随机过程疑难分析与解题方法

SUIJI GUOCHENG YINAN FENXI YU JIETI FANGFA

大学数学学习方法丛书

基本内容归纳提炼

学习方法疑难分析

典型例题解答技巧

考研知识总结升华

孙清华 孙昊

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

大学数学学习方法丛书

随机过程
疑难分析与解题方法

孙清华　孙　昊

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 简 介

本书是《大学数学学习方法》丛书之一，着重讨论了随机过程的基本理论和分析问题、解决问题的方法，内容包括随机过程的基本概念、泊松随机过程、马尔可夫链、连续时间的马尔可夫链、随机分析与随机微分方程、平稳过程、平稳过程的谱分析、正态随机过程和时间序列分析简介.本书以简明、易懂的语言深入浅出地诠释概念、分析疑难，并选用了300多个典型例题为读者演示了随机过程的解题方法与技巧，以培养读者分析问题和解决问题的能力.本书与教材同步，是大学生、研究生看得懂，且读之有益的一本好书.

图书在版编目(CIP)数据

随机过程疑难分析与解题方法/孙清华 孙 昊.-2版.—武汉：华中科技大学出版社，2008年8月
ISBN 978-7-5609-3117-3

Ⅰ.随… Ⅱ.①孙… ②孙… Ⅲ.随机过程-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第121192号

随机过程疑难分析与解题方法 孙清华 孙 昊

策划编辑：徐正达
责任编辑：田 密 封面设计：潘 群
责任校对：刘 竣 责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编：430074 电话：(027)87557437
录 排：武汉佳年华科技有限公司
印 刷：华中科技大学印刷厂
开本：710mm×1000mm 1/16 印张：15.25 字数：400 000
版次：2008年8月第2版 印次：2008年8月第4次印刷 定价：21.50元
ISBN 978-7-5609-3117-3/O·310

(本书若有印装质量问题，请向出版社发行部调换)

前　言

随机过程是现代概率论的一个重要内容，是研究客观世界中随机演变过程的理论工具，已在工程技术和社会科学方面得到了广泛的应用，并显示出十分重要的作用．我们只有熟练掌握随机过程的基本理论和方法，才能进一步学习现代科学技术，为探索科学技术新领域奠定必要的数学基础．

现在，越来越多的本科专业开设了随机过程课程．但是，读者在学习中普遍感到本门课程概念比较抽象，问题难以入手，思维难以展开，学习起来有一定的困难．为了帮助大家克服困难，尽量掌握本门课程的精髓和方法，我们编写了本书．

本书着重讨论了随机过程的基本理论和分析问题、解决问题的方法．全书分为九章，依次为随机过程的基本概念、泊松随机过程、马尔可夫链、连续时间的马尔可夫链、随机分析与随机微分方程、平稳过程、平稳过程的谱分析、正态随机过程和时间序列分析简介．在编写中力求以简明、易懂的语言深入浅出地为读者诠释概念、解析疑难，强调了基本方法的叙述和实际例子的演示，努力培养读者分析问题、解决问题的能力．我们遵照与教材同步的原则，读者可以按照学习进度阅读本书，学好随机过程课程．

由于目前随机过程课程没有统一的教材，且不同的教材内容差异较大，许多定理、公式的叙述和写法不很一致，所以我们在编写时尽量采用多数教材的提法，在内容上较全面地包含了随机过程的基本理论和基本公式．在例题上选用了比较实际的、能加深对基本概念的理解的、有助于提高分析问题和解决问题能力的习题．希望能得到读者的认同和欢迎，并对读者的学习有一定的帮助．

本书在编写过程中参阅了一些作者的有关著作，在此向他们致以谢意．本书得以出版，还要感谢华中科技大学出版社领导和编辑的大力支持．

由于水平和学识所限，书中错误在所难免，欢迎读者批评指正．

孙清华　孙　昊
2008 年 7 月

目　　录

第一章　随机过程的基本概念

第一节　随机过程的概念

主要内容

1. 设给定**概率空间**(Ω,F,P)和**参数集** $T\subseteq(-\infty,+\infty)$，若对每个 $e\in\Omega$ 和 $t\in T$ 都有一个定义在概率空间上的**随机变量**$X(e,t)$与之对应，则称依赖于参数 t 的随机变量$\{X(e,t),t\in T\}$为**随机过程**，简记为$\{X(t),t\in T\}$或 X_T 或 $X(t)$. 参数集 T 通常为下列情形之一：$(-\infty,+\infty)$，$(0,+\infty)$，$\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，$\{0,1,2,\cdots\}$，$[a,b]$，$(a,b)$等.

