全国高等农林院校"十一五"规划教材

线性代数

Xianxing Daishu

李炜　杨逢建◎主编

中国农业出版社

欢迎登录：全国农业教育教材网
http://www.nongyejiaocai.com

线性代数

Xianxing Daishu

封面设计　姜　欣

ISBN 978-7-109-13784-4
9 787109 137844 >
定价：19.60元

全国高等农林院校“十一五”规划教材

线 性 代 数

李 炜 杨逢建 主编

中 国 农 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/李炜，杨逢建主编．—北京：中国农业出版社，2009.6
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 978-7-109-13784-4

Ⅰ．线…　Ⅱ．①李…②杨…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第049901号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路2号）
（邮政编码100125）
责任编辑　朱　雷　魏明龙

北京中兴印刷有限公司印刷　新华书店北京发行所发行
2009年6月第1版　2009年6月北京第1次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　印张：13
字数：236千字

内 容 提 要

本教材是全国高等农林院校“十一五”规划教材，内容包括线性方程组、矩阵、行列式、向量组的线性相关性、矩阵的特征值与特征向量、方阵的对角化、二次型、线性空间与线性变换以及利用MATLAB软件作线性代数有关计算的方法。本教材可作为高等农林院校线性代数课程教材，也可作为其他院校相关课程的教材或参考书，还可作为科技人员的参考书。

编 写 人 员

主　编　李　炜　杨逢建

编　者（按姓氏笔画排序）

李　炜　李亚兰　陈传勇　陈新明

杨逢建　胡小健

前　　言

线性代数是高校非数学专业的一门重要的基础课程，其主要任务是掌握线性代数中最常用知识，如线性方程组、行列式、矩阵、向量、二次型等，以及如何把一些具体的数学对象抽象为数学结构，如向量空间和欧氏空间等。

本书以矩阵的初等行变换为主线进行论述，突出了行列式在理论上的作用，简化了有关向量线性相关性的理论，介绍了利用计算机求解线性代数问题的方法，适当引进了一些应用性的实例。编写上注意对解题方法和内容的提炼，便于读者自学。通过本书的学习有助于提高读者分析问题的能力，提高读者的数学素养，提高利用数学方法解决实际问题的能力。

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材，作者根据目前国内高校各专业《线性代数教学基本要求》，结合长期从事农林院校线性代数课程教学研究的经验进行编写。全书共分六章，其中第一章由杨逢建编写，第二章由李亚兰编写，第三章由李炜编写，第四章由陈新明编写，第五章由陈传勇编写，第六章由胡小健编写。全书由李炜、杨逢建统稿。本书可作为高等农林院校各专业及其他院校相关专业的线性代数课程教材或教学参考书，也可供相关科技人员参考。

由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正，以便不断改进和完善。

编　者

2009年3月6日

目　录

第一章　线性方程组与矩阵

线性方程组在科学技术、经济管理的各个领域广泛地存在着，它的性质和求解方法是线性代数讨论的基本内容之一．矩阵是线性代数研究的主要对象，它是讨论数组变量的基本工具，在数学的其他分支以及自然科学、社会科学、工程技术等领域都有着广泛的应用．本章利用线性方程组及其同解变形建立矩阵的概念，讨论矩阵的计算方法，并利用矩阵的初等变换建立线性方程组的一般求解方法．

第一节　线性方程组与矩阵

一、线性方程组与矩阵

在中学学过一元一次方程、二元一次方程组、三元一次方程组等，例如，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 = -4 \end{cases} \tag{1}$$

是二元一次方程组；方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ -4x_2 + 21x_3 = 2 \end{cases} \tag{2}$$

是三元一次方程组．

在线性代数中，我们称一次方程组为**线性方程组**．

上面的方程组是初等代数中方程组的常见类型，其特点是方程组含有的未知数的个数与方程的个数相等．对应到实际问题中，是要求系统具有的变量个数和系统满足的条件个数相等．但在一般情形下，一个系统具有的变量个数和满足的条件个数并不一定相等．因此，在表示系统状态的方程组中，方程的个数不一定等于未知数的个数．一般地，由 m 个方程组成的 n 元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3}$$

为书写简便，这种线性方程组可以用一个数表来表示，记为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中 a_{ij} 表示第 i 个方程中未知数 x_j 的系数，b_i 表示第 i 个方程的**位于等式右端的常数项**（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）.

容易看出，当未知数的顺序确定时，线性方程组（3）和数表（4）相互唯一确定.

