   (1) $A-B=A-(A\cap B)$;
   (2) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$;
   (3) $A\cap(B-C)=B\cap(A-C)=(A\cap B)-C$.
5. 假设 A,B,C,D 是 4 个集合. 那么有

(1) $A \subseteq B, C \subseteq D$ 的充要条件是 $A \times C \subseteq B \times D$;

(2) $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$;

(3) $(A \times C) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times C$;

(4) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

6. 假设 A, B 都是 E 的子集合. 以 $\overline{X}$ 记 $E - X$. 证明:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

7. 假设 A, B, C 都是 E 的子集合. 定义对称差 $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. 证明:

(1) $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.　　(2) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

§1.2 映　射

为了讨论不同集合元素之间的相互关系, 我们引入映射的概念.

假设集合 X 的元素与集合 Y 的元素之间, 有一个对应的规则 f: 对于任意 $x \in X$, 都有一个对应的 $y \in Y$, 记成 $y = f(x)$. 那么, 这个对应的规则 f 叫做 X 到 Y 的**映射**, y 叫做 x 的像, x 叫做 y 的**像源**. 映射和元素的对应关系通常记成

$$\begin{array}{llll} f: & X & \longrightarrow & Y \\ f: & x & \longmapsto & y \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{lll} X & \xrightarrow{f} & Y. \\ x & \overset{f}{\longmapsto} & y. \end{array}$$

根据上述定义, 对于映射 f, X 内的任意元素 x 都有像 $f(x)$ 在 Y 内. 但是, Y 内的任意元素 y 不一定都有像源. 譬如, 对于 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射: $x \longmapsto x^2$, $\mathbb{R}$ 内的元素 $y < 0$ 时, y 就没有像源.

集合 E 到 E 的映射: $x \longmapsto x$, 它把 E 的任意元都对应它自身. 这个映射叫做 E 的**恒等映射**, 记成 id_E. 显然, E 内任意元素都有像源. 假若 f 是 X 到 Y 的映射, 而且 Y 内任意元素都有像源. 那么, 这种 f 叫做 X到 Y **上的映射**, 或X **到** Y **的满射**.

根据映射的定义, 对于映射 f, X 内任意元素 x 的像 $f(x)$ 是惟一的. 但是, Y 内的元素 y 有像源时, y 的像源不一定是惟一的. 譬如, 对恒等映射 id_E, E 内任意元素 x 有惟一的像源 x. 再譬如, 对 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 内的映射: $x \longmapsto x^2$, $\mathbb{R}$ 内元素 $y > 0$ 时, y 都有像源 $\pm\sqrt{y}$, 不是惟一的. 再举个例子,

$$f: x \longmapsto \frac{2x}{x-1}$$

是 $\mathbb{R} - \{1\}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射. 任意 $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, 都有像 $f(x) \in \mathbb{R}$. 但是, $\mathbb{R}$ 内 $y = 2$ 没有像源, 不存在 $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ 使 $\dfrac{2x}{x-1} = 2$. 容易看出, f 是 $\mathbb{R} - \{1\}$ 到 $\mathbb{R}-\{2\}$ 上的映射; 而且, $\mathbb{R} - \{2\}$ 内任意元素的像源是惟一的. 假若 f 是 X 到 Y 的映射,Y 内元素 y 有像源时, y 的

像源还是惟一的. 那么, f 叫做 X 到 Y 的**一对一的映射**, 或**单射**. 上面的例子, 就是 $\mathbb{R}-\{1\}$ 到 $\mathbb{R}-\{2\}$ 上的、一对一的映射. X 到 Y 上的一对一的映射又叫做**一一对应的映射**, 或**可逆映射**.