2. 通常将参数集 T 称为**参数空间**，$X(t)$所能取的一切值的集合 I 称为**状态空间(或值域)**. I 中的每一个元素称为**状态**.

3. 随机过程依其在任一时刻的状态是连续型随机变量还是离散型随机变量分为**连续型随机过程**和**离散型随机过程**. 它们的时间参数都是连续的.

状态连续、时间参数离散的随机过程称为**连续随机序列**，状态离散、时间参数离散的随机过程称为**离散随机序列**.

4. 给定随机过程$\{X(t),t\in T\}$，对任一固定的 $t_1\in T$，分布函数 $F_1(x_1,t_1)=P\{X(t_1)\leqslant x_1\}$，$x_1\in\mathbf{R}$ 称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**一维分布函数**. 使

$$F_1(x_1,t_1)=\int_{-\infty}^{x} f(x_1,t_1)\mathrm{d}x,\quad -\infty<x<+\infty$$

的非负二元函数称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**一维概率密度函数**，简称**一维概率密度**.

类似地，当时间 t 取 n 个数值 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$ 时，n 维随机变量$\{X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)\}$的分布函数为

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n\},$$
$$-\infty<x_1,x_2,\cdots,x_n<+\infty$$

称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的 **n 维分布函数**. 使

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

成立的非负函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的 **$n$ 维概率密度**.

随机过程$\{X(t),t\in T\}$的一维分布，二维分布，$\cdots$，n 维分布的全体称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**有限维分布函数族**.

5. 随机过程的有限维分布函数有下列性质：

(1) 对称性　对$(1,2,\cdots,n)$的任一排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$有

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=F_n(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n};t_{j_1},t_{j_2},\cdots,t_{j_n}).$$

(2) 相容性　对任意 $m<n$，有

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty;t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n)=F_m(x_1,x_2,\cdots,x_m;t_1,t_2,\cdots,t_m).$$

6. **特征函数**　设有

$$\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(u_1X(t_1)+u_2X(t_2)+\cdots+u_nX(t_n))})$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n)}\mathrm{d}F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),$$

称$\{\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n);t_1,t_2,\cdots,t_n\in T;n\geqslant 1\}$为随机过程的**有限维特征函数族**. 其性质有：

(1) 对称性　对$(1,2,\cdots,n)$的任一排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$有

$$\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\varphi(u_{j_1},u_{j_2},\cdots,u_{j_n};t_{j_1},t_{j_2},\cdots,t_{j_n}).$$

(2) 相容性　对任意$m<n$,有

$$\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_m,0,\cdots,0;t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n)=\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_m;t_1,t_2,\cdots,t_m).$$

有限维分布函数族与有限维特征函数族互相唯一决定.

7. 存在定理(柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)定理)　若分布函数族

$$\{F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n);t_1,t_2,\cdots,t_n\in T;n\geqslant 1\}$$

满足对称性和相容性,则必存在一个随机过程$\{X(t),t\in T\}$,使该分布函数族恰为该随机过程的有限维分布函数族.

8. 设$\{X(t),Y(t),t\in T\}$是二维随机过程,则称

$$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n);Y(t'_1),Y(t'_2),\cdots,Y(t'_m))$$

的联合分布函数

$$F_{n,m}(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n;y_1,y_2,\cdots,y_m;t'_1,t'_2,\cdots,t'_m)$$
$$=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n;Y(t'_1)\leqslant y_1,Y(t'_2)\leqslant y_2,\cdots,Y(t'_n)\leqslant y_m\}$$

为二维随机过程的$n+m$维联合分布函数. 相应的$n+m$维概率密度函数为

$$f_{n,m}(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n;y_1,y_2,\cdots,y_m;t'_1,t'_2,\cdots,t'_m)$$
$$=\frac{\partial^{n+m}F_{n,m}(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n;y_1,y_2,\cdots,y_m;t'_1,t'_2,\cdots,t'_m)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n\partial y_1\partial y_2\cdots\partial y_m}.$$

疑难分析

1. 怎样理解随机过程？它与函数及随机变量有何不同？

答　(1) 随机过程将普通函数的概念从实数与实数的对应关系推广到实数与随机变量的对应关系. 对普通函数而言,当$t\in T$时,总有一个确定的实数x与之对应;而对随机过程而言,当$t\in T$时,与之对应的$X(e,t)$是一个随机变量.

