中学数学复习资料

中 册

《中学数学复习资料》编写组编

一九七八年元月

几　何　部　分

第一章　直线形

数学以现实世界的空间形式和数量关系，也就是形和数，作为它自己的研究对象．形和数两者之间形成了既互相对立又互相统一的辩证关系．中学代数讲的主要内容是数的概念及其推广，而几何则着重于形的概念及其性质的研究．因此中学几何（包括平面几何和立体几何）的主要内容是应用逻辑推理的方法研究几何图形的性质．与此同时，也应用代数方法对一些几何量及其数量关系进行计算和定量的分析．

平面几何的研究对象是在同一平面内的几何图形，主要内容包括直线形和圆．直线形中又包括线段、射线、角、三角形、多边形等．本章的主要内容是复习直线形的重要概念和基本性质，其中包括重要公理和定理，并在此基础上列举一定数量的例题和复习思考题，作为复习时的参考．

一、简单直线形概述

1．基本概念

点和直线是平面几何的基本元素，通常是不予定义的，因此把它们叫做基本概念．除此以外的概念，都是给以定义的．

直线的基本性质用公理叙述，就是

公理 1　过两点可以引一条直线而且只能引一条直线．或者说，两点决定一直线．

线段、射线和直线三个概念，既有区别，又有联系．其区

别是线段有两个端点，射线只有一个端点，直线没有端点．线段和射线都是直线的一部分，则是它们之间的联系．线段有以下重要性质：

公理 2　在连接两点的线中，线段最短．

角这个概念有两种定义方式："由一点引出两条射线所组成的图形，叫角，""一射线绕它的端点旋转到任一位置所得到的图形，叫角."前一定义是基本的，但它是从静止的观点予以定义的，后者是从运动的观点给予定义的．

2．角的分类

两边互为反向延长线的角，叫平角．平角的一半，叫直角．小于直角（大于 0）的角叫锐角，大于直角而小于平角的角，叫钝角．射线绕端点旋转一周所成的角，叫周角．

3．两角的关系

如果　$\angle 1+\angle 2=90°$，那末 $\angle 1$、$\angle 2$ 叫做互为余角．

如果 $\angle 1+\angle 2=180°$，那末 $\angle 1$，$\angle 2$ 叫做互为补角．

重要性质：1．同角（等角）的余角相等．

2．同角（等角）的补角相等．

这两条是由等量公理中"等量减等量其差相等"直接推导出来的结果．由"同角的补角相等"立即可得：

定理　对顶角相等．

4．两直线的位置关系

① 两直线若有两个公共点，那末它们重合．

② 两直线若有而且只有一个公共点，那末它们相交．

③ 两直线若没有公共点，那末它们平行．

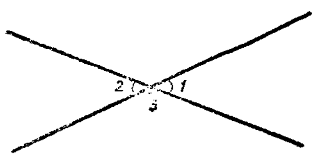


图 45

5. 两直线垂直

在相交的两直线所成的角中，若有一个是直角，就称这两直线互相垂直，其中任意一条叫做另一条的垂线.

定理　过直线上（外）一点可以作一条而且只能作一条垂线.

定理　过直线 l 外一点 P 引 l 的垂线 PQ 和任一斜线 PR，那末 $PQ<PR$ 图(46).

定义　过一点引直线的垂线，这点和垂足间的线段长，叫做这点到这直线的距离.

定理　两边分别垂直的两角相等或互补.

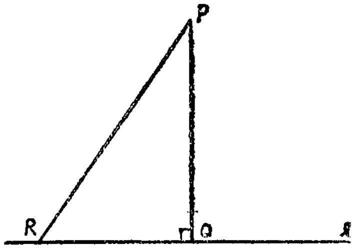


图 46

6. 平行线

平行公理　过直线外一点可以作一条而且只能作一条直线与已知直线平行.

平行线的性质定理　若二平行直线被第三直线所截，那末 1）同位角相等；2）内错角相等；3）同旁内角互补.

平行线的判定定理　二直线与第三直线相交，如果具备下列条件之一：1）同位角相等；2）内错角相等；3）同旁内角互补，那末这二直线平行.

此外还有下列判定定理*：

如果二直线都和第三直线平行（或垂直），那末这二直线平行.

