何鸿斌　汪方儒　编著

理论力学

大连海运学院出版社

理 论 力 学

何鸿斌　汪方儒　编著

大连海运学院出版社

(辽)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

理论力学/何鸿斌,汪方儒编著.大连:大连海运学院出版社,1994

ISBN 7-5632-0752-X

Ⅰ.理… Ⅱ.①何… ②汪… Ⅲ.理论力学 Ⅳ.031

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 04088 号

大连海运学院出版社出版

(大　连)

大连海运学院出版社印刷厂印刷　　大连海运学院出版社发行

1994 年 3 月第 1 版　　1994 年 3 月第 1 次印刷

开本:850×1168 毫米 1/32　印张:12.5

字数:313 千　　印数:0001～1500

定价:7.80 元

序 言

正如我们在《理论物理初级教程》一书中所指出的那样，理论物理是高等师范院校物理专业的重要基础课程之一。多年来，高等师范院校的理论物理课的教材，大多采用适于综合性大学物理系教学的教科书。至今，适用于师范院校的理论物理教材尚不多见。形势迫使我们把理论物理教材改革放到重要地位。我们在教材改革中坚持三点：一是教材要适应增养目标，体现师范特点；二是着力突出课程的基本概念、基本规律和整体结构，坚持少而精；三是针对学生现状，贯彻因材施教。为此，我们将理论物理划分为初、中、高三个层次，有针对性地组织教学。已出版的《理论物理初级教程》（喻身启、王爱仁、何鸿斌、陆博翘编著）为第一层次的教材，书中汇集了电动力学、量子力学、热力学与统计物理学的最基本概念、定理定律、简单的计算，给出课程的基本框架，减少过多的推算和艰深的内容，作为本科的必修课本。第二层次为《理论物理教程》，已出版了量子力学部分（汪方儒、何鸿斌编著），选取较高层次的内容，提供本科生选修课教材。第三层次为《理论物理高级教程》，作为物理系各专业方向的研究生的共同理论课，内容包括高等量子力学、量子场论等最基本的知识和基础理论。

同样，理论力学也是物理系的重要基础课程。近年来，根据我们对毕业生的跟踪调查及教学实践表明，理论力学也必须像改革理论物理其他课程一样，加大改革力度，从师范院校的实际出发，紧密结合师范教育特点，编写出适应师范教育的教材，从而提高理论力学教学水平。为此，在本书的编写过程中，我们力求体现师范性，照顾学生的基础；突出物理的思想方法，注重理论与实践相结

合;力图作到科学规律与教学规律的统一性,突出重点,分散难点;尽量反映物理学科前沿的成果和研究方法,为学生进一步学习理论物理其他课程奠定基础。为了提高学生自学能力、独立思考能力和解决实际问题的能力,书中编入了若干例题和思考题,每章末均选编了大量的习题。

《理论力学》编写过程中,我们参阅了国内外的一些著作、文献和兄弟院校的同类教材,在此谨致谢意。

由于我们的水平所限,本书中出现的缺点和错误在所难免,诚望专家及读者批评指正。

编 者

1994 年 3 月于辽宁师范大学

目　录

第一章　质点力学

质点力学包括质点运动学与质点动力学。质点运动学是研究质点相对于所选定的参考系的运动，即掌握描述质点运动的运动学量：运动学方程、轨道、速度及加速度等。质点动力学的核心是牛顿定律所给出的质点运动微分方程。

由质点运动微分方程出发推演出三个动力学基本定理及相应的守恒定律，是解决质点动力学问题的有效工具。

有心力问题是力学中的一个典型问题，又是现代十分活跃的领域。

A. 质点运动学

§1.1　质点的运动学方程

(1) 参考系与坐标系

本章研究的对象是抽象化模型 — **质点**。为研究质点的机械运动即位置移动，首先应确定一个质点相对某参考物的位置，这个参考物称为**参考系**。今后研究物体在空间的位置及位置变化，都是指相对于特定的参考系而言。对不同的参考系，物体的轨道不同，速度也不同。

参考系确定以后，为定量地决定物体在空间的相对位置，还必须在其中设置**坐标系**，常用的有**直角坐标系**、**柱坐标系**、**球坐标系**和**自然坐标系**。在平面问题中，则用直角坐标系、平面极坐标及自然坐标系。

(2) 质点的运动学方程

可以在空间自由运动的质点称为自由质点。设在某参考系中，

确定一个自由质点 p 的空间位置可由引自原点 o 至质点 p 的矢量 $\boldsymbol{r}$(即 p 点对原点 o 的**位矢**)决定：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1.1-1}$$