(2) 随机过程是随机变量概念的推广. 随机变量是在固定时间t上的试验结果,是一个数的集合;而随机过程是在$t\in T$上的试验结果,是一个时间函数的集合. 当t固定时,随机过程就成为一个随机变量.

(3) 随机变量$X(e)$是定义在Ω上的函数,对每个$e\in\Omega$,都有确定的x与之对应;而随机过程当$e\in\Omega$时,对应的$X(e,t)$又是t的函数,称为样本函数或样本曲线(或轨道,或现实). 所以,随机过程将随机变量概念从e与实数对应推广到e与实函数的对应.

(4) 随机过程是一族随机变量,T中有多少元素,$X(e,t)$就含多少个随机变量. 随机过程又是一族样本函数,每一$e\in\Omega$对应一个样本函数,Ω含多少个基本事件,随机过程就有多少个样本函数.

2. 随机过程对参数集 T 有何要求？

答　随机过程定义中的参数集T可以是时间集也可以是长度、重量、速度等物理量. 随机过程本来通称随机函数,当参数集T是时间集时称为随机过程,但现在将参数不是时间集的随机函数也称为随机过程,对参数集T不再有时间集的限制.

典型例题

本节主要是理解概念、辨析定义，通过例题区别随机变量和随机过程，学会构造随机过程.

例 1　设随机变量 $X \sim b(n,p)$，求 X 的特征函数.

解　当 $n=1$ 时，X 服从 0-1 分布，$p_k = P\{X=k\} = p^k q^{1-k}$，$k=0,1$，故特征函数为

$$\varphi_X(t) = \sum_k e^{jtk} p_k = q + pe^{jt}.$$

当 $n>1$ 时，$p_k = P\{X=k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$，$k=0,1,\cdots,n$，故特征函数为

$$\varphi_X(t) = \sum_k e^{jtk} p_k = \sum_k e^{jtk} C_n^k p^k q^{n-k} = (q + p^{jt})^n .$$

例 2　设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 X 的特征函数.

解　先求 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的特征函数. 因为 $Y \sim N(0,1)$，故

$$\varphi_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx - \frac{x^2}{2}} dx.$$

由于 $|jxe^{jtx-x^2/2}| \leqslant |x| e^{-x^2/2}$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2/2} dx < +\infty$，故

$$\varphi_Y'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} jxe^{jtx-x^2/2} dx,$$

且
$$jt\varphi_Y(t) + j\varphi_Y'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (jt - x) e^{jtx-x^2/2} = 0,$$

得微分方程
$$t\varphi_Y(t) + \varphi_Y'(t) = 0.$$

解方程得
$$\varphi_Y(t) = Ce^{-t^2/2}.$$

由 $\varphi_Y(0)=1$，得 $C=1$，故 $\varphi_Y(t) = e^{-t^2/2}$.

又 $X = \sigma Y + \mu$，由特征函数的线性性质，得

$$\varphi_X(t) = e^{j\mu t} \varphi_Y(\sigma t) = e^{j\mu t - \sigma^2 t^2/2}.$$

求随机变量的特征函数，可以使用定义求解（如例 1），也可以使用微分方程法求解（如例 2），还可以使用傅里叶变换求解.

例 3　设随机变量 X 的特征函数为 $\varphi_X(t) = 1/(1+t^2)$，求 X 的概率密度.

解　利用复变函数的留数计算比较简单.

