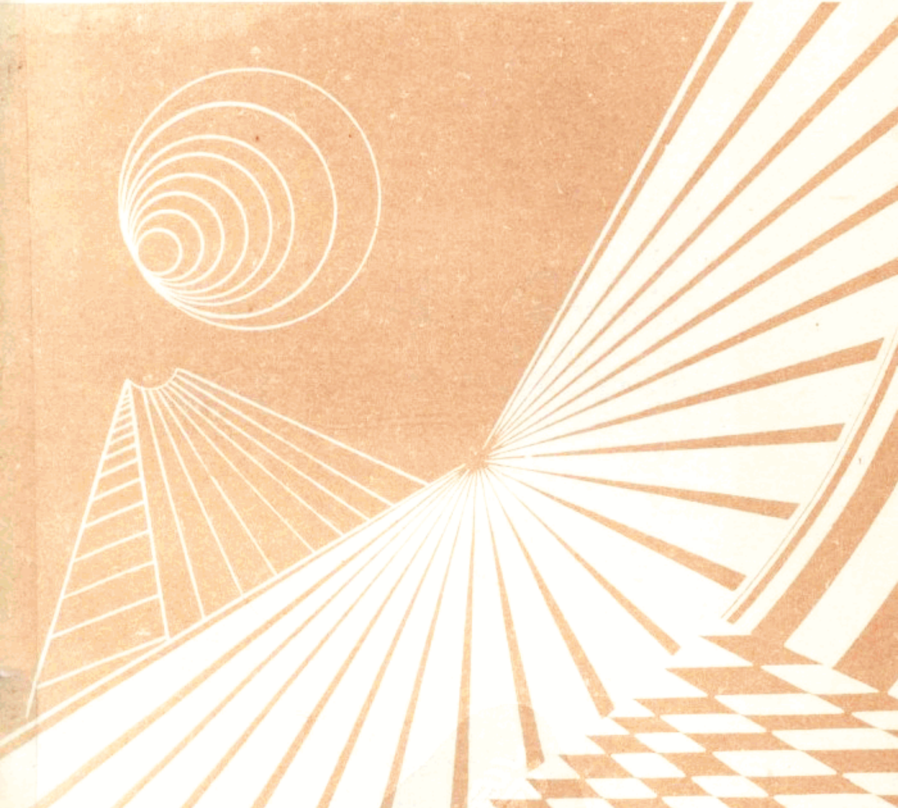
高中习题集

辽宁教育出版社



辽宁省普通教育教学用书审定
委员会审定　供毕业年级使用

数学

高中习题集

数学

辽宁省普通教育教学用书审定委员会审定
辽宁教育学院组织编写
魏超群　于长盈　郭大文　翟景春　张怡君　编

辽宁教育出版社
1992年·沈阳

辽新登字6号

高中习题集
数　学
辽宁省普通教育教学用书审定委员会审定
辽宁教育学院组织编写
魏超群　于长盈　郭大文　翟景春　张怡君　编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市北一马路108号）　沈阳新华印刷厂印刷

字数：230,000　开本：787×1092 1/32　印张：11
印数：1—91,400
1992年4月第1版　1992年4月第1次印刷

责任编辑：黄晓梅　责任校对：马　慧
封面设计：安今生　插　　图：潘智倩

ISBN 7-5382-1645-6/G·1217

定价：2.85元

编写说明

国家教委规定："当前，由于高三和初三年级使用的教材需补充必要的练习，为满足教学需要，各省级教育行政部门可以根据本地区教学的实际情况，统一组织编写一套配合课本内容、习题数量要求适当、质量较高的习题集或练习册，供本省高三、初三学生使用"，"其他各年级练习册一律取消"。经省教委批准，辽宁教育学院组织有丰富教学经验的省、市教学研究人员和中学教师，根据教学大纲的规定和教材的要求，并结合我省教学实际，编写了这套高中各学科的习题集，供我省高中毕业年级学生使用。

