高中文化学习辅导

数学

湖北省教育厅职工教育办公室组编

湖北教育出版社

高中文化学习辅导

数　　学

湖北省教育厅职工教育办公室组编

湖北教育出版社

高中文化学习辅导

数　学

湖北省教育厅职工教育办公室

*

湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行

宜昌市新华印刷厂印装

787×1092毫米32开本　13印张　298,000字

1985年1月第1版　1985年1月第1次印刷

印数：1—75,000

统一书号：7306·138　定价：1.50元

说　明

根据我省干部职工高中文化学习和职工高等学校招生考试复习的需要，我们组织编写了这套高中文化学习辅导书。目的是为了指导干部职工高中阶段的政治、语文、数学、物理、化学、历史、地理诸课程的学习，并为学员参加高中结业考试和职工高等学校招生考试提供复习参考。

这套书是以教育部组织的十二城市职工教育协作会编写和推荐的职工高中各科教学大纲(纲要)、职工高中课本（政治、历史、地理参考普通中学课本）为基本依据，结合干部和职工学习的特点编写的。这套书重视各科基础知识和基本训练，使学员经过学习，更好地掌握课程的基本概念、基本理论和基本技能。

在编写过程中，得到了武汉市第二教育局、武汉市工农教育学院、湖北省教育学院、武汉市教育学院、武汉市教学研究室、荆州地区教研室、华师一附中、武昌实验中学、武钢职工大学、武汉锅炉厂职工大学、武汉市橡胶工业公司职工大学、湖北省国防工业办公室、武汉水运工程学院职工教育科、中南民族学院干训部、湖北省职工教育管理委员会办公室和有关单位的大力支持，在此一并致谢。

由于编写的时间十分仓促，水平有限，错误在所难免，恳请批评指正。

湖北省教育厅职工教育办公室

一九八四年二月

后　记

本书分代数、几何、三角、平面解析几何四篇，体例与一般课本不同。每章简列基本内容，突出重点和难点；例题采用基础知识套多种题型的综合题目，突出基础知识和基本技能训练，有的题目后面还附有说明和应该注意的问题；习题和测验题均附答案或提示，前者用以巩固基础知识和加强基本技能的训练，后者用以检查读者对基础知识掌握的程度和基本技能训练的水平。全书最后还附有总测验题和解答，供读者复习参考。

本书从职工实际文化水平出发，以高中内容为主，适当收编初中内容，平面几何分直线形与圆，突出证明、计算、简单作图等问题，把它编在立体几何前，为复习立体几何和平面解析几何打下基础。初中代数基础知识均渗透在全书中，使用本书时应配合课本学习，注意前后知识的联系和运用，以及一题多解、知识归类等。这对培养读者综合运用基础知识，提高分析解题能力，可能会有一定的帮助。

本书由李光楹同志具体组织编写并承担统稿工作，董艾瑗、尚明东、李光楹、叶兰芳等同志参加了编写工作；书稿由湖北省教育厅组织审查会进行了审阅，冯家柱、贾玉贞、姚振华、方资勲、蔡绍甲等同志参加了审阅，提出了许多宝贵意见；冯家柱、蔡绍甲、董艾瑗、叶兰芳、李光楹等同志参加修改定稿工作。

由于编写时间和水平有限，错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

一九八四年一月

目　　录

代　　数

几　　何

三　角　函　数

平面解析几何

代　　数

第一章　集合、二次函数和幂函数

基 本 内 容

（一）　集合

1.　集合的概念及其表示方法

具有某种共同特性的事物的总体叫做集合；事物的个体叫做元素.

（1）　有限集与无限集：集合中所包含的元素的个数是有限个，这样的集合叫有限集. 集合中所包含的元素的个数是无限多个，这样的集合叫做无限集.

（2）　集合的有关符号：

$\in$——属于符号（适用于元素对集合的关系）；

$\notin$——不属于符号（适用于元素对集合的关系）；

$\subseteq$或$\supseteq$——包含符号（适用于集合对集合的关系）；

N——自然数集；　J——整数集；

Q——有理数集；　R——实数集；

ϕ——空集；

I——全集.