因为 $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-jtx} \frac{1}{1+t^2} dt$ 是 x 的偶函数，设 $x<0$，则 $-x>0$，所以由

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} \frac{1}{1+t^2} dt = 2\pi j \operatorname{Res}\left[e^{jtz} \frac{1}{1+z^2}, j \right] = 2\pi j e^{-x} \frac{1}{2j} = \pi e^{-x}$$

得 X 的概率密度为
$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

例 4　利用重复掷硬币的试验定义一个随机过程

$$X(t) = \begin{cases} \cos(\pi t), & \text{出现正面}, \\ 2t, & \text{出现反面}, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty.$$

出现正面和反面的概率相等. 求：$X(t)$ 的一维分布函数 $F(x,1/2)$ 和 $F(x,1)$，$X(t)$ 的二维分布函数 $F(x_1,x_2;1/2,1)$.

解　以随机变量 Y 记掷硬币的试验结果，则

$$Y = \begin{cases} -1, & \text{出现反面}, \\ 1, & \text{出现正面}, \end{cases}$$

且

$$P\{Y=1\}=P\{Y=-1\}=1/2.$$

(1) 当 $t=1/2$ 时,若 $Y=1$,则 $X(1/2)=\cos(\pi/2)=0$;若 $Y=-1$,则 $X(1/2)=2\times 1/2=1$. 于是

$$F_X(x,1/2)=P\{X(1/2)\leqslant x\}=P\{X(1/2)\leqslant x|Y=1\}P\{Y=1\}+P\{X(1/2)\leqslant x|Y=-1\}P\{Y=-1\}$$

$$=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1/2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x.\end{cases}$$

类似可得

$$F_X(x,1)=P\{X(1)\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 1/2, & -1\leqslant x<2,\\ 1, & 2\leqslant x.\end{cases}$$

(2) 当 $t=1$ 时,若 $Y=1$,则 $X(1/2)=\cos\pi=-1$;若 $Y=-1$,则 $X(1/2)=2\times 1=2$. 于是

$$F_X(x_1,x_2;1/2,1)=P\{X(1/2)<x_1,X(1)\leqslant x_2\}=\begin{cases}0, & x_1<0,-\infty<x_2<+\infty,\\ 0, & x_1\geqslant 0,x_2<-1,\\ 1/4, & 0\leqslant x_1<1,-1\leqslant x_2<2,\\ 1/2, & 0\leqslant x_1<1,2\leqslant x_2,\\ 1/2, & x_1>1,-1\leqslant x_2<2,\\ 1, & x_1>1,x_2\geqslant 2.\end{cases}$$

例 5　设有随机过程 $X(t)=A+Bt,t\geqslant 0$,其中 A 与 B 是相互独立的随机变量,均服从标准正态分布. 求 $X(t)$的一维和二维分布.

解　因为,$\forall$ 固定的 $t\in T$,$X(t)$是正态随机变量,故

$$E(X(t))=E(A)+E(B)t=0,\quad D(X(t))=D(A)+D(B)t^2=1+t^2.$$

所以,$X(t)$服从正态分布 $N(0,1+t^2)$,从而也是随机过程 $X(t)$的一维分布.

其次,$\forall$ 固定的 $t_1,t_2\in T$,$X(t_1)=A+Bt_1$,$X(t_2)=A+Bt_2$,则依 n 维正态随机向量的性质,$(X(t_1),X(t_2))$服从二维正态分布,且

$$E(X(t_1))=0,\quad E(X(t_2))=0,\quad D(X(t_1))=1+t_1^2,\quad D(X(t_2))=1+t_2^2,$$
$$\operatorname{cov}(X(t_1),X(t_2))=E(X(t_1)X(t_2))=1+t_1t_2.$$

所以,二维分布是数学期望向量为$(0,0)$,协方差矩阵为$\begin{pmatrix}1+t_1^2 & 1+t_1t_2\\ 1+t_1t_2 & 1+t_2^2\end{pmatrix}$的二维正态分布.

例 6　设随机过程 $X(t)=X\cos(\omega t)(-\infty<t<+\infty)$,其中 ω 为常数,X 是服从正态分布的随机变量,$E(X)=0,D(X)=1$. 求$X(t)$的一维分布密度函数和协方差函数.

解　$E(X(t))=E(X)\cos(\omega t)=0,\quad D(X(t))=D(X)(\cos(\omega t))^2=\cos^2(\omega t)$,

故$\{X(t),t\in T\}$的一维分布函数为 $N(0,\cos^2(\omega t))$.

