GAOZHI GAOZHUAN CAIJINGLEI XILIE JIAOCAI
高职高专财经类系列教材

经济应用数学
——微积分

Jingji Yingyong Shuxue
——Weijifen

贾俊礼 主编

重庆大学出版社

高职高专财经类系列教材

经济应用数学
——微积分

Jingji Yingyong Shuxue
——Wei Ji Fen

贾俊礼\主　编
王振吉　封　梅\副主编

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是高职高专经常管理类系列教材《经济应用数学》的第一分册，内容共分 6 章，包括函数 极限与连接、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、二元函数微分学，每章均有学习目标和小结，并配有丰富的例题，各章后面另有适量的习题供大家练习（书末附有答案）。

本书结构清晰、内容精练、通俗易懂，富有应用性，并力求启发性和趣味性，本书可作为高职高专院校、民办高校和成人高校经济类、管理类及相关专业的教材，也可供具有一定数学基础的人员自学或从事经济管理等相关工作的人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学——微积分/贾俊礼主编．—重庆：重庆大学出版社，2004.7
（高职高专财经类系列教材）
ISBN 7-5624-3169-8

Ⅰ.经... Ⅱ.贾... Ⅲ.微积分—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 054723 号

经济应用数学——微积分
贾俊礼 主编
王振吉 封梅 副主编
责任编辑：梁 涛　　版式设计：梁 涛
责任校对：任卓惠　　责任印制：秦 梅
*
重庆大学出版社出版发行
出版人：张鸽盛
社址：重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学（A 区）内
邮编：400030
电话：(023) 65102378 65105781
传真：(023) 65103686 65105565
网址：http://www.cqup.com.cn
邮箱：fxk@cqup.com.cn（市场营销部）
全国新华书店经销
四川外语学院印刷厂印刷
*
开本：787×960 1/16 印张：11.25 字数：202 千
2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月第 1 次印刷
印数：1—5 000
ISBN 7-5624-3169-8/O・226 定价：15.00 元

QIANYAN

前言

当今世界,各行各业不同工作岗位上的技术在不断地数学化.数学已不仅是一门科学、文化,还是一门技术.本书是为适应新时期高职高专院校经济类、管理类专业学生技能培养和文化素质教育的需要而编写的,书中凝结了作者多年来讲授经济数学课程的经验和体会,并在编写过程中着重注意了以下几方面的问题:

第一,注意到"经济应用数学"是高职高专院校经济类、管理类专业学生的一门重要的基础课.按照教学大纲和课程标准的要求,本分册比较完整地介绍了一元函数微积分的基础知识并简单介绍了二元函数微分学的基础知识.其主要目的是培养学生的基本数学能力:运算能力、抽象概括能力、逻辑推理能力、空间想像能力、将实际问题转化为数学问题的能力以及自学能力等.

第二,注意到高职高专院校经济类、管理类学生的数学基础都较为薄弱.本书内容始终贯彻循序渐进、由浅入深、通俗易懂的原则,删除了绝大部分理论证明,代之以思想方法的介绍.这样做不仅使教材更为简明,而且还使学生不会由于数学基础的不足而产生畏难情绪.本分册结构合理紧凑、语言简洁流畅便于学生自学.

第三,注意到"理论够用为度,着重实际操作和应用性"的原则.本书不追求理论体系的完整性,尽可能地

做到以方法的阐述和实际操作为主线带动理论阐释,重在使学生掌握最基本的理论和实用方法;另外,本书还选入了相当数量的具有使用价值的例题和习题,使学生真正体会到数学在现实生活和工作中是如何应用的,以激发学生学习数学的热情和兴趣,提高学生的实际运用能力.

第四,对于重要的或难于理解的概念,尽可能由实例引入,以使学生对概念理解得深、理解得透,或使概念易于理解;对于重要的方法及时进行归纳总结,给出解题步骤;每章选入的丰富而难度适中的例题和习题将帮助学生更好地掌握知识提高能力;尤其是每章颇具特色的小结,决不是知识点的简单罗列,它将使学生在每一章学完后,不仅知识更系统,还会使学生受它的启发而有新的收获.

第五,本书毕竟是一本数学教材,所以不失一般教材的科学性,具有较强的逻辑性,以及相对的严谨性.