（3）　表示集合一般用列举法或描述法，对有关实数的集

合，也可直接用不等式或区间表示。

2．子集、等集、空集、交集、并集、全集、补集

（1）子集与真子集　若 $A\subseteq B$，则 A 叫 B 的子集；若 $A\subset B$，则A叫B的真子集。

（2）等集　若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$。

（3）空集　不含任何元素的集合。

（4）交集　既属于集合A，又属于集合 B 的一切元素的集合，叫做集合A和集合B的交集。记作$A\cap B$。

（5）并集　属于集合A，或者属于集合 B 的一切元素的集合叫A和B的并集，记作 $A\cup B$。

（6）全集　在某一问题中，若所有集合都是某个给定集合的子集，则这个给定的集合叫做全集，记为I。

（7）补集　$\bar{A}$表示A的补集（由全集I中所有不属于A的元素构成）。

（二）二次函数

1．函数的概念

如果在某变化过程中有两个变量 x、y，并且对于x在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y 都有唯一确定的值和它对应，那么变量 y 叫做变量 x 的函数。x 叫做自变量，x的取值范围叫做函数的定义域。与x的值对应的 y 的值叫做函数值。函数值的集合叫做函数的值域。

2．二次函数

定义：形如 $y=ax^2+bx+c$（a、b、c 是常数，$a\neq 0$）的函数叫做二次函数。利用配方法可得 $y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$。

图象：抛物线，其中a的正负决定开口方向$\begin{cases} a>0\text{开口向上；} \\ a<0\text{开口向下。} \end{cases}$

顶点坐标　$A\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$。

对称轴　$x=-\dfrac{b}{2a}$。

增减性　若 $a>0$，则当$x>-\dfrac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大，当 $x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 增大而减小；若 $a<0$，则当 $x>-\dfrac{b}{2a}$时，y随x增大而减小，若 $x<-\dfrac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大。

最小值　若$a>0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$时，$y_{\text{最小值}}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；

最大值　若 $a<0$，则当$x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{\text{最大值}}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

图象的画法：

（1）　描点法（列表，描点，画图）。

（2）　平移法$y=ax^2 \xrightarrow[m<0\text{向右平移}|m|\text{个单位}]{m>0\text{向左平移}|m|\text{个单位}}$

$$y=a(x+m)^2$$

$$\xrightarrow[n<0\text{向下平移}|n|\text{个单位}]{n>0\text{向上平移}|n|\text{个单位}} y=a(x+m)^2+n.$$

（3）　利用性质画　先找出抛物线的顶点坐标$\left(-\dfrac{b}{2a},\right.$

$\frac{4ac-b^2}{4a}$)，对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$，然后再找出抛物线上几个点（例如与 x 轴、y 轴的交点等），根据函数的增减性，可以把抛物线的大致形状画出来。

（三） 幂函数

1． **定义：**

函数 $y=x^n$ 叫做幂函数，其中 n 是常数。

2． **定义域：**

使 x^n 有意义的全体实数，可分四种情况：

（1） 当指数 n 是自然数时，x^n 的定义域是 R；

（2） 当指数 n 是正分数时，设为 $\frac{p}{q}$ $\left(\frac{p}{q}\text{是既约分数}\right)$

如果 q 是奇数，$x^{\frac{p}{q}}$ 的定义域是 R；

如果 q 是偶数，$x^{\frac{p}{q}}$ 的定义域是 $[0, +\infty)$；

（3） 当指数 n 是负整数时，设 $n=-k$，$x^n=\frac{1}{x^k}$，

如果 $x=0$，则 x^n 无意义，所以 x^n 的定义域是

$\{x|x\in R, x\neq 0\}$；

（4） 当指数 n 是负分数时，设 $n=-\frac{p}{q}$，则

$$x^n=\frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}=\frac{1}{\sqrt[q]{x^p}},$$