为讨论方便，我们引入如下定义：

定义 1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij}($i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$) 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列**矩阵**，简称 $m\times n$ 矩阵. 为表示它是一个整体，总是加一个括弧，并用大写黑体字母表示它，记为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

这 $m\times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**元素**，a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素. 一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可简记为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}.$$

在无需说明行数与列数时，也可记作

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}).$$

定义 2 由线性方程组（3）确定的矩阵（4）称为方程组（3）的**增广矩阵**，由未知数系数构成的、不含有常数项的矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$ 称为线性

方程组（3）的**系数矩阵**.

由定义 2 可知，对于确定的未知数顺序，增广矩阵的第 i 行将方程组的第 i 个方程左端的未知数系数和位于等号右端的常数项依次排列（$i=1,2,\cdots,m$），增广矩阵的第 j 列表示未知数 x_j 的系数（$j=1,2,\cdots,n$）.

显然，当未知数及其顺序都确定时，线性方程组和它的增广矩阵是一一对应的.

例 1　写出二元一次方程组（1）的增广矩阵.

解　线性方程组（1）的增广矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -3 & -4\end{pmatrix}.$$

练习　写出三元一次方程组（2）的增广矩阵.

注意：（1）线性方程组的增广矩阵只是比系数矩阵多了常数列；

（2）若方程组中某个方程缺少某个未知数，则应看作此系数为 0，因而在系数矩阵和增广矩阵中的相应位置要写上 0；

（3）同一个未知数的系数在增广矩阵和系数矩阵中一定要列对齐.

定义 3　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数与列数对应相等，且对应的元素也相等，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

二、线性方程组的同解变形与矩阵的初等行变换

考虑线性方程组（2）. 我们知道，求解方程组（2）需要对它作同解变形. 在初等数学中我们已经知道，常见的同解变形方法有如下几种：

（1）交换两个方程的位置；

（2）某个方程两端同时乘以同一个非零常数；

（3）一个方程加上另一个方程的 k 倍.

当线性方程组通过上面的方法作同解变形时，对应的增广矩阵会发生变化. 我们通过求解线性方程组（2）来观察它对应的增广矩阵会发生怎样的变化，由此可以找到一般的变形规律.

我们将线性方程组（2）和它的增广矩阵并列写出来，通过对（2）作同解变形来观察对应的增广矩阵如何变化，从而找到一般的规律.

线性方程组：

$$\begin{cases}2x_1+5x_2-\ \ 4x_3=9,\\ \ \ x_1+2x_2+\ \ \ \ x_3=4,\\ \qquad\ -4x_2+21x_3=2.\end{cases}$$

增广矩阵：

$$\begin{pmatrix}2 & 5 & -4 & 9\\ 1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & -4 & 21 & 2\end{pmatrix}$$

① 第一个方程与第二个方程互换：　　第一行与第二行互换：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ 2x_1+5x_2-4x_3=9, \\ -4x_2+21x_3=2. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -4 & 9 \\ 0 & -4 & 21 & 2 \end{pmatrix}$$

② 第二个方程减第一个方程的 2 倍：　　第二行减第一行的 2 倍：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ x_2-6x_3=1, \\ -4x_2+21x_3=2. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & -4 & 21 & 2 \end{pmatrix}$$

③ 第三个方程加第二个方程的 4 倍：　　第三行加第二行的 4 倍：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ x_2-6x_3=1, \\ -3x_3=6. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

④ 第三个方程两边同乘以$-\frac{1}{3}$：　　第三行乘以$-\frac{1}{3}$：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ x_2-6x_3=1, \\ x_3=-2. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

将 $x_3=-2$ 代入上述方程组的第二式，得 $x_2=-11$，再将 $x_2=-11$，$x_3=-2$ 代入第一式得 $x_1=28$. 由此得原线性方程组的解．但若采用下面的方法，则更具有一般意义．

⑤ 第一个方程减去第三个方程　　第一行减去第三行

第二个方程加第三个方程的 6 倍：　　第二行加第三行的 6 倍：

$$\begin{cases} x_1+2x_2=6, \\ x_2=-11, \\ x_3=-2. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

⑥ 第一个方程减第二个方程的 2 倍：　　第一行减第二行的 2 倍：

$$\begin{cases} x_1=28, \\ x_2=-11, \\ x_3=-2. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