我们希望通过对本教材的学习,学生能够获得他们未来学习、生活和工作所需的数学知识、数学技能以及数学的一些思想方法:如掌握极限的思想方法,掌握导数的概念、运算及简单应用,掌握定积分的微元法并用它来解决简单实际问题.果真如此,我们将颇感欣慰.当然我们还有更高的希望,就像在大海边漫步,沐着海风,听者涛声,看着海天一色,我们心旷神怡……突然我们发现了一只漂亮的贝壳——如果大家感到数学有趣味,能体会到其中蕴含的丰富的美,并进而从中获得如下的数学品格:正直、勇敢和坚韧不拔,那么我们将因为发现这串串珍珠而心满意足.

本分册参考学时为78学时.教师可以根据实际需要进行内容取舍,不必求全.

本分册由河北工业职业技术学院贾俊礼(第14章)、河北化工医药职业技术学院王振吉(第2,3章)和封梅(第3,6章)、河北工业职业技术学院宋从芝(第4,5章)编写,全书由贾俊礼、王振吉统稿。

在编写过程中,杜贻举、杨丽蓉提出了许多很好的建议。

在本分册编写中所参考的文献均列于书后,在此向参考文献的各位作者表示衷心的感谢.同时,向为本书的出版付出辛勤劳动的重庆大学出版社,向给予支持和帮助的河北工业职业技术学院、河北化工医药职业技术学院、贵州黔东南州民族职业技术学院领导和同志们表示由衷的谢意.

由于时间仓促,更由于水平有限,书中肯定存在不少缺点和错误,恳请读者批评指正.

编 者

2004 年 12 月

MULU

目录

MULU

第1章
函数 极限与连续

【学习目标】

1）理解函数、反函数、分段函数、复合函数、初等函数等概念；

2）了解函数的特性，了解需求函数、供给函数、总成本函数等常用经济函数；

3）掌握函数定义域的求法，复合函数的复合过程，会建立较简单的实际问题的函数关系；

4）理解函数极限、无穷小、无穷大等概念；

5）熟练掌握极限的四则运算法则，两个重要极限以及求极限的主要方法；

6）理解函数在某点连续及区间连续的概念，了解闭区间上连续函数的性质、初等函数是定义域上的连续函数；

7）熟练掌握函数在某点连续性的判定方法.

微积分是在实数范围内，以函数为主要研究对象，极限是微积分的重要基本概念之一，微积分学中的许多概念是用极限表述的．本章首先复习和加深函数相关知识，然后将主要讨论函数的极限以及函数的连续性．

1.1 函　数

1.1.1 函数概念

(1)函数的定义

定义 1.1 设有两个变量 x 和 y，当变量 x 在非空实数集 D 内取某一数值时，如果变量 y 依照某种法则 f，有确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$．x 叫做自变量，y 叫做函数或因变量，数集 D 叫做函数的定义域，当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值的全体组成的数集 M 叫做函数的值域.

如果对于 D 中的每个 x 的取值，y 有惟一确定的值与之对应，称这样的函数为单值函数；如果对于 D 中的每个 x 的取值，y 有两个或两个以上不同的值与之对应，称这样的函数为多值函数. 我们主要讨论单值函数.

在函数定义 1.1 中，并未要求自变量变化时函数值一定要变. 比如 $y = c$（c 为常数），当 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 内取任一值时，y 都有确定的值 c 与之对应. 符合函数定义，称这样的函数为常函数.

由函数定义 1.1 可以看出，函数的定义域和对应法则是函数的两个要素，当它们的定义域和对应法则至少有一个不同时，这两个函数就是不同的. 例如，函数 $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ 与 $y = x + 2$ 的定义域不同，它们是不同的函数；而函数 $y = |x|$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域和对应法则都相同，它们是相同的函数.

(2) 函数定义域的确定

在研究函数时，一定要考虑它的定义域，函数的定义域是使函数有意义的自变量的取值范围．以下分两种情况来讨论函数定义域的确定方法.

对于用数学式子给出的函数，x 的取值范围必须使数学式子有意义. 为此要求：

1）分母不能为零；

2）偶次根号下非负；

3）对数的真数为正；

4）正切符号下的式子不等于 $k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in z$；

5）余切符号下的式子不等于 $k\pi, k \in z$；

6）反正弦、反余弦符号下式子的绝对值小于等于 1；

7）如果函数式中含有根式、分式、对数式、反三角函数式等，则取各部分定义域的交集.