如果 q 是奇数，x^n 的定义域是 $\{x|x\in R, x\neq 0\}$。

如果 q 是偶数，x^n 的定义域是 $(0, +\infty)$。

3. **图象：**

（1） 当$n>0$时，例如$n=1$，$n=2$，$n=\frac{1}{2}$，如图1.1。

（2） 当$n<0$时，例如$n=-1$，$n=-2$，如图1.2。

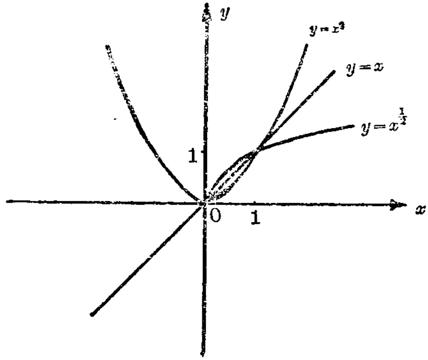

图 1.1

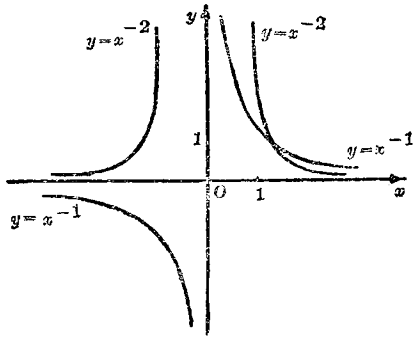

图 1.2

4. **性质：**

（1） 当$n>0$时：

（i） 共点性：图象都经过(1，1)和(0，0)两点；

（ii） 单调性：在第一象限内是增函数。

（2） 当$n<0$时。

（i） 共点性：图象都经过(1，1)点；

（ii） 单调性：在第一象限内是减函数。

（iii） 渐近线：在第一象限内，图象向上与y轴无限地接近，向右与x轴无限地接近。

（四） 函数的单调性和奇偶性

1. **单调性**

对于给定区间上的函数$f(x)$，在所给定的区间内，如果对于任意取两个自变量的值x_1和x_2，当$x_2>x_1$时，都有$f(x_2)$

$>f(x_1)$，那么就说函数 $f(x)$ 在这个区间上是增函数；当 $x_2>x_1$ 时，都有 $f(x_2)<f(x_1)$，那么就说函数 $f(x)$ 在这个区间上是减函数。

若函数 $f(x)$ 在某个区间内是常增的或常减的就称 $f(x)$ 在这个区间上是单调函数，这个区间就叫做 $f(x)$ 的单调区间。

2. 奇偶性

如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。

奇函数的图象关于坐标原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称。

例　　题

例 1　在______处填上符号 $\in$ 或 $\notin$：

$0\ \underline{\notin}\ N$，　$2\ \underline{\in}\ N$，　$-3\ \underline{\notin}\ N$，　$\frac{1}{2}\ \underline{\notin}\ N$，

$\sqrt{2}\ \underline{\notin}\ N$，　$0\ \underline{\in}\ J$，　$2\ \underline{\in}\ J$，　$-3\ \underline{\in}\ J$，

$\frac{1}{2}\ \underline{\notin}\ J$，　$\sqrt{2}\ \underline{\notin}\ J$，　$0\ \underline{\in}\ Q$，　$2\ \underline{\in}\ Q$，

$-3\ \underline{\in}\ Q$，　$\frac{1}{2}\ \underline{\in}\ Q$，　$\sqrt{2}\ \underline{\notin}\ Q$，　$0\ \underline{\in}\ R$，

$2\ \underline{\notin}\ R^-$，　$-3\ \underline{\notin}\ R^+$，　$\frac{1}{2}\ \underline{\in}\ R$，　$\sqrt{2}\ \underline{\in}\ R$.

例 2　设集合 $S=\{0, 1, 2\}$，写出 S 的所有的子集与真子集。

解： S 的所有子集是：ϕ，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0, 1\}$，$\{0, 2\}$，$\{1, 2\}$，$\{0, 1, 2\}$；

S的所有真子集是：ϕ，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0, 1\}$，$\{0, 2\}$，$\{1, 2\}$。

说明：（1）任何一个集合是它本身的子集。

（2）空集是任何集合的子集。

例 3 设 $I=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$，

$A=\{c, d, e, f\}$，$B=\{e, f, g\}$，

求证（1）$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$；

（2）$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$。

证明：已知 $A=\{c, d, e, f\}$，$B=\{e, f, g\}$

则 $\bar{A}=\{a, b, g, h\}$，$\bar{B}=\{a, b, c, d, h\}$，

（1）$A\cup B=\{c, d, e, f\}\cup\{e, f, g\}=\{c, d, e, f, g\}$。

$\overline{A\cup B}=\{a, b, h\}$，

$\bar{A}\cap\bar{B}=\{a, b, g, h\}\cap\{a, b, c, d, h\}=\{a, b, h\}$，

$\therefore\ \overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$。

（2）$A\cap B=\{c, d, e, f\}\cap\{e, f, g\}=\{e, f\}$。

$\overline{A\cap B}=\{a, b, c, d, g, h\}$，

$\bar{A}\cup\bar{B}=\{a, b, g, h\}\cup\{a, b, c, d, h\}$

$=\{a, b, c, d, g, h\}$，

$\therefore\ \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$。

例 4 图中 I 是全集，A、B 是 I 的两个子集，用阴影表示：（1）$\bar{A}\cup\bar{B}$（图1.3）；（2）$\bar{A}\cap\bar{B}$。（图1.4）。

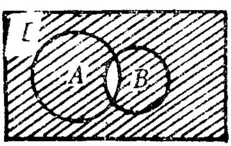

图 1.3

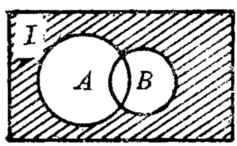

图 1.4

例 5 求下列函数的定义域：

① $y=3x-5$； ③ $y=\dfrac{\sqrt{4x+2}}{\sqrt[3]{3|x|-3}}$；

② $y=\dfrac{3x+1}{x-5}$； ④ $y=\dfrac{\lg(x-\sin 30^\circ)}{1-\sqrt{x-1}}$.