否定平行线判定定理中的条件，就得到

相交直线判定定理　若两直线与第三直线相交，所成同旁内角的和小于或大于一个平角，那末这二直线相交.

定理 两边分别平行且都同向(或都反向)的两角相等.

定理 如果两直线平行，那末一条直线上每一点到另一条直线上的距离都相等(平行线间的距离处处相等)(平行线的又一性质定理).

定理* 如果一条直线上任二点到另一条直线的距离都相等，那末这两直线平行(平行线的又一判定定理).

定理 一组平行线和两条直线相交，如果在一条直线上截得相等的线段，则在另一条直线上也截得相等的线段(平行线等分线段定理).

二、三角形、四边形和多边形

多边形可以理解为由线段首尾相接的平面封闭图形. 三角形是其中最简单的. 关于三角形的定理，是研究多边形的基础，因此掌握三角形的性质是极为重要的.

1. 三角形的内角和定理 任意$\triangle ABC$中，三内角的和等于$180°$，即$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

推论1 三角形的任一外角等于与它不相邻的二内角的和.

推论2 三角形的任一外角大于与它不相邻的任一内角.

2. n边形的内角和定理 n边形的内角和$=(n-2)\cdot 180°$.

推论1 n边形的外角和等于$360°$.

推论2 正n边形的每一内角$=\dfrac{n-2}{n}\cdot 180°$.

当$n=3$，4时，就得到三角形、四边形相应的结果.

3. 三角形三边之间不等量关系

三角形中任两边的和大于第三边，任两边的差小于第三边.

4. 三角形边角之间等量与不等量关系 在任意三角形中，等边对等角，等角对等边，大边对大角，大角对大边.

5. 三角形的主要类型

三个角都是锐角的三角形，叫锐角三角形；

有一个角是直角的三角形，叫直角三角形；

有一个角是钝角的三角形，叫钝角三角形；

三边两两不等的三角形，叫不等边三角形；

有两边相等的三角形，叫等腰三角形；

三边相等的三角形，叫等边三角形，也叫正三角形．应该指出：前三种是按角的特征所作出的一种分类，它满足既不重复又不遗漏的分类要求．后三种却不满足分类的要求，因为等边三角形显然可以看作特殊的等腰三角形．

6. 三角形的主要线段

中线——连结三角形中任一顶点与对边中点的线段．

内角平分线——三角形中任一内角的平分线与对边相交，顶点与交点间的线段．

高线——从三角形的任一顶点向对边(或对边的延长线)引垂线，从顶点到垂足间的线段．

中位线——连结三角形两边中点的线段．

7. 关于三角形的一些重要定理

① 等腰三角形的两底角相等．有两角相等的三角形是等腰三角形．

② 等腰三角形底边上的中线、高线和顶角平分线等三线重合为一条．反之，如果三角形一边上的中线、高线和这边对角的平分线等三线中有两线重合，那末这三角形是等腰三角形．

③ 等腰三角形是轴对称图形．

④ 等边三角形的每一内角等于60°．三角相等的三角形是等边三角形．

⑤ 直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半．如果三

角形一边上的中线等于这边的一半，那末它是直角三角形.

⑥ 直角三角形中，若一锐角等于 30°，那么它的对边等于斜边的一半. 直角三角形中，若一直角边等于斜边的一半，那末这直角边的对角等于 30°.

⑦ $\triangle ABC$ 中，若$\angle C=90°$. 那末 $a^2+b^2=c^2$.

反之，若 $\triangle ABC$ 中，$a^2+b^2=c^2$，那末$\angle C=90°$.

⑧ 三角形的任一中位线平行于第三边，且等于第三边的一半.

8. 全等三角形 能够完全重合的两个三角形叫全等三角形.

全等三角形的性质定理 若两三角形全等，那末 1) 对应边相等；2) 对应角相等.

推论 全等三角形的对应线段(如对应中线、高、角平分线)相等.

全等三角形的判定定理 若两三角形具备下列条件之一：1)两角和夹边对应相等(角、边、角)，2)两边和夹角对应相等(边、角、边)，3)三边对应相等(边、边、边)，那末这两个三角形全等.