这套习题集密切配合现行教材，选编了利于发展学生智力、培养学生能力的习题，题型灵活多样，弥补了教材中习题的不足，减少了教师选题的困难，减轻了学生过重的课业负担，可以促进教学质量的提高。

这套习题集已经辽宁省普通教育教学用书审定委员会审查、审定。

参加本书编写的有：魏超群、于长盈、郭大文、翟景春、张怡君。

统稿：魏超群。

由于编写时间仓促，难免有疏漏之处。希望老师和同学们批评指正，以便再版时修改。

辽宁省普通教育教学用书审定委员会办公室

1991年12月

目　　录

第一部分　代　数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

范 例 分 析

例1.　设$A=\{x|\frac{6}{3-x}\in z,\ x\in z\}$，试用列举法表示集合A。

解　$\because \frac{6}{3-x}\in z$，$\therefore$ $3-x$整除6，即

$$3-x=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6.$$

$\therefore$　$x=2、4;\ 1、5;\ 0、6;\ -3、9.$

$\therefore$　$A=\{2,\ 4,\ 1,\ 5,\ 0,\ 6,\ -3,\ 9\}$.

说明：列举法与描述法是集合的基本表示方法．应能熟练地进行转换．

例2.　设集合$M=\{a,\ a+d,\ a+2d\}$，$N=\{a,\ aq,\ aq^2\}$，其中常数$a\neq0$。求使$M=N$的q的值．

解　由$M=N$，有$\begin{cases} a+d=aq, & \cdots\cdots① \\ a+2d=aq^2. & \cdots\cdots② \end{cases}$（Ⅰ）

或　$\begin{cases} a+d=aq^2, & \cdots\cdots③ \\ a+2d=aq. & \cdots\cdots④ \end{cases}$（Ⅱ）

由（Ⅰ）消去d，得 $(q-1)^2=1$，$\therefore$ $q=1$。

但此时$a=aq=aq^2=1$，与集合中元素的互异性相背，舍去。

由（Ⅱ）消去d，得 $2q^2-q-1=0$，　$\therefore$ $q=1$（舍）

或 $q=-\frac{1}{2}$。　$\therefore$ 当 $q=-\frac{1}{2}$时$M=N$。

说明：集合的确定性，及其元素的互异性、无序性，是集合的基本性质。解题时务必注意。本例就是根据元素互异性找出q的不合理的值。

例3. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{\sqrt[3]{9}-\left(\frac{1}{3}\right)^x}+\sqrt{\log_{0.1}\frac{3x-2}{2x+1}}$，

（2）$y=\ln(a^k-k\cdot 2^x)$，其中 $a>0$且 $a\neq 1$。

解（1）列不等式组

$$\begin{cases}\sqrt[3]{9}-\left(\frac{1}{3}\right)^x\geqslant 0, & \cdots\cdots①\\ \log_{0.1}\frac{3x-2}{2x+1}\geqslant 0. & \cdots\cdots②\end{cases}$$

由①得$3^{-x}\leqslant 3^{\frac{2}{3}}$，$\therefore$ $x\geqslant -\frac{2}{3}$……③

由②得 $0<\frac{3x-2}{2x+1}\leqslant 1$，由$\frac{3x-2}{2x+1}>0$得$x>\frac{2}{3}$

或 $x<-\frac{1}{2}$……④

由$\frac{3x-2}{2x+1}\leqslant 1$，得$\frac{x-3}{2x+1}\leqslant 0$，$\therefore$ $-\frac{1}{2}<x\leqslant 3$……⑤

综合③、④、⑤得　$\frac{2}{3}<x\leqslant 3$。

$\therefore$ 函数定义域为 $\frac{2}{3} < x \leqslant 3$。

（2）列不等式 $a^x - k \cdot 2^x > 0$，$\therefore \left(\frac{a}{2}\right)^x > k$。

当 $\frac{a}{2} > 1$，即 $a > 2$ 时，$\left(\frac{a}{2}\right)^x > 0$。若 $k \leqslant 0$，x 为任意实数；若 $k > 0$，$x > \log_{\frac{a}{2}} k$。