例 1.1　求下列函数的定义域：

1）$y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$；　　　2）$y = \ln(x^2 - x - 2)$；

3）$y = \arcsin \frac{2x-1}{3}$.

解　1）在函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ 中，因为

$$\begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x \geqslant -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

所以函数的定义域为 $[-1,2) \cup (2 + \infty)$.

2）在函数 $y = \ln(x^2 - x - 2)$ 中，因为

$$(x^2 - x - 2) > 0$$

即
$$(x+1)(x-2) > 0$$

解得
$$x < -1 \text{ 或 } x > 2$$

所以函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

3）在函数 $y = \arcsin \frac{2x-1}{3}$ 中，因为

$$-1 \leqslant \frac{2x-1}{3} \leqslant 1$$

即 $-2 \leqslant 2x \leqslant 4$

解得 $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

所以函数的定义域为 $[-1,2]$.

例 1.2　已知函数 $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$　求 $f(-2), f(a^2)$.

解 $f(-2)=-2-2=-4, f(a^2)=(a^2)^2+1=a^4+1$

对于由实际问题得到的函数,其定义域需要由问题本身的意义来确定.

例 1.3 将直径为 d 的圆木料锯成截面为矩形的木料(图 1.1),求矩形截面两条边之间的函数关系和定义域.

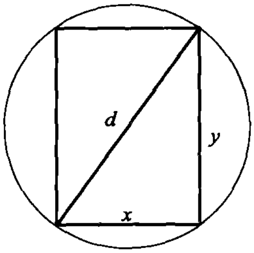

图 1.1

解 设矩形截面的两条边长分别为 x,y,由

$$x^2+y^2=d^2$$

解得 $y=\pm\sqrt{d^2-x^2}$

根据该问题本身的意义可知,两条边长之间的函数关系为

$$y=\sqrt{d^2-x^2}$$

它的定义域为$(0,d)$.

例 1.4 某化肥厂现有尿素 1 500 t,每吨定价为 1 200 元,总销售量不超过1 000 t时,按原定价出售,超过 1 000 t 时,超过部分打 9 折出售,求销售总收入与总销售量的函数关系并指出定义域.

解 设销售总收入为 y 元,销售总量为 x 吨,依题意可得

$$y=\begin{cases}1\,200x, & 0<x\leqslant 1\,000\\ 1\,200\times 1\,000+1\,200\times 0.9\times(x-1\,000), & 1\,000<x\leqslant 1\,500\end{cases}$$

它的定义域为$(0,1\,500]$.

自变量在不同范围内取值时用不同式子表示的函数,称为分段函数.求分段函数的函数值时,应把自变量的值代入相应取值范围的表达式进行计算.

(3)函数的几种特性

1)函数的奇偶性

定义 1.2 设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称,如果对于任一$x\in D$,恒有$f(-x)=f(x)$,则称$f(x)$为偶函数;如果对于任一$x\in D$,恒有$f(-x)=-f(x)$,则称$f(x)$为奇函数.

例如,函数 $y=x^2, y=\cos x$ 是偶函数,$y=\dfrac{1}{x}, y=\tan x$ 是奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称(图 1.2);奇函数的图像关于原点对称(图 1.3).

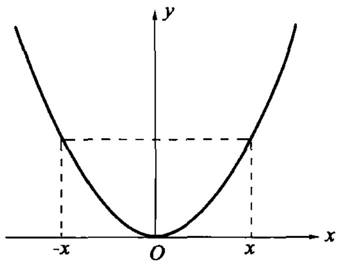

图 1.2

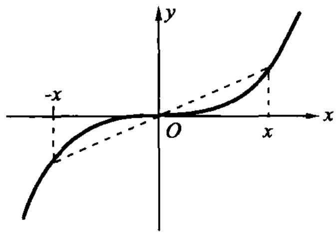

图 1.3

例 1.5　判断函数 $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$ 的奇偶性.

解　因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-a^x}{2}=-f(x)$，所以该函数是奇函数.

2）函数的单调性

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加，(a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的单调增加区间；如果当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调减少，(a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的单调减少区间.

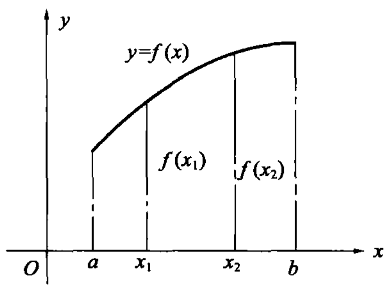

图 1.4

在区间 (a,b) 内单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，(a,b) 叫做这个函数的单调区间.