推论 1 两三角形若有两角及其中一角的对边对应相等，那末这两三角形全等(角、角、边).

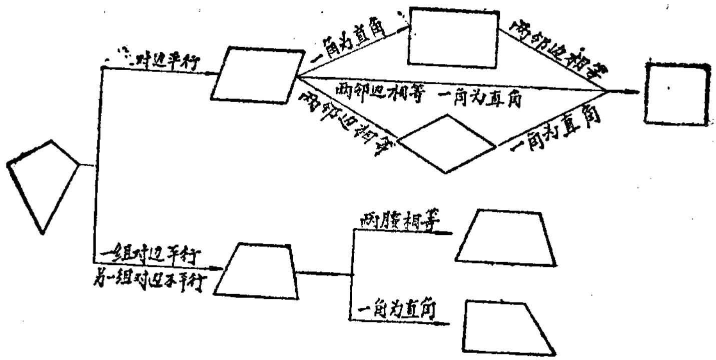
推论*2 两三角形若有两边及其中较大边的对角对应相等，那末这两三角形全等(边、边、大边对角).

推论 3 两直角三角形中，若斜边及一直角边(或一锐角)对应相等，那末这两直角三角形全等(斜边、一直角边；斜边、一锐角).

否定全等三角形判定定理中某一条件，就得到两三角形间不等量关系的下列重要定理.

定理 两三角形中，若有两边对应相等，夹角不等，则大角所对边较大．两三角形中，若有两边对应相等，第三边不等，则大边所对角较大．

9．特殊四边形及其相互关系



10．平行四边形

(1) 性质定理 1) 对边相等，2) 对角相等，3) 对角线互相平分，4) 关于对角线的交点成中心对称．

(2) 判定定理 四边形中，若具备下列条件之一：1) 一组对边平行而且相等，2) 两组对边分别相等，3) *两组对角分别相等，4) 对角线互相平分，那末这个四边形是平行四边形．

11．矩形

(1) 性质定理 矩形除具有平行四边形的一切性质外，还具有下列性质：1) 四角相等(等于直角)；2) 对角线相等；3) 对角线的交点到各顶点等距．

(2) 判定定理 四个角是直角的四边形是矩形．两对角线相等的平行四边形是矩形．

12．菱形

(1) 性质定理 菱形除具有平行四边形一切性质外，还具

有下列性质：1)四边相等；2)对角线互相垂直，3)每一条对角线平分一组对角.

(2) 判定定理　四边相等的四边形是菱形．两对角线互相垂直平分的四边形是菱形.

13．正方形

(1) 性质定理　正方形的四边相等，四角相等，两对角线相等且互相垂直平分，每一条对角线平分一组对角.

(2) 判定定理　四边相等、有一个角是直角的四边形是正方形．四个角是直角、两邻边相等的四边形是正方形.

14．梯形和等腰梯形

(1) 性质定理　梯形的中位线平行于两底，且等于上、下底和的一半.

(2) 等腰梯形的性质和判定定理　等腰梯形在同一底上的两底角相等，两对角线相等．在同一底上两底角相等的梯形是等腰梯形．两对角线相等的梯形是等腰梯形.

三、有关直线形的基本轨迹

1．轨迹的概念

由具有一定条件的所有的点所组成的图形叫做具有这种条件的点的轨迹．故要证明某图形是具有某种条件的点的轨迹必须证明下列两点：①图形上的点都具备这种条件，②具备这种条件的点都在这图形上(或不具备这种条件的点不在这图形上)。

2．两个基本轨迹

① 由于角的平分线上的点具有到两边等距的性质和到两边等距的点在角的平分线上，所以有

基本轨迹 1　到角两边等距的点的轨迹是这角的平分线。

② 因为线段的垂直平分线上的点到两端等距，并且到线段

两端等距的点在这线段的垂直平分线上，所以有

基本轨迹 2　到线段两端等距的点的轨迹是这线段的垂直平分线.