仍用上面例子, 对于 $\mathbb{R}-\{1\}$ 到 $\mathbb{R}-\{2\}$ 上的一对一的映射 f, 对于任意的 $x\in\mathbb{R}-\{1\}$, 都有 $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}\in\mathbb{R}-\{2\}$. 反过来, 任意 $y\in\mathbb{R}-\{2\}$, 都有 $x=\dfrac{y}{y-2}\in\mathbb{R}-\{1\}$, 而且该 x 是惟一的, 使得 $f(x)=y$. 于是,

$$g:\ y\longmapsto\frac{y}{y-2}$$

是 $\mathbb{R}-\{2\}$ 到 $\mathbb{R}-\{1\}$ 上的一对一的映射. 再举一个例子,

$$f:\ x\longmapsto x^3$$

是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的可逆映射. 于是, 把像与像源相颠倒, 又得到 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射

$$g:\ y\longmapsto\sqrt[3]{y}.$$

一般地说, 假设 f 是 X 到 Y 的可逆映射. 那么, 对于任意 $y\in Y$, 存在惟一的 $x\in X$, 使得 $f(x)=y$. 如果把上述 y 对应于 x, 即 $y\longmapsto x$, 就得到一个 Y 到 X 的映射. 它是由 f 派生出来的一个新的映射, 叫做 f 的**逆映射**, 记成 f^{-1}. 前面的 g 就是 f 的逆映射, 即 $g=f^{-1}$.

对于元素个数相同的有限集合, 各种映射有下面的简单关系.

定理 1.2.1 假设 X,Y 都是 n 个元素的集合, f 是 X 到 Y 的映射. 那么, 下面的 3 个条件是等价的:

(1) f 是到上的;

(2) f 是一对一的;

(3) f 是可逆的.

证 事实上, 只要证明前两个条件是等价的, 命题就成立. 记 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

如果 f 是到上的, 那么 $\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}=Y$. 但是 Y 也是 n 个元素组成的, 所以 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$ 是 n 个不同的元素. 即不同的 n 个元素的 n 个像是不同的. 这说明, f 是一对一的.

反过来, 如果 f 是一对一的, 那么 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$ 是 Y 的 n 个不同元素. 而 Y 只有 n 个元素, 因而 $Y=\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$, f 是到上的. 证毕

我们已经看到, 映射是与两个集合相联系的. 再举一个例子, $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的映射

$$f:\ \begin{cases} 2n & \longmapsto & n,\\ 2n+1 & \longmapsto & 2n+1.\end{cases}$$

奇数集 Z_1 与偶数集 Z_2 都是 $\mathbb{Z}$ 的子集合. 假若只看 f 在 Z_1 内的作用, 它是 Z_1 到 $\mathbb{Z}$ 内的一对一的映射. 假若只看 f 在 Z_2 内的作用, 它是 Z_2 到 $\mathbb{Z}$ 内的一对一的映射. 一般地说, 假设 f 是 X 到 Y 的映射, $X_1 \subseteq X$, 对于任意 $x \in X_1$, 使得 $x \longmapsto f(x)$ 的映射 f_1 是 X_1 到 Y 的映射, 叫做 f 在 X_1 上的**限制**, 记成 $f_1 = f|_{X_1}$. 上面例子中, f 不是一对一的, 但 f 在 Z_1, Z_2 上的限制都是一对一的.

下面开始讨论两个映射的一些性质.

设 f_1, f_2 都是 X 到 Y 的映射. 如果对于任意 $x \in X$, 都有

$$f_1(x) = f_2(x),$$

就称 f_1 与 f_2 **相等**, 记成 $f_1 = f_2$.

假设 X, Y, Z 是 3 个集合, f 是 X 到 Y 的映射, g 是 Y 到 Z 的映射. 对于任意 $x \in X$, 有 $f(x) \in Y$; 对于 $f(x) = y \in Y$, 又有 $g(y) = z \in Z$, 即是

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \qquad & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ x & \overset{f}{\longmapsto} & y = f(x), & \qquad & y & \overset{g}{\longmapsto} & z = g(y). \end{array}$$

那么, 对于任意 $x \in X$, 使得 $x \longmapsto z = g(f(x))$ 的对应规则是 X 到 Z 的映射, 叫做 f 与 g 的**乘积**, 记成 $g \circ f$, 或 gf. 即

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

f 与 g 的乘积 gf 可表示为

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

值得注意的是, 上面的 gf 存在, 是 X 到 Z 的映射; 而 fg 不一定存在, 因为 $Z \cap X = \varnothing$ 时, fg 就不能定义. 还要注意, 即使 fg 与 gf 都存在, 也不一定相等. 譬如 $X = Y = Z = \mathbb{R}$ 时, 假设 $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$. 那么 $gf(x) = \sin^2 x$, $fg(x) = \sin x^2$, 可见 $fg \neq gf$.