例如，函数 $y=2^x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加；函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少.

单调增加函数的图像沿 x 轴正向而上升（图 1.4），单调减少函数的图像沿 x 轴正向而下降（图 1.5）.

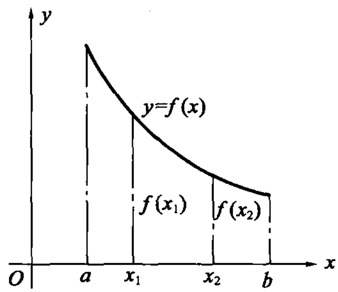

图 1.5

例 1.6　证明$f(x)=x^2$在$(0,+\infty)$内单调增加;在$(-\infty,0)$内单调减少.

证明　在$(0,+\infty)$内任取两点x_1,x_2并且设$x_1<x_2$.因为

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2}=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$$

又

$$x_1>0,x_2>0,x_1<x_2$$

所以

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0$$

于是$f(x)=x^2$在$(0,+\infty)$内单调增加.

类似的方法可以证明$f(x)=x^2$在$(-\infty,0)$内单调减少.

用单调性的定义确定函数的单调区间一般比较困难,更有效的判断方法将在第3章中介绍.

3）函数的周期性

定义 1.4　设函数$f(x)$的定义域为D,如果存在一个不为零的常数T,使得对于任一$x\in D$,恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立,则称$f(x)$为周期函数.T称为$f(x)$的周期.若在周期函数的所有周期中存在一个最小正数T,则该最小正数T称为周期函数的最小正周期.通常所说的周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数$y=\sin x$和$y=\cos x$是以2π为周期的函数;函数$y=\tan x$和$y=\cot x$是以π为周期的函数.

周期函数图形的特点是自变量每增加或减少距离T后,图形重复出现.

4）函数的有界性

定义 1.5　设函数$f(x)$在实数集D内有定义,如果存在一个正数M,使得对于任一$x\in D$,恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数$f(x)$在D内有界.如果这样的M不存在,就称函数$f(x)$在D内

无界.

例如,函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的,函数 $y = \arctan x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的;而函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界,$y = \tan x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内无界.

如果函数在 D 内有界,其图像在 D 上必介于两平行线 $y = \pm M$ 之间.

(4) 反函数

设某种商品销售总收入为 y,销售量为 x,该商品的单价为 p,则收入 y 是 x 的函数 $y = px$,这时 x 是自变量,y 是函数. 若已知收入 y,反过来求销售量 x,则 $x = \frac{y}{p}$,这时 y 是自变量,x 变为 y 的函数了.

称后一个函数 $x = \frac{y}{p}$ 是前一个函数 $y = px$ 的反函数,或者说它们互为反函数.

定义 1.6　设 $y = f(x)$ 是 x 的函数,其定义域为 D,值域为 M,如果对于 M 中的每一个值 y 都可以从关系式 $y = f(x)$ 确定惟一的 x 与之对应,则得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量的函数,称它为 $y = f(x)$ 的反函数,记作 $x = f^{-1}(y)$,其定义域为 M,值域为 D,并称 $y = f(x)$ 为直接函数.

当然,也可以说 $x = f^{-1}(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数. 就是说,它们互为反函数. 显然,由定义 1.6 可知单调函数一定有反函数. 习惯上总是用 x 表示自变量,用 y 表示函数,所以通常把 $x = f^{-1}(y)$ 改写为 $y = f^{-1}(x)$. 从上面的定义易知,求反函数分两步:第一步,从 $y = f(x)$ 解出 $x = f^{-1}(y)$;第二步,交换字母 x 和 y.

例 1.7　求 $y = 4x - 1$ 的反函数.

解　由 $y = 4x - 1$ 得 $x = \frac{y+1}{4}$,然后交换字母 x 和 y,得 $y = \frac{x+1}{4}$,即 $y = \frac{x+1}{4}$ 是 $y = 4x - 1$ 的反函数.