四、有关直线形的基本作图

① 过两已知点作直线；

② 作一线段等于已知线段；　　③ 作一角等于已知角；

④ 过直线外一点作这直线的平行线；

⑤ 过直线上(外)一点作这直线的垂线；

⑥ 作已知角的平分线；

⑦ 作已知线段的垂直平分线；　　⑧ n 等分已知线段；

⑨ 已知下列条件之一，求作三角形：1) 二角及其夹边，2) 两边及其夹角，3) 三边，4) 二角和一角对边，5) 二边和其中大边所对的角*.

⑩* 已知 1) 斜边和一直角边或 2) 已知斜边和一锐角，求作直角三角形.

五、有关直线形面积计算公式

1. 三角形面积

$S=\frac{1}{2}bh$，（b 表示底边长，h 表示高）

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

（a，b，c 为边长，$p=\frac{a+b+c}{2}$）

2. 平行四边形面积

$S=bh$.（b 表示底边长，h 表示高）

3. 矩形面积

$S=ab$.（a，b 表示长和宽）

4. 正方形面积

$S=a^2$.（a 表示边长）

5. 梯形面积

$S=\frac{1}{2}(a+b)h$,（a、b 为上、下底，h 为高）

$S=lh$.（l 为梯形的中位线）

例　　题

例 1　证明二互补角中较小角的余角等于这二互补角差的一半。

已知　$\angle 1$、$\angle 2$互补，且$\angle 2<\angle 1$.

求证　$90^\circ-\angle 2=\frac{1}{2}(\angle 1-\angle 2)$.

证明　由已知　$\angle 1+\angle 2=180^\circ$，两边减去 $2\angle 2$　得 $\angle 1-\angle 2=180^\circ-2\angle 2$，　所以　$90^\circ-\angle 2=\frac{1}{2}(\angle 1-\angle 2)$.

例 2　已知在$\triangle ABC$中，$\angle B=90^\circ$，D、E 是斜边 AC 延长线上的二点，$\angle BAD$和$\angle BCE$的平分线交于M点（如图47），求证$\angle AMC=45^\circ$.

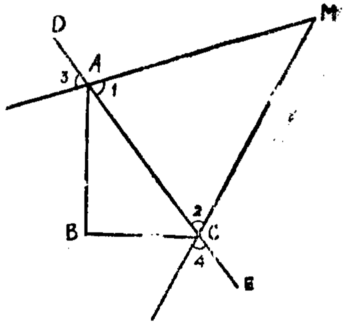


图 47

分析　如图 47，要证 $\angle AMC=45^\circ$，只须证 $\angle 1+\angle 2=135^\circ$. 但$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，而$\angle 3$、$\angle 4$ 分别是$\triangle ABC$的外角$\angle BAD$、$\angle BCE$的一半，由三角形外角和定理得$2\angle 3+2\angle 4+90^\circ=360^\circ$，由此可得 $\angle 3+\angle 4=\angle 1+\angle 2=135^\circ$. 故得证法如下：

证明　$\angle AMC=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)$

∵ $\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$

∴ $\angle AMC=180-(\angle 3+\angle 4)$.　　　　(1)

∵ $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 分别是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle BAD$、$\angle BCE$ 的一半，

∴ $2\angle 3+2\angle 4+90^\circ=360^\circ$.（三角形外角和定理）

所以 $\angle 3+\angle 4=135^\circ$，代入(1) 得 $\angle AMC=45^\circ$.

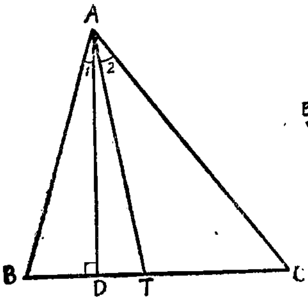


图 48

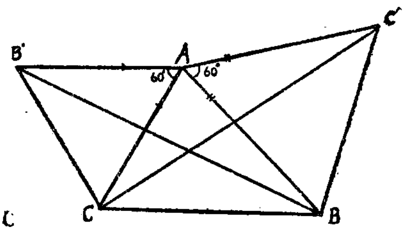


图 49

例 3　如图48，AD是$\triangle ABC$的一条高线，AT是$\angle BAC$的平分线.