当 $0 < \frac{a}{2} < 1$，即 $0 < a < 2$ 且 $a \neq 1$ 时，$\left(\frac{a}{2}\right)^x > 0$。若 $k \leqslant 0$ 时，x 为任意实数；若 $k > 0$，$x < \log_{\frac{a}{2}} k$。

当 $\frac{a}{2} = 1$ 即 $a = 2$ 时，$\left(\frac{a}{2}\right)^x = 1$。若 $k \geqslant 1$，则定义域为 ϕ；若 $k < 1$，则 $x \in R$。

综上可知：当 $\begin{cases} a > 0、a \neq 1，2 \\ k \leqslant 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 2, \\ k < 1 \text{时} \end{cases}$ 定义域为 R；当 $\begin{cases} a > 2, \\ k > 0 \text{时} \end{cases}$ 定义域为 $(\log_{\frac{a}{2}} k, +\infty)$；当 $\begin{cases} 0 < a < 2, \\ k > 0 \end{cases}$ $a \neq 1$ 时，定义域为 $(-\infty, \log_{\frac{a}{2}} k)$。

说明：列、解不等式组是求函数定义域的基本方法。当式中含有字母参数时，要根据题中的条件进行讨论。

例4. **求函数** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (0 \leqslant x \leqslant 1) \\ x^2 & (-1 \leqslant x < 0) \end{cases}$ 的反函数。

解　在 $[0, 1]$ 上，由 $y = x^2 - 1$ 得 $x = \sqrt{y+1}\ (-1 \leqslant y \leqslant 0)$，

$\therefore$ 反函数为 $y = \sqrt{x+1}\ (-1 \leqslant x \leqslant 0)$。

在$[-1,0)$上，由$y=x^2$得$x=-\sqrt{y}$ $(0<y\leqslant1)$

∴反函数为 $y=-\sqrt{x}$ $(0<x\leqslant1)$。

∴所求的反函数为 $y=\begin{cases}\sqrt{x+1} & (-1\leqslant x\leqslant0)\\ -\sqrt{x} & (0<x\leqslant1).\end{cases}$

说明：函数在其单调区间上存在反函数。分段函数的反函数要逐段求。求得反函数后要注明其定义域。

例5. 求下列函数的值域：

(1) $y=x^2-x-\frac{1}{2}$ $(-1\leqslant x\leqslant1)$；

(2) $y=\frac{2x}{x^2+1}$；

(3) $y=2x^4+\frac{4}{x^2}$；

(4) $y=\frac{15}{3x^2-6x+17}$；

(5) $y=e^{\frac{1}{x-1}}$； (6) $y=\frac{1-\cos\theta}{3+\sin\theta}$。

解 (1) $y=f(x)=x^2-x-\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$。

对称轴 $x=\frac{1}{2}$。∵$\frac{1}{2}\in[-1, 1]$， ∴ $y_{\min}=-\frac{3}{4}$。

$y_{\max}=f(-1)=(-1)^2-(-1)-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$。

∴值域为$\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]$。

（2）由 $y=\frac{2x}{x^2+1}$ 有 $yx^2-2x+y=0$。 $\because$ $x\in R$,

$\therefore$ $\Delta=4-4y^2\geqslant0$。 $\therefore$ $y^2\leqslant1$ $\therefore -1\leqslant y\leqslant1$。

即值域为$[-1,1]$。

（3）在$y=2x^4+\frac{4}{x^2}$中，$x\neq0$,

$\therefore$ $x^2>0$。$y=2x^4+\frac{4}{x^2}=2x^4+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^2}\geqslant$

$3\cdot\sqrt[3]{2x^4\cdot\frac{2}{x^2}\cdot\frac{2}{x^2}}=3\cdot2=6$, $\therefore$ $y\geqslant6$。