协方差函数(见第二节)是随机过程$\{X(t),t\in T\}$在任意两个时刻 t_1 和 t_2 时状态 $X(t_1)$和$X(t_2)$的二阶中心混合矩

$$C_X(t_1,t_2)=E((X(t_1)-\mu_X(t_1))(X(t_2)-\mu_X(t_2))),$$

其中

$$\mu_X(t)=E(X(t))=0,$$

故 $C_X(t_1,t_2)=E((X\cos(\omega t_1))(X\cos(\omega t_2)))=E(X^2)\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2)=\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2)$,

其中

$$E(X^2)=D(X)-(E(X))^2=1-0=1.$$

例 7　设随机过程只有两条样本曲线

$$X(t,\omega_1)=a\cos t,-\infty<t<+\infty,$$
$$X(t,\omega_2)=a\cos(t+\pi)=-a\cos t,-\infty<t<+\infty,$$

其中,常数 $a>0$, $P(\omega_1)=2/3$, $P(\omega_2)=1/3$,求 $X(t)$的一维分布函数 $F(x,0)$, $F(x,\pi/4)$及二维分布函数 $F(x_1,x_2;0,\pi/4)$.

解　如图 1-1 所示,取 ω_0为 1. $X(0)$的可取值为

$$X(0,\omega_1)=a\cos 0=a,\quad X(0,\omega_2)=-a\cos 0=-a.$$

而
$$P\{X(0)=a\}=P(\omega_1)=2/3,$$
$$P\{X(0)=-a\}=P(\omega_2)=1/3.$$

故
$$F(x,0)=\begin{cases}0, & x<-a,\\ 1/3, & -a\leqslant x<a,\\ 1, & x\geqslant a.\end{cases}$$

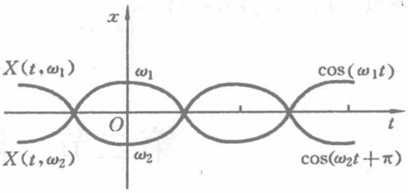

图 1-1

类似地, $X(\pi/4)$的可取值为

$$X(\pi/4,\omega_1)=a\cos(\pi/4)=\sqrt{2}a/2,$$
$$X(\pi/4,\omega_2)=-a\cos(\pi/4)=-\sqrt{2}a/2.$$

故
$$F(x,\pi/4)=\begin{cases}0, & x<-\sqrt{2}a/2,\\ 1/3, & -\sqrt{2}a/2\leqslant x<\sqrt{2}a/2,\\ 1, & x\geqslant\sqrt{2}a/2.\end{cases}$$

对于二维分布,随机向量$(X(0),X(\pi/2))$可取值为

$$(X(0,\omega_1),X(\pi/4,\omega_1))=(a,\sqrt{2}a/2),\quad (X(0,\omega_2),X(\pi/4,\omega_2))=(-a,-\sqrt{2}a/2).$$

而
$$P\{X(0)=a,X(\pi/4)=\sqrt{2}a/2\}=P(\omega_1)=2/3,$$
$$P\{X(0)=-a,X(\pi/4)=-\sqrt{2}a/2\}=P(\omega_2)=1/3,$$

故
$$F(x_1,x_2;0,\pi/4)=\begin{cases}0, & x_1<-a \quad 或 \quad x_2<-\sqrt{2}a/2;\\ 1/3, & x_1\geqslant -a \ \cup\ -\sqrt{2}a/2\leqslant x_2<\sqrt{2}a/2,\\ & -a\leqslant x_1<a\ \cup\quad x_2\geqslant\sqrt{2}a/2;\\ 1, & x_1\geqslant a \quad 或 \quad x_2\geqslant\sqrt{2}a/2.\end{cases}$$

例 8　设随机过程 $X(t)=A\cos t$, $t\in\mathbf{R}$. A 是随机变量,概率分布列为

A	1	2	3
p	1/3	1/3	1/3

,求:
(1) 一维分布函数 $F(x,\pi/4)$, $F(x,\pi/2)$;　　(2) 二维分布函数 $F(x_1,x_2;0,\pi/3)$.