上面左边的式子就是线性方程组（2）的解．由于增广矩阵右端的一列数是方程组的位于右端的常数项，因此，从右边的矩阵可以看出，它也对应地给出了方程组的解．

由此可见：**直接通过增广矩阵的行变换能得到线性方程组的解**．

上述过程中我们仅对增广矩阵作了如下行变换：

（1）交换矩阵的两行；

（2）用一个非零的数 k 乘以矩阵的某一行；

（3）矩阵中某一行加上另一行的 k 倍．

从上面的过程容易看出，这三种行变换分别对应上面用到的方程组的三种同解变形．

定义 4　矩阵的下列三种变换称为矩阵的**初等行变换**：

（1）交换矩阵的两行（交换 i，j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$）；

（2）用一个非零的数 k 乘以矩阵的某一行（第 i 行乘以数 k，记作 kr_i 或 $r_i \times k$）；

（3）矩阵中某一行加上另一行的 k 倍（第 i 行加上第 j 行的 k 倍，记作 $r_i + kr_j$）．

把定义中的“行”换成“列”，即得矩阵的**初等列变换**的定义，但要注意，相应记号中要将“r”换成“c”（r 和 c 分别为行的英文名“row”和列的英文名“column”的缩写）．

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的**初等变换**．

练习　写出矩阵的三种初等列变换的表示法并分别指出其意义．

注意：初等变换的逆变换仍是初等变换，且变换类型相同．

事实上，变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换即其本身；变换 kr_i 的逆变换为 $\frac{1}{k}r_i$；变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j$ 或 $r_i - kr_j$．

定义 5　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价**，记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$（或 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$）．

注：在理论表述或证明中作初等变换时，常用记号“$\sim$”；在对矩阵作初等变换运算的过程中，常用记号“$\to$”．

注意：由定义 3 知，**矩阵作初等变换不能用等号来过渡**．

矩阵之间的等价关系具有下列基本性质：

（1）反身性：$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$；

（2）对称性：若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$；

（3）传递性：若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$.

根据上面的分析，可以看出下面的定理成立：

定理 1　增广矩阵的初等行变换对应于线性方程组的同解变形．

三、利用矩阵的初等行变换求解线性方程组

定义 6　称满足下列条件的矩阵为**行阶梯形矩阵**（或称为**阶梯形矩阵**）：

（1）零行（元素全为零的行）若存在，都位于矩阵的下方；

（2）各非零行的首非零元（从左至右第一个不为零的元素）的列标随着行

标的增大而严格增大.

定义 7 称满足下列条件的行阶梯形矩阵为**行最简形矩阵**:

(1) 各非零行的首非零元都是 1;

(2) 每个首非零元所在列的其余元素都是零.

例 2 在上面分析线性方程组 (2) 的同解变形与增广矩阵变形的关系的过程中，第③步得到的矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

是行阶梯形矩阵，最后一步得到的矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

是行最简形矩阵.

练习 指出下列矩阵中的阶梯形矩阵和行最简形矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

利用初等变换化矩阵为阶梯形和行最简形的方法:

(1) 如果第一列第一个元素为 0，将第一行与其他行交换，使第一列第一个元素不为 0，并且最好这个元素是 1 或 −1 (这样可以避免分数的运算); 或者把某一行 (列) 的整数倍加到第一行 (列) 上去使其第一个元素变为 1 或 −1;

(2) 把第一行分别乘以适当的数加到其他各行，使第一列中第一个元素下面的所有元素全化为 0;

(3) 再用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的部分. 依此做下去，就可以将矩阵化为阶梯形矩阵;

(4) 将阶梯形矩阵化为行最简形.

具体做法见下述例 3～例 6.

由定理 1 和对于线性方程组 (2) 的求解过程分析可以看出，可以按照以下步骤，通过增广矩阵的初等行变换求解线性方程组:

(1) 写出线性方程组的增广矩阵；

(2) 对增广矩阵作初等行变换，化为行最简形；

(3) 根据所得的行最简形，写出原方程组的同解方程组；

(4) 写出方程组的解．

例 3　利用矩阵的初等行变换解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+3y+z=4, \\ x-2y+4z=-5, \\ 3x+8y-z=13, \\ 4x-y+9z=-6. \end{cases}$$

解　对增广矩阵作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 14 & -13 & 28 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{7}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-4r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x=-1, \\ y=2, \\ z=0. \end{cases}$$

它就是原方程组的解．

例 4　利用矩阵的初等行变换解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0. \end{cases}$$

解　这个方程组的常数项全为 0，这种类型的方程组称为**齐次线性方**