求证　$\angle DAT=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

证明　如图 $\angle DAT+\angle 1=\angle 2$　　　　(1)

在$\triangle ADB$及$\triangle ADC$中　∵　$\angle ADB$和$\angle ADC$为直角，

∴ $\angle 1=90^\circ-\angle B$,　　　　(2)

$\angle 2+\angle DAT=90^\circ-\angle C$,　　　　(3)

由(1)　$\angle 2-\angle 1=\angle DAT$,

由(3)—(2)，$\angle 2-\angle 1+\angle DAT=\angle B-\angle C$,

即　$2\angle DAT=\angle B-\angle C$，∴ $\angle DAT=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

例 4　如图 49，以任意 $\triangle ABC$ 的边 AC，AB 为边，分

别向形外作等边三角形 $AB'C$ 和 $AC'B$，求证：$BB'=CC'$.

分析 要证 $BB'=CC'$，只须证 $\triangle ABB'$ 和 $\triangle AC'C$ 全等即可．由已知条件，$AB=AC'$，$AB'=AC$（等边三角形定义）又 $\angle BAB'=\angle BAC+60°=\angle C'AC$，所以上述两三角形确实全等．

证明 在 $\triangle ABB'$ 和 $\triangle AC'C$ 中，$AB=AC'$，$AB'=AC$.（等边三角形定义）又 $\angle CAB'=\angle C'AB=60°$（同上）

$\therefore$ $\angle BAB'=\angle C'AC$（等于 $\angle BAC+60°$）

$\therefore$ $\triangle ABB'\cong\triangle AC'C$.（边、角、边）

所以 $BB'=CC'$.（全等三角形的对应边相等）

例 5 试证：三角形的三条中线交于一点，此点到各顶点的距离分别等于各中线的三分之二（这点叫做三角形的重心）.

已知：AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的中线.

求证：AD、BE、CF 交于一点 G，

且 $AG=\frac{2}{3}AD$，

$BG=\frac{2}{3}BE$，

$CG=\frac{2}{3}CF$.

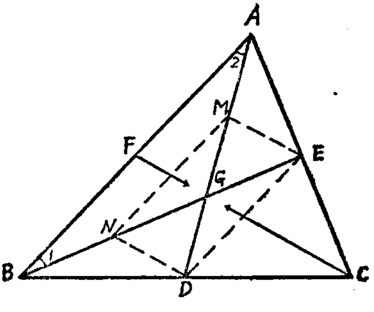


图 50

分析 如图 50，如果能证两条中线 AD 和 BE 的交点 G 满足

$AG=\frac{2}{3}AD$，$BG=\frac{2}{3}BE$，由于中线 AD 上这种分点 G（即分中线 AD 为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{3}$ 两段的点）是唯一的，故中线 CF 也通过 G 点．即三中线交于一点 G.

证明　因中线AD．BE，被AB所截，同侧内角和$\angle 1+\angle 2$小于$\angle CAB+\angle CBA<180°$，$\therefore AD$、$BE$必交于一点$G$．