解　(1) 因为 $X(\pi/4)=A\cos(\pi/4)=\sqrt{2}A/2$,可取值为$\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}/2$(将 A 代入即得),而

$$P\{X(\pi/4)=\sqrt{2}/2\}=P\{A=1\}=1/3,$$
$$P\{X(\pi/4)=\sqrt{2}\}=P\{A=2\}=1/3,$$
$$P\{X(\pi/4)=3\sqrt{2}/2\}=P\{A=3\}=1/3.$$

故
$$F(x,\pi/4)=\begin{cases}0, & x<\sqrt{2}/2,\\ 1/3, & \sqrt{2}/2\leqslant x<\sqrt{2},\\ 2/3, & \sqrt{2}\leqslant x<3\sqrt{2}/2,\\ 1, & x\geqslant 3\sqrt{2}/2.\end{cases}$$

因 $X(\pi/2)=A\cos(\pi/2)=0$. 只能取 0 值,故

$$F(x,\pi/2)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

(2) 因为,由

$$F(x_1,x_2;0,\pi/3)=P\{A\cos 0\leqslant x_1,A\cos(\pi/3)\leqslant x_2\}=P\{A\leqslant x_1,A/2\leqslant x_2\}$$

$$=P\{A\leqslant x_1,A\leqslant 2x_2\}=\begin{cases}P\{A\leqslant x_1\}, & x_1\leqslant 2x_2,\\ P\{A\leqslant 2x_2\}, & 2x_2<x_1.\end{cases}$$

所以
$$F(x_1,x_2;0,\pi/3)=\begin{cases}0, & x_1\leqslant 2x_2,\ x_1<1\text{ 或 }2x_2<x_1,\ x_2<1/2,\\ 1/3, & x_1\leqslant 2x_2,\ 1\leqslant x_1<2\text{ 或 }2x_2<x_1,\ 1/2\leqslant x_2<1,\\ 2/3, & x_1\leqslant 2x_2,\ 2\leqslant x_1<3\text{ 或 }2x_2<x_1,\ 1\leqslant x_2<3/2,\\ 1, & x_1\leqslant 2x_2,\ x_1\geqslant 3\text{ 或 }2x_2<x_1,\ x_2\geqslant 3/2.\end{cases}$$

第二节　随机过程的数字特征

主 要 内 容

随机过程的数字特征是利用随机变量和随机向量的数字特征进行定义的.

1. 随机过程$\{X(t),t\in T\}$在每一时刻 $t\in T$ 的状态是一个随机变量,它的数学期望和方差都是 t 的函数,分别称为随机变量的数学期望(函数)和方差(函数).

随机过程的数学期望(均值函数)

$$\mu_X(t)=E(X(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}F(x,t),\ t\in T$$

为连续型时,
$$\mu_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,t)\mathrm{d}x,\ t\in T.$$

$\mu_X(t)$表示 $X(t)$的所有样本函数在时刻 t 的理论平均值.

随机过程的方差函数

$$D_X(t)=D(X(t))=E((X(t)-\mu_X(t))^2),\ t\in T,$$

而 $\sigma_X(t)=\sqrt{D_X(t)}$称为随机过程的**标准差**.它们描绘随机过程$X(t)$在时刻 t 对$\mu_X(t)$的偏离程度.

而 $\psi_X(t)=E(X^2(t))$称为随机过程 $X(t)$的**均方值函数**.显然

$$D_X(t)=E(X^2(t))-(E(X(t)))^2.$$

2. 对任意两个固定时刻 t_1、t_2,$X(t_1)$与 $X(t_2)$是两个随机变量,其线性关系的密切程度用相关系数 $\rho(t_1,t_2)$表示,即

$$\rho(t_1,t_2)=\frac{\mathrm{cov}(X(t_1),X(t_2))}{\sqrt{D(X(t_1))}\sqrt{D(X(t_2))}}.$$

$$R_X(t_1,t_2)=E(X(t_1)X(t_2))=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2f(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

称为随机过程 $X(t)$的**自相关函数**,简称**相关函数**.

$$C_X(t_1,t_2)=\mathrm{cov}(X(t_1),X(t_2))=E((X(t_1)-\mu_X(t_1))(X(t_2)-\mu_X(t_2)))$$

称为随机过程 $X(t)$的**自协方差函数**,简称**协方差函数**.有

$$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2).$$

3. 给定二维随机过程$\{X(t),Y(t),t\in T\}$.若

$$F\{x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n;y_1,y_2,\cdots,y_m;t'_1,t'_2,\cdots,t'_m\}$$
$$=F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)F_2(y_1,y_2,\cdots,y_m;t'_1,t'_2,\cdots,t'_m),$$

称随机过程 $X(t)$与 $Y(t)$**相互独立**.