有了映射乘积的概念之后, 我们给出一个判别可逆映射的方法.

定理 1.2.2 假设 f 是 X 到 Y 的映射, g 是 Y 到 X 的映射, 而且

$$gf = \mathrm{id}_X, \quad fg = \mathrm{id}_Y,$$

那么, f 和 g 都是可逆映射, 而且互为逆映射.

证 首先, 由 $gf = \mathrm{id}_X$, 可以得到下面的结果.

(1) g 是到上的: 因为对于任意 $x \in X$ 都有 $g(f(x)) = \mathrm{id}_X(x) = x$, 即对于映射 g, 任意 x 都有像源 $f(x)$.

(2) f 是一对一的: 如果 $f(x_1) = f(x_2)$, 得到 $gf(x_1) = gf(x_2)$, 从而 $x_1 = x_2$.

用同样的方法, 由 $fg = \mathrm{id}_Y$ 可以得到: f 是到上的; g 是一对一的. 于是, 由定理的假设条件, 得到 f, g 都是可逆映射.

由于 $g(f(x)) = x$, g 是可逆映射, 所以 $g^{-1}(x) = f(x)$. 又由 x 的任意性, 得到 $g^{-1} = f$. 用同样的方法可以证明 $f^{-1} = g$. 证毕

假设 f 是 X 到 Y 的可逆映射. 那么, 对任意 $x \in X$ 都有 $f^{-1}f(x) = x$, 即 $f^{-1}f = \mathrm{id}_X$; 对任意 $y \in Y$ 都有 $ff^{-1}(y) = y$, 即 $ff^{-1} = \mathrm{id}_Y$. 根据定理 1.2.2, 把 f^{-1} 看成定理 1.2.2 的 g, 就得到 $(f^{-1})^{-1} = f$. 这就是下面的推论.

推论 假若 f 是可逆映射. 那么 f^{-1} 也是可逆映射, 并且

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

最后, 再来介绍两个常用的符号. 假设 f 是 X 到 Y 的映射, $A \subseteq X$. 那么, 当 x 取遍 A 的所有元素时, $f(x)$ 的全体组成 Y 的一个子集合, 叫做 A 对于 f 的**像集**, 简称为 A 的像集, 记成 $f(A)$. 即

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

显然 $f(X) \subseteq Y$. 特别地, 当 $f(X) = Y$ 时, 它表明 f 是 X 到 Y 上的映射. 再假设 $B \subseteq Y$. 那么, 使得 $f(x) \in B$ 元素 x 的全体, 组成 X 的一个子集合, 叫做 B 对于 f 的**像源集**, 简称为 B 的像源集, 记成 $f^{-1}(B)$. 即

$$f^{-1}(B) = \{x \mid x \in X,\ f(x) \in B\}.$$

值得注意的是, 这个记号 $f^{-1}(B)$ 并不意味着: f 是可逆映射, 存在逆映射 f^{-1}. 这里的 $f^{-1}(B)$ 是 B 对于 f 的像源集. 特别地, f 是可逆映射时, 存在逆映射 f^{-1}, 这时, $f^{-1}(B)$ 又可以理解成 B 对于 f^{-1} 的像集. 而且还有下面的定理.

定理 1.2.3 假设 f 是 X 到 Y 的可逆映射, $B \subseteq Y$. 那以, B 对于 f 的像源集 A_1, 等于 B 对于 f^{-1} 的像集 A_2.

证 如果 $x \in A_1$, 即 $f(x) = y \in B$. 从而得, 存在 $y \in B$ 使得 $f^{-1}(y) = x$, 即 $x \in A_2$. 反过来, 如果 $x \in A_2$, 即存在 $y \in B$ 使得 $f^{-1}(y) = x$. 从而得, X 的元素 x 使 $f(x) = y \in B$, 即 $x \in A_1$. 证毕

有了定理 1.2.3, 两种理解不会造成本质上的区别.