分别取AG和BG的中点M、N，连DE、EM、MN和DN，

在$\triangle AGB$中，M、N是AG、BG的中点，故得

$MN \parallel AB$，且$MN=\frac{1}{2}AB$．（三角形中位线性质）

在$\triangle ABC$中，D、E是BC和AC的中点，所以

$$DE \parallel AB,\text{ 且 } DE=\frac{1}{2}AB.\text{（同上）}$$

$\therefore$　$MN \parallel DE$ 且 $MN=DE$．

所以　$DEMN$为平行四边形．（平行四边形判定定理）

$\therefore$　$GM=GD$，$GN=GE$．（平行四边形性质）

从而　$AM=MG=GD$，$BN=NG=GE$．

所以　$AG=\frac{2}{3}AD$，$BG=\frac{2}{3}BE$．

同理可证中线AD、CF交于一点G'且满足

$AG'=\frac{2}{3}AD$，$BG'=\frac{2}{3}CF$．

由此得$AG'=AG$，所以G'就是G．证毕．

例 6　试证三角形中大边上的中线小于小边上的中线（图51）．

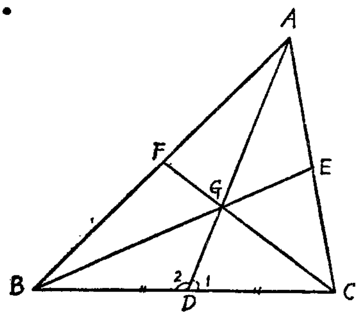


图 51

已知：$\triangle ABC$中，$AB>AC$，BE、CF是中线．

求证　$CF<BE$．

分析　如果

$CF<BE$，那末

$\frac{2}{3}CF<\frac{2}{3}BE$，即

$CG<BG$，作BC边上中

线 AD，它必通过 G 点（参看例 4）。

在 $\triangle CDG$ 和 $\triangle BDG$ 中，$CD=BD$，DG 公共．如果 $CG<BG$，那末 $\angle 1>\angle 2$．因此问题的关键在于能否证明 $\angle 1>\angle 2$，但由 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ADB$ 是可以证明 $\angle 1<\angle 2$ 的（因为 $AC<AB$）、

证明 引 BC 边上中线 AD，那末三中线交于重心 G．

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ADB$ 中，

$\because$ $CD=BD$，$AD=AD$，$AC<AB$，

$\therefore$ $\angle 1<\angle 2$（两三角形两边对应相等，第三边小的所对角较小）又在 $\triangle GDC$ 和 $\triangle GDB$ 中，

$\because$ $CD=BD$，GD 公共，$\angle 1<\angle 2$，

$\therefore$ $CG<BG$（两三角形两边对应相等，夹角小的所对边较小）

但 $CG=\frac{2}{3}CF$，$BG=\frac{2}{3}BE$．（三角形重心性质）

所以 $CF<BE$．　　（不等量公理）

例 7 试证等腰梯形的在同一底上的两底角相等，两对角线相等．

已知：如图 52，

$AB \parallel DC$，$AD=BC$

求证：$\angle BAD=\angle ABC$，$\angle ADC=\angle BCD$，$AC=BD$．

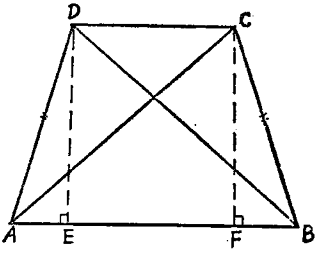


图 52

证明 作 $DE\perp AB$，E 为垂足，又作 $CF\perp AB$，F 为垂足．在 $\triangle AED$ 和 $\triangle BFC$ 中，

$\angle AED=\angle BFC=90^\circ$，

$DE=CF$，（$\because AB \parallel DC$，（平行线间距离处处相等）

$AD=BC$，（已知）

∴　$\triangle AED \cong \triangle BFC$.（直角三角形全等判定定理）

所以　$\angle BAD = \angle ABC$.（全等三角形性质）

由于 $DC \parallel AB$，故 $\angle ADC = \angle BCD$.（平行线性质及等角的补角相等）又在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BAC$ 中，

∵　$AB=BA$，$AD=BC$，$\angle BAD = \angle ABC$，

∴　$\triangle ABD \cong \triangle BAC$.（边、角、边）

所以　$AC=BD$.

例 8　试证：连结等腰梯形各邻边中点成一菱形.

已知：如图 53，$AB \parallel DC$，$AD=BC$，

D、E、F、G 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点

求证：$DEFG$ 是菱形.

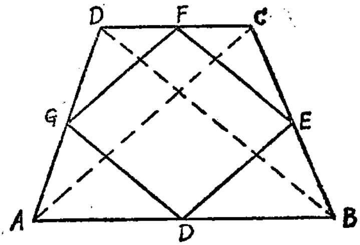


图 53

证明　连 AC、BD.

∵　$DE \parallel AC$，且 $DE = \frac{1}{2}AC$，（三角形中位线性质）

$GF \parallel AC$，且 $GF = \frac{1}{2}AC$，（同上）

∴　$DE \parallel GF$，且 $DE = GF$，故 $DEFG$ 为平行四边形.

同理　$EF = \frac{1}{2}BD$，但 $DE = \frac{1}{2}AC$.（已证）

而　$BD = AC$，（等腰梯形对角线相等）∴ $EF = DE$.

故 $DEFG$ 是菱形.（菱形的定义）

例 9　已知矩形的周长是 56cm，两对角线的交点到短边的距离比到长边的距离多 4cm，求矩形的各边的长.