它是时间 t 的函数。(1.1-1) 式给出了质点在空间中任一时刻 t 的位置，它表达了质点的运动规律，通常称它为质点的**运动学方程**。如果知道了质点运动学方程，借助数学工具，即可掌握质点的轨道，任一时刻 t 的速度与加速度。因此，运动学方程给出了质点运动的全部信息(经典质点的**状态函数**)。

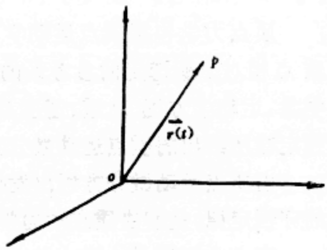


图 1.1

运动学方程通常用坐标法与自然法表示：

直角坐标系(如图 1.2)

$$\boldsymbol{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

其中 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 为沿 x, y, z 轴的正向的单位矢，$x\hat{i}$，$y\hat{i}$，$z\hat{k}$ 称为分矢量。

坐标法：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1.1-2}$$

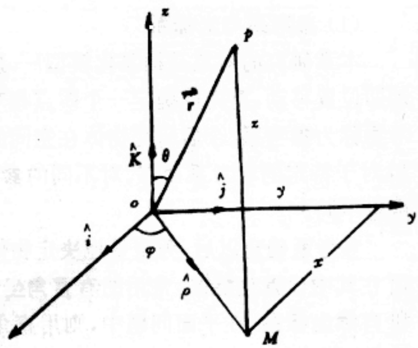


图 1.2

即质点 p 的位置由三个独

立变量决定，它们都是时间 t 的函数。$x(t)$ 称为**坐标**(**分量**)。当 $\hat{i}$ 一定，分矢量 $x\hat{i}$ 的方向由 x 决定：当 $x>0$ 时表示分矢量的方向与 $\hat{i}$ 相同，当 $x<0$ 时表示分矢量的方向与 $\hat{i}$ 相反。坐标(分量)是代数量。这样，**当单位矢 $\hat{i}$ 取定后，分矢量的方向则由分量的正负来表达**。

柱坐标系(图 1.2)

$$\boldsymbol{r}=\rho\hat{\rho}+z\hat{k}$$

坐标法表示

$$\begin{cases}\rho=\rho(t)\\ \varphi=\varphi(t)\\ z=z(t)\end{cases}\tag{1.1-3}$$

ρ 是算术量，φ，z 是代数量。

球坐标系

$$\boldsymbol{r}=r\hat{r}$$

坐标法表示

$$\begin{cases}r=r(t)\\ \theta=\theta(t)\\ \varphi=\varphi(t)\end{cases}\tag{1.1-4}$$

r 是算术量，θ，φ 是代数量。$\hat{r}$ 是沿矢径的单位矢，显然其方向是随时间 t 变化的。

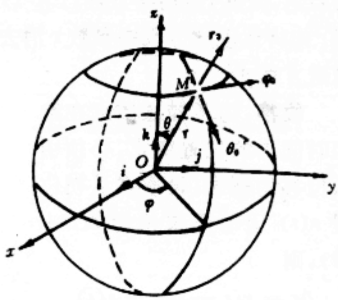


图 1.3

平面极坐标

$$\boldsymbol{r}=r\hat{r}$$

坐标法表示

$$\begin{cases}r=r(t)\\ \theta=\theta(t)\end{cases}\tag{1.1-5}$$

自然坐标系

如果质点的轨道已知，可用自然坐标描述。在质点的已知轨道上任意选取一点 o，作为弧坐标 s 的原点，并规定弧坐标的正方向（如图 1.5），则 s 的大小等于原点到质点处的弧长，s 的正负决定质点 p 位于原点 o 的正负侧。在自然坐标中，其运动学方程

$$S = s(t) \qquad (1.1\text{-}6)$$

通过弧坐标 s 与时间 t 的函数关系来确定质点在任一时刻的空间位置并描述质点随时间的变化规律。

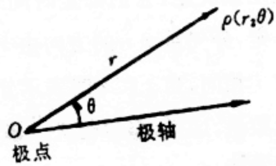


图 1.4

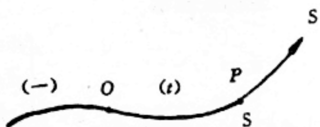


图 1.5

质点的轨道：运动质点在空间所占据的点绘成的曲线，即质点的轨道。因此，运动学方程(1.1-1) — (1.1-6) 便是轨道的参数方程。如将运动学方程中参数 t 消去，则得诸坐标之间的关系式，即轨道方程式。