注意, 元素与集合是相对的. 例如: 有限集 $E=\{1,2,\cdots,n\}$ 有 n 个元素. E 的子集合有 $\mathrm{C}_n^0=1$ 个空集, 有 $\mathrm{C}_n^1=n$ 个 1 元子集合, 有 $\mathrm{C}_n^2=(n-1)n/2$ 个 2 元子集合, $\cdots$, 有 C_n^k 个 k 元子集合, $\cdots$, 有 $\mathrm{C}_n^n=1$ 个 n 元子集合, 这样的子集合总个数为

$$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n.$$

以这 2^n 个子集合为新的元素, 又可组成一个新的集合.

最后, 我们利用可逆映射来定义基数, 这也是集合论中最重要的概念.

设 E 和 F 为两个集合, 如果存在 E 到 F 上的可逆映射 $f\colon E\longrightarrow F$, 则称 E 与 F 有相同的**基数**. 如果集合 E 与集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 同基数, 则称 E 为**有限集**, 其基数为 n. 反之则称为**无限集**. 约定空集的基数为 0.

习　题

1. 假设 f 是 X 到 Y 的映射, $B\subseteq Y$. 那么:
   (1) $f(f^{-1}(B))\subseteq B$;
   (2) $f(f^{-1}(B))=B$ 的充分条件是 f 为到上的.
2. 假设 f 是 X 到 Y 的映射, $A\subseteq X$. 那么:
   (1) $f^{-1}(f(A))\supseteq A$;
   (2) $f^{-1}(f(A))=A$ 的充分条件是 f 为一对一的.
3. 假设 f 是 X 到 Y 的映射, $A_1,A_2\subseteq X$. 那么:
   (1) 当 $A_1\subseteq A_2$ 时, $f(A_1)\subseteq f(A_2)$;
   (2) $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$;
   (3) $f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\cap f(A_2)$;
   (4) $f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)$ 的充分条件是 f 为一对一的.
4. 假设 f 是 X 到 Y 的映射, $B_1,B_2\subseteq Y$. 那么:
   (1) 当 $B_1\subseteq B_2$ 时, $f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2)$;
   (2) $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$;
   (3) $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$;
   (4) $f^{-1}(B_1-B_2)=f^{-1}(B_1)-f^{-1}(B_2)$.
5. 假设 E,F 都是有限集合. 试证明:
   (1) $E\cup F$ 的元素数与 $E\cap F$ 的元素数之和, 等于 E 的元素数与 F 的元素数之和;
   (2) $E\times F$ 的元素数等于 E 的元素数与 F 的元素数之积.
6. 假设 E 是自然数集 $\mathbb{N}$ 的所有有限子集为新元素组成的新集合, E 到 $\mathbb{N}$ 的映射 f 为

$$f(A)=\sum_{x\in A}x,\qquad f(\varnothing)=0.$$

那么, f 是到上的, f 不是一对一的; 并写出 $f^{-1}(4)$.

7. 假设 f 是 X 到 Y 的映射, g 是 Y 到 Z 的映射, $h=gf$. 那么:

(1) 当 f,g 都是一对一时, h 也是一对一的;

(2) 当 f,g 都是到上时, h 也是到上的;

(3) 当 h 是一对一时, f 也是一对一的;

(4) 当 h 是到上时, g 也是到上的;

(5) h 是一对一的, 又 f 是到上的, g 也是一对一的;

(6) h 是到上的, 又 g 是一对一的, f 也是到上的.

8. 假设 f 是 X 到 Y 的映射, g 是 Y 到 Z 的映射, h 是 Z 到 X 的映射. 我们讨论 3 个映射:

$$hgf, \quad fhg, \quad gfh.$$

(1) 如果其中两个是一对一的, 而另一个是到上的, 那么 f,g,h 都是到上、一对一的;

(2) 如果其中两个是到上的, 而另一个是一对一的, 那么 f,g,h 都是到上、一对一的.

9. 假设 f 是 X 到 Z 的映射, g 是 X 到 Y 上的映射. 那么, 存在 Y 到 Z 的映射 h, 使 $f=hg$ 的充要条件是: 对于元素 $x_1,x_2\in X$, 有 $g(x_1)=g(x_2)$ 时, $f(x_1)=f(x_2)$.