解： ① 定义域为一切实数；

② 要使函数有意义，必须有：

$x-5\neq 0$， 即 $x\neq 5$.

$\therefore$ 函数 $y=\dfrac{3x+1}{x-5}$ 的定义域是 $x\neq 5$ 的一切实数.

③ 要使函数有意义，必须有：

$$\begin{cases} 4x+2\geqslant 0, \\ \sqrt[3]{3|x|-3}\neq 0; \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x\geqslant -\dfrac{1}{2}, \\ |x|\neq 1; \end{cases}$$

也就是 $$\begin{cases} x\geqslant -\dfrac{1}{2}, \\ x\neq -1,\ x\neq 1. \end{cases}$$

故 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x<1$ 或 $x>1$.

$\therefore$ 函数 $y=\dfrac{\sqrt{4x+2}}{\sqrt[3]{3|x|-3}}$ 的定义域是

$$\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{2}\leqslant x<1\right\}\cup\{x\,|\,x>1\}.$$

④ 要使函数有意义，必须有：

$$\begin{cases} x-\sin 30^\circ>0, \\ 1-\sqrt{x-1}\neq 0, \\ x-1\geqslant 0, \end{cases} \quad 即： \quad \begin{cases} x>\dfrac{1}{2}, \\ x\neq 2, \\ x\geqslant 1. \end{cases}$$

故　$x\geqslant 1$ 但 $x\neq 2$。

$\therefore$　函数 $y=\dfrac{\lg(x-\sin 30^\circ)}{1-\sqrt{x-1}}$ 的定义域是 $x\geqslant 1$ 且 $x\neq 2$ 的一切实数。

说明：定义域的求法是：

设函数 $y=f(x)$。

（1）　若 $f(x)$ 是整式，定义域是全体实数。

（2）　若 $f(x)$ 是分式，即 $f(x)=\dfrac{p(x)}{Q(x)}$，定义域由 $Q(x)\neq 0$ 确定。

（3）　若 $f(x)$ 是偶次根式，$f(x)=\sqrt[2k]{p(x)}$ 时，定义域由 $P(x)\geqslant 0$ 确定。

（4）　若 $f(x)$ 是奇次根式，定义域是全体实数。

（5）　若 $f(x)$ 是对数式 $f(x)=\log_a g(x)$ 时，定义域由 $g(x)>0$ 确定。

例 6　已知下列条件，求二次函数的解析式。

（1）　图象经过点 $(-1, -6)$，$(1, -2)$ 和 $(2, 3)$；

（2）　图象的对称轴为直线 $x=1$，且过 $(0, 1)$ 点，并有最小值 -1。

解：（1）　设二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c$　　（1）

$\because$　图象过点 $(-1, -6)$，$\therefore$ 点的坐标适合 $y=ax^2+bx+c$，将 $x=-1$，$y=-6$ 代入（1）得 $a-b+c=-6$，

同理可得　　$a+b+c=-2$，

$4a+2b+c=3$。

解方程组 $\begin{cases} a-b+c=-6, \\ a+b+c=-2, \\ 4a+2b+c=3, \end{cases}$　　解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=2, \\ c=-5. \end{cases}$

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y=x^2+2x-5$。

（2） 设二次函数解析式为 $y=a(x+m)^2+n$ （2）

$\because$ 对称轴为 $x=1$ 并有最小值 -1。

$\therefore$ $m=-1$，$n=-1$代入（2）式得 $y=a(x-1)^2-1$。（3）

又$\because$图象过 (0, 1) 点，将 $x=0$，$y=1$ 代入（3）

得 $1=a(0-1)^2-1$ $\therefore$ $a=2$。

则 $y=2(x-1)^2-1$。即 $y=2x^2-4x+1$。

说明：在求二次函数表达式时，应根据不同的已知条件，恰当地选择不同的表达式，如条件（1）选一般式 $y=ax^2+bx+c$ 较好，条件（2）选顶点式 $y=a(x+m)^2+n$ 较好。

例 7 求二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$ 的图象的顶点坐标和对称轴方程，并画出它的图象。

解：将$-\frac{1}{2}x^2+2x+1$ 配方得

$$y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1=-\frac{1}{2}(x^2-4x-2)$$

$$=-\frac{1}{2}[(x-2)^2-6]=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3.$$

因此，$y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$ 的图象的顶点坐标为 (2, 3)，对称轴方程为 $x=2$。

列出下面 x 与 y 的对应数值表：

x	…	-1	0	1	2	…
y	…	$-1\frac{1}{2}$	1	$2\frac{1}{2}$	3	…