位移：为了描述质点在给定时间内的位置变化，必须引入位移的概念。设质点从初位置 $\boldsymbol{r}(t)$ 运动至末位置 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$，则

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$$

叫做质点在**此给定时间 Δt 内的位移**，其方向由起点指向末点，它满足平行四边形法则。

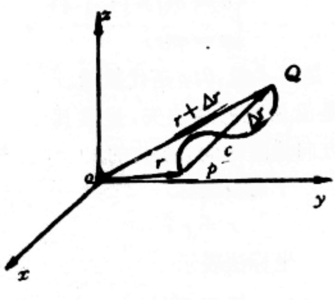


图 1.6

质点在 Δt 内位置变化的快慢和方向，通过位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 和它所对应的时间 Δt 来表征。下面讨论

的速度是矢量，也源于位移矢量。

§1.2　速度

（1）**速度定义**

设某时刻 t 质点通过轨迹上的 p 点，经过时间 Δt 后，质点运动至 Q 点，质点的位移为 $\Delta \boldsymbol{r}$，则时刻 t 的**瞬时速度**（简称**速度**）

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} \qquad (1.2\text{-}1)$$

因 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是矢量，故 $\boldsymbol{v}$ 是矢量。瞬时速度的方向，则和轨迹上 p 点的切线方向一致（割线的极限位置）。

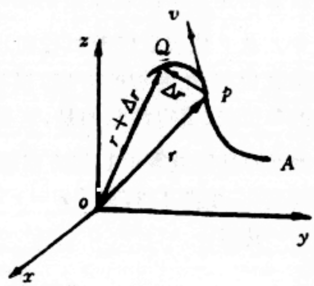


图 1.7

（2）**直角坐标系**

设 $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ 分别表示 x,y,z 轴上的单位矢，且是常矢量，已知

$$\boldsymbol{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

速度　$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{i} + \dot{z}\,\hat{k}$$

$$= \boldsymbol{v}_x\hat{i} + \boldsymbol{v}_y\hat{j} + \boldsymbol{v}_z\hat{x} \qquad (1.2\text{-}2)$$

分量形式　$$\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \qquad (1.2\text{-}3)$$

分量 $(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ 均为代数量，其正负号意义与（1.1-2）式讨论相同，即 $\dot{x} > 0$ 代表沿 $\hat{i}$ 正向，$\dot{x} < 0$ 代表沿 $\hat{i}$ 负向。

$$\boldsymbol{v}\begin{cases} \text{大小} \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ \text{方向} \quad (\text{co}\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \end{cases} \qquad (1.2\text{-}4)$$

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{v},\ \cos\beta = \frac{\dot{y}}{v},\ \cos\gamma = \frac{\dot{z}}{v}$$

（3）**平面极坐标**

在平面极坐标系中，质点 p 的位置可用极坐标 (r,θ) 表示（如图 1.8）。当质点沿曲线 c 运动时，质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 沿着轨道的切线。令 $\hat{r}$ 及 $\hat{\theta}$ 代表沿位矢 $\boldsymbol{r}$（径向）及垂直位矢（θ 增加的方向，横向）的单位矢。值得注意的是，这里 $\hat{r}$ 及 $\hat{\theta}$ 的量值虽等于1，但方向随时间变化。由图 1.8，有 $\boldsymbol{r} = r\hat{r}$

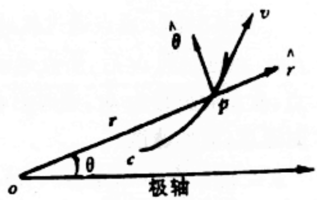


图 1.8

速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.2-5}$$

由此可见，如果用对 $\boldsymbol{r} = r(t)$ 直接求导的方法得出平面极坐标系中的速度公式，关键是对**动单位矢**的求导。

现在对动单位矢 $\hat{r}$ 求导，即求$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}$。从图 1.9 看出，$\hat{r}$ 的方向随 θ 而变，即

$$\hat{r} = \hat{r}(\theta)$$

求导 $$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}$$

考察矢量 $\mathrm{d}\hat{r}$ 的方向（见图 1.9）。因为 $\hat{r}\cdot\hat{r} = 1$，则 $\hat{r}\cdot\mathrm{d}\hat{r} = 0$，故 $\mathrm{d}\hat{r}\perp\hat{r}$，且沿横向。而 $|\mathrm{d}\hat{r}|$ 的量值则为 $|\mathrm{d}\hat{r}| = 1\times\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta$；同理，$\mathrm{d}\hat{\theta}\perp\hat{\theta}$ 且沿 $\hat{r}$ 的方向，$|\mathrm{d}\hat{\theta}| = 1\times\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta$。故有