10. 整数集 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的映射 f,g 分别定义为

$$f(n)=2n; \quad g(n)=\begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}, \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}. \end{cases}$$

试求映射 gf, 并问 f 和 g 是不是可逆映射, 为什么?

11. 假设 a,b 是两个实数, $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 f 使得 $f(x)=ax+b$. 证明: $a\neq 0$ 时, f 是可逆映射, 并求出 f^{-1} 的表达式.

12. 假设 A 是 E 的子集合, F 是以 E 的所有子集为元素组成的新的集合, F 到 F 的映射 f 为: 对任意 $B\in F$ 或 $B\subseteq E$,

$$B\longmapsto f(B)=A\cap B.$$

试问: f 为可逆映射的条件是什么? 条件是不是充要的?

§1.3 等价关系

在 §1.2 中, 我们借助于映射, 讨论了两个集合之间的关系. 本节我们将借助于等价关系, 进行一个集合内的元素分类.

先看两个实例. 一个平面上的所有直线组成一个集合, 在这个集合内,“平行” 是一个标准, 可以判别任意两个元素. 集合内的任意两条直线, 或者是平行的, 或者不是平行的. 再看整数集合 $\mathbb{Z}$, “大于” 是一个标准, 也可以判别任意两个元素. 任意两个整数 a,b, 或者 a 大于 b, 或者 a 不大于 b. 一般地, 我们先给出下面的定义.

定义 1.3.1 设 E 是一个非空集合. 如果集合 E 内有一个标准, 能够判别集合内任意两个有序的元素, 符合或者不符合这个标准. 那么, 我们就称这个集合有一个**关系**, 记成 R; 符合这个关系的有序元素对 (a,b) 也称为有这个关系, 记成 aRb.

例如: 整数集内,"大于"、"等于"、"小于" 都是一个关系. 又例如: 一个平面上所有直线组成的集合内,"平行"、"垂直" 也都是一个关系. 一个平面上所有三角形组成的集合内,"全等"、"相似" 也都是一个关系.

这样的例子还很多. 下面给出一种特殊的关系.

定义 1.3.2 设 E 是一个非空集合. 集合 E 内的关系 R 叫做**等价关系**. 如果 R 满足以下 3 个条件:

(1) 自反律: 对于任意 $x \in E$, 都有 xRx;

(2) 对称律: 如果 xRy, 就有 yRx;

(3) 传递律: 如果 xRy, yRz, 就有 xRz.

上面列举的一些关系中, 哪些是等价关系, 读者不难一一判别. 下面我们来讨论另外两个实例.

例 1.3.1 从整数集 $\mathbb{Z}$ 出发, 作有顺序的元素对的集合

$$E = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}.$$

在集合 E 内定义一个关系 R: $(a_1,b_1)R(a_2,b_2)$, 如果 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, 则 R 是等价关系.

首先, 容易证明自反律和对称律, 下面验证传递律. 如果

$$(a_1,b_1)R(a_2,b_2), \quad (a_2,b_2)R(a_3,b_3),$$

即是 $a_1b_2 = a_2b_1$, $a_2b_3 = b_3a_2$. 于是

$$a_1b_2b_3 = a_2b_1b_3 = a_2b_3b_1 = a_3b_2b_1,$$

因而 $(a_1b_3 - a_3b_1)b_2 = 0$. 由于 $b_2 \neq 0$, 得到 $a_1b_3 = a_3b_1$, 即

$$(a_1,b_1)R(a_3,b_3).$$

例 1.3.2 设 n 是正整数. 在整数集 $\mathbb{Z}$ 内定义一个关系 R: 对于 $a, b \in \mathbb{Z}$, 如果 $n|(a-b)$ (即 $a-b$ 被 n 整除), 就称 aRb. 即 aRb 表示: a, b 都被 n 去除, 所得的余数相等. 通常把这个关系叫做以 n 为模的**同余关系**, 并将 aRb 记成 $a \equiv b \pmod n$, 在不致混淆的情况下还可简单地记成 $a \equiv b$. 则同余关系是一个等价关系.