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E(X(t_1)Y(t_2)),\ t_1,t_2\in T$$

称为随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$的**互相关函数**.

$$C_{XY}(t_1,t_2)=E((X(t_1)-\mu_X(t_1))(Y(t_2)-\mu_Y(t_2))),\ t_1,t_2\in T$$

称为随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的**互协方差函数**.

$$C_{XY}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_X(t_1))(y-\mu_Y(t_2))f(x,y;t_1,t_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y;t_1,t_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

且有 $$C_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2).$$

若 $C_{XY}(t_1,t_2)=0$ 或 $R_{XY}(t_1,t_2)=\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2)$, $t_1,t_2\in T$,

则称随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ **不相关**.

4. 若随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ $(t\in T)$ 相互独立,则 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 不相关. 反之,不一定成立.

疑难分析

1. 为什么要引进随机过程的数字特征?

答 虽然随机过程的分布函数族能完善地刻画随机过程的统计特性,但我们在实际问题中往往由于资料不全而难以得到随机过程的分布函数族,而且,事实上也不总是需要了解随机过程的全部概率特性的. 因此,引进随机过程的数字特征可以使实际问题的处理变得简便,从而满足我们的需要.

2. 怎样确定两个随机过程的独立性?

答 随机过程的独立性是用分布函数来定义的. 如同确定两个随机变量的独立性一样,对连续概率分布情形,两个随机过程 $X(t)$、$Y(t)$ 相互独立的充要条件是:

(1) $\forall m\geqslant 1, n\geqslant 1$;

(2) 对于 $\boldsymbol{t}$、$\boldsymbol{t}'$,有 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t};\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}')=f_X(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})f_Y(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}')$,其中 $f_X(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ 和 $f_Y(\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}')$ 分别是 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的 n 维和 m 维分布密度.

3. 相关函数有什么性质?

答 (1) 对称性 $R_X(t_1,t_2)=R_X(t_2,t_1)$;

(2) $R_X(t_1,t_2)$ 是非负定的,即 $\forall n\geqslant 1$ 和 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n\in T$ 及任意复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$,有 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}R_X(\tau_k,\tau_j)z_k\bar{z}_j\geqslant 0$. 事实上

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_X(\tau_k,\tau_j)z_k\bar{z}_j&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E(X(\tau_k)X(\tau_j))z_k\bar{z}_j=E\Big(\sum_{k=1}^{n}X(\tau_k)z_k\overline{\sum_{j=1}^{n}X(\tau_j)z_j}\Big)\\&=E\Big(\Big|\sum_{k=1}^{n}X(\tau_k)z_k\Big|^2\Big)\geqslant 0.\end{aligned}$$

这两条性质对协方差函数同样成立.

典型例题

在计算随机过程数字特征时,除了利用定义外,还应该把握好随机过程与随机变量的关系,利用随机变量的数字特征的计算方法和技巧.

例 1 已知随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的均值函数 $\mu_X(t)$ 和协方差函数 $C_X(t_1,t_2)$,$\varphi(t)$ 是普通的函数,求随机过程 $Y(t)=X(t)+\varphi(t)$ 的均值函数和协方差函数.

解 因为 $\varphi(t)$ 是普通函数,有 $E(\varphi(t))=\varphi(t)$,故

$$\mu_Y(t)=E(Y(t))=E(X(t)+\varphi(t))=E(X(t))+E(\varphi(t))=\mu_X(t)+\varphi(t),$$

$$C_Y(t_1,t_2)=E((Y(t_1)-\mu_Y(t_1))(Y(t_2)-\mu_Y(t_2)))$$
$$=E((X(t_1)-\mu_X(t_1))(X(t_2)-\mu_X(t_2)))=C_X(t_1,t_2).$$

例 2　设有随机过程 $X(t)$和任一实数 x,定义随机过程

$$Y(t)=\begin{cases}1, & X(t)\leqslant x,\\ 0, & X(t)>x.\end{cases}$$

证明:$\mu_Y(t)$和 $R_Y(t_1,t_2)$分别是 $X(t)$的一维和二维分布函数.