可以证明,在同一坐标系下,横、纵坐标单位一致的情况下,函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

1.1.2　初等函数

(1) 基本初等函数

常函数　　　　$y = c$(c 为常数)

幂函数	$y = x^{\alpha}$(α 是常数)
指数函数	$y = a^{x}$(a 是常数,$a > 0, a \neq 1$)
对数函数	$y = \log_a{}^x$(a 是常数,$a > 0, a \neq 1$)
三角函数	$y = \sin x,\ y = \cos x$
	$y = \tan x,\ y = \cot x$
	$y = \sec x,\ y = \csc x$
反三角函数	$y = \arcsin x,\ y = \arccos x$
	$y = \arctan x,\ y = \mathrm{arccot} x$

统称为基本初等函数.

基本初等函数的定义域、值域、图像和性质见表附录Ⅰ.

(2) **复合函数、初等函数**

先看一个例子. 设 $y = \dfrac{1}{u}$,而 $u = x^2 - 2x - 3$,以($x^2 - 2x - 3$) 代替第一式的 u,得

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$$

此时,称函数 $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$ 是由 $y = \dfrac{1}{u}$ 与 $u = x^2 - 2x - 3$ 复合而成的复合函数.

定义 1.7 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$;而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$. 如果函数 $u = \varphi(x)$ 的函数值的全部或部分能使函数 $y = f(u)$ 有意义,那么 y 就是 x 的函数. 这个函数叫做由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记为

$$y = f[\varphi(x)]$$

其中 u 叫做中间变量.

例如,函数 $y = \lg(x+1)$ 是由 $y = \lg u$ 与 $u = x + 1$ 复合而成的函数。

例 1.8 指出下列各复合函数的复合过程:

1) $y = e^{\sqrt{x}}$;　　2) $y = \ln(\sin x^5)$;　　3) $y = 2\sin\sqrt{1 - x^2}$.

解 1) $y = e^{\sqrt{x}}$ 是由 $y = e^u$, $u = \sqrt{x}$ 复合而成.

2) $y = \ln(\sin x^5)$ 是由 $y = \ln u, u = \sin v$, $v = x^5$ 复合而成.

3) $y = 2\sin\sqrt{1 - x^2}$ 是由 $y = 2\sin u$, $u = \sqrt{v}, v = 1 - x^2$ 复合而成.

必须注意,不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如,$y = \arcsin u$ 与 $u = 2 + x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为对于 $u = 2 + x^2$ 的定

义域$(-\infty,+\infty)$中任何x值所对应的u值都大于或等于2,它们都不能使$y=\arcsin u$有意义;复合函数的中间变量可以不止一个,如例1.8中的2)和3).

由基本初等函数经过有限次四则运算、有限次的复合步骤所构成的,并能用一个式子表示的函数叫做初等函数.例如

$$y=x\sin x \qquad y=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$$

$$y=x\sin x+\operatorname{arccot}x-\frac{x^2}{x+1},y=\ln\tan\frac{x}{2},$$

$$y=\arcsin(2^x-x^2)+x\cos x-\ln(5x)$$

等都是初等函数.而函数

$$y=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,y=\begin{cases}x-1 & x<0\\ x+1 & x\geqslant 0\end{cases},y=x^x,$$等为非初等函数.

1.1.3　常用经济函数

(1) 需求函数与供给函数

1) 需求函数

"需求"指在一定价格条件下,消费者愿意购买并且有支付能力购买的商品量.

一种商品的市场需求量与该商品的价格密切相关.商品价格是影响需求的一个主要因素,但还有许多其他因素,如消费者收入的增减,其他代用品的价格等都会影响需求.如果不考虑其他因素对需求的影响,只研究需求与价格的关系.

设P表示商品的价格,Q表示需求量,那么有$Q=f(P)$(P为自变量,Q为因变量)称为需求函数.需求函数是价格P的一元函数.

通常商品价格低,需求大;商品价格高,需求小.因此一般需求函数$Q=f(P)$是P的单调减函数.

因为$Q=f(P)$单调减少,所以有反函数$P=f^{-1}(Q)$(P为自变量,Q为因变量)为价格函数,它也反映商品与价格的关系,也称为需求函数.

根据市场统计资料,常见的需求函数有以下几种类型:

线性需求函数　$Q=b-aP$　$(a>0,b>0)$

二次需求函数　$Q=a-bP-cP^2$　$(a>0,b>0,c>0)$

指数需求函数　$Q=ae^{-bP}$　$(a>0,b>0)$

2) 供给函数