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = \hat{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\hat{r} \tag{1.2-6}$$

这套算法应掌握。

将(1.2-6)式代入(1.2-5)式中,得

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (1.2\text{-}7)$$

分量形式

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \text{(径向分量)} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \text{(横向分量)} \end{cases} \quad (1.2\text{-}8)$$

$\dot{r}$ 及 $r\dot{\theta}$ 是代数量。

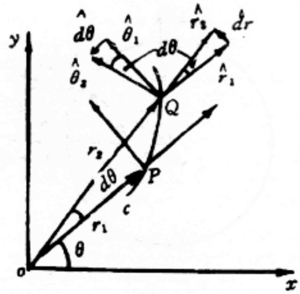


图 1.9

(4) **柱坐标**

由图 1.2 有

$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$$

$\hat{\rho}$ 代表位于平面 xoy 内沿 $\hat{\rho}$ 的单位矢,显然 $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\varphi)$,同理有

速度 $$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t} + \dot{z}\hat{k}$$

$$= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{z}\hat{k} \quad (1.2\text{-}9)$$

分量形式

$$\begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} \\ v_\varphi = \rho\dot{\varphi} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \quad (1.2\text{-}10)$$

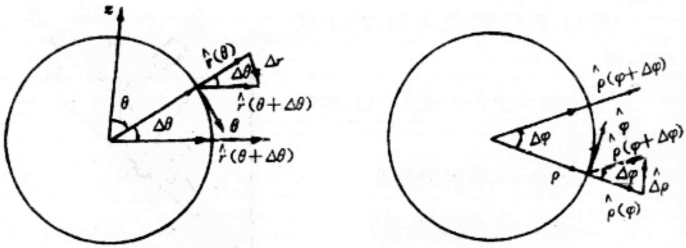
(5) **球坐标系**

在球坐标系中 $\boldsymbol{r} = r\hat{r}$

速度 $$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} \quad (1.2\text{-}11)$$

由图 1.3 可以看出,$\hat{r}$ 的方向随 θ,φ 而变,即 $\hat{r} = \hat{r}(\theta,\varphi)$

于是 $$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi}\dot{\varphi} \quad (1)$$



(a) (b)

图 1.10

先求$\dfrac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}$(见图 1.10(a)),对 θ 求偏导数意味着 φ 角保持不变,则单位矢 $\hat{r}$ 的矢端沿着半径为 1 的球面上某经圈运动。

$$\therefore \qquad \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{\theta} \tag{2}$$

再求$\dfrac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi}$(见图 1.10(b)),对 φ 求偏导数而 θ 角保持不变,则 $\hat{r}$ 矢端沿半径为 1 的球面上某纬圈运动,纬圈半径 $= 1 \times \sin\theta$,圆心角 $\Delta\varphi$,故

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi} = \sin\theta\hat{\varphi} \tag{3}$$

将(1)、(2)、(3) 代入(1.2-11) 式,有

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\sin\theta\hat{\varphi} \tag{1.2-12}$$

分量形式

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\theta \end{cases} \tag{1.2-13}$$

§1.3 加速度

质点在运动过程中，速度 $\boldsymbol{v}$ 是时间 t 的函数 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$。定义**瞬时加速度**

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{1.3-1}$$

(1) **直角坐标系**

由 $\boldsymbol{v}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}$

有

$$\boldsymbol{a}=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}+\ddot{z}\hat{k} \tag{1.3-2}$$

分量形式

$$\begin{cases} a_x=\ddot{x} \\ a_y=\ddot{y} \\ a_z=\ddot{z} \end{cases} \tag{1.3-3}$$

分量 $\ddot{x}>0$ 表明沿 $\hat{i}$ 正向，不能理解为加速；$\ddot{x}<0$ 表明沿 $\hat{i}$ 负向，不能理解为减速。

(2) **平面极坐标**

从(1.2-7)式对时间 t 求导，有

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\ddot{r}\hat{\boldsymbol{r}}+\dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}+\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}+r\ddot{\theta}\hat{\theta}+r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}$$

根据 $\hat{r}=\hat{r}(\theta)$，$\hat{\theta}=\hat{\theta}(\theta)$；利用关系式

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=\dot{\theta}\hat{\theta},\qquad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=-\dot{\theta}\hat{r}$$

代入上式并整理

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\hat{\theta} \tag{1.3-4}$$

分量形式