证　设 $X(t)$的一维和二维概率密度分别为 $f_1(x,t)$和$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$,则

$$\mu_Y(t)=E(Y(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)f(x,t)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}f_1(x,t)\mathrm{d}x=F_1(x,t),$$

$$R_Y(t_1,t_2)=E(Y(t_1)Y(t_2))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y_1y_2f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$
$$=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=F_2(x_1,x_2;t_1,t_2).$$

若考虑到对任意的 $t\in T$,$Y(t)$是离散型随机变量,则有

$$\mu_Y(t)=E(Y(t))=1\times P\{Y(t)=1\}+0\times P\{Y(t)=0\}=P\{X(t)\leqslant x\}=F_1(x,t),$$
$$R_Y(t_1,t_2)=E(Y(t_1)Y(t_2))$$
$$=1\times1\times P\{Y(t_1)=1,Y(t_2)=1\}+1\times0\times P\{Y(t_1)=1,Y(t_2)=0\}$$
$$+0\times1\times P\{Y(t_1)=0,Y(t_2)=1\}+0\times0\times P\{Y(t_1)=0,Y(t_2)=0\}$$
$$=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2\}=F_2(x_1,x_2;t_1,t_2).$$

例 3　随机过程 $X(t)$的样本函数的图像是周期性锯齿波,其两个典型样本函数的图像如图 1-2所示.每个样本函数的形状相同,将 $t=0$ 以后的第一个零值时刻记为 T_0.设 T_0 是一个均匀分布的随机变量,有

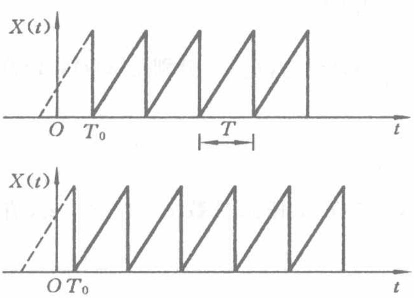

图 1-2

$$f_{T_0}(t)=\begin{cases}1/T, & 0\leqslant t\leqslant T,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求 $X(t)$的一维密度函数 $f_X(x)$.

解　由图示的三角形关系式得

$$X(t)=\frac{A}{T}(T-T_0+t),\quad -T+T_0\leqslant t\leqslant T_0,$$

其中　　$T_0=T-T/A\cdot X(t)+t=f(X)$.

于是$f_X(x)=f_{T_0}(f(x))\left|\dfrac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}x}\right|=\begin{cases}1/A, & 0\leqslant x\leqslant A,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

例 4　设有随机过程$\{X(t),t\in T\}$和常数 a,试以 $X(t)$的相关函数表示随机过程 $Y(t)=X(t+a)-X(t),t\in T$ 的相关函数.

解　依定义有

$$R_Y(t_1,t_2)=E((X(t_1+a)-X(t_1))(X(t_2+a)-X(t_2)))$$
$$=E(X(t_1+a)X(t_2+a))-E(X(t_1+a)X(t_2))-E(X(t_1)X(t_2+a))+E(X(t_1)X(t_2))$$
$$=R_X(t_1+a,t_2+a)-R_X(t_1+a,t_2)-R_X(t_1,t_2+a)+R_X(t_1,t_2).$$

例 5　设 $Z(t)=X+Yt,-\infty<t<+\infty$.若已知二维随机变量$(X,Y)$的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\\ \rho & \sigma_2^2\end{pmatrix}$,求 $Z(t)$的协方差函数.

解　依定义,利用数学期望的性质可得

$$C_Z(t_1,t_2)=E(((X+Yt_1)-(\mu_X+\mu_Yt_1))((X+Yt_2)-(\mu_X+\mu_Yt_2)))$$
$$=E(((X-\mu_X)+(Yt_1-\mu_Yt_1))((X-\mu_X)+(Yt_2-\mu_Yt_2)))$$