即值域为 $[6,+\infty)$。

（4）$\because$ $y=\frac{15}{3x^2-6x+17}$, $\therefore$ $y\neq0$,

$\therefore\frac{15}{y}=3x^2-6x+17=3(x-1)^2+14\geqslant14$。

$\therefore\frac{15}{y}\geqslant14$, $\therefore$ $0<y\leqslant\frac{15}{14}$。

$\therefore$ 值域为$\left(0,\frac{15}{14}\right]$。

（5）$\because\frac{1}{x-1}$恒不为0，$\therefore y=e^{\frac{1}{x-1}}$恒不为1。

当$\frac{1}{x-1}<0$时，$0<e^{\frac{1}{x-1}}<1$, $\therefore$ $0<y<1$;

当$\frac{1}{x-1}>0$时，$e^{\frac{1}{x-1}}>1$, $\therefore$ $y>1$。

$\therefore$值域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$。

（6）令 $t=\frac{1}{y}$，则 $t=\frac{3-(-\sin\theta)}{1-\cos\theta}$. ∴ t 可视为单位圆上的动点 $(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ 与定点$(1,3)$连线的斜率. 设过点（1，3）的直线 l 的方程为 $y=k(x-1)+3$，即 l：$kx-y+3-k=0$. 令 $(0,0)$ 到 l 的距离等于1，

即$\frac{|3-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得$k=\frac{4}{3}$. 另一条切线是$x=1$，斜率不存在. ∴ $t\geqslant\frac{4}{3}$，即$\frac{1}{y}\geqslant\frac{4}{3}$.

∴$0\leqslant y\leqslant\frac{3}{4}$. 即值域为$\left(0,\frac{3}{4}\right]$

说明：求值域的基本途径是：①转化为二次函数，利用二次函数性质；②利用基本不等式；③通过变量代换；④通过求反函数的定义域；⑤转化为关于 x的二次方程，利用判别式. 值得注意的是函数式变形可能引起值域的改变，因此须检验和讨论.

本例（4）的解法是根据函数表达式特点选定的技巧方法.

例6. 判断函数$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -x^2-2x-3 & (x<0)\end{cases}$ 的奇偶性，并加以证明.

解　由函数图象的草图可判断$f(x)$是奇函数. 下面用定义证明之.

当$x>0$时，$-x<0$，$\therefore f(-x)=-(-x)^2-2(-x)-3$
$=-x^2+2x-3=-(x^2-2x+3)=-f(x)$；

当$x=0$时，$f(-0)=f(0)=0=-f(0)$；

当$x<0$时，$-x>0$，∴ $f(-x)=(-x)^2-2(-x)+3$

$=x^2+2x+3=-(-x^2-2x-3)=-f(x)$。

∴$f(x)$是奇函数。

说明：利用图象判断函数奇偶性，直观、简便，但论证性不强，不宜用于证明函数奇偶性。

例7. 已知函数$f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ $e\approx2.718$，

（1）判断奇偶性；（2）判断单调性；（3）求反函数。

解（1）$f(x)$定义域为R，且$f(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^x)$

$=-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=-f(x)$。 ∴ $f(x)$是奇函数。

（2）设任意的x_1、$x_2\in R$，且 $x_1>x_2$，则

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{2}(e^{x_1}-e^{-x_1})-\frac{1}{2}(e^{x_2}-e^{-x_2})$

$=\frac{1}{2}\left[(e^{x_1}-e^{x_2})+\left(\frac{1}{e^{x_2}}-\frac{1}{e^{x_1}}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}(e^{x_1}-e^{x_2})\left(1+\frac{1}{e^{x_1+x_2}}\right)$，

∵$e\approx2.7>1$，$x_1>x_2$，∴ $e^{x_1}>e^{x_2}$。又$e^{x_1+x_2}>0$，

$1+\frac{1}{e^{x_1+x_2}}>0$，$f(x_1)-f(x_2)>0$。

∴ $f(x)$在R上单调递增。

（3）由 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，有 $2y=e^x-e^{-x}$，

∴$e^{2x}-2ye^x-1=0$，∴ $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$。

注意到$e^x>0$，而$y-\sqrt{y^2+1}<0$，舍去$y-\sqrt{y^2+1}$，

$$\therefore e^x=y+\sqrt{y^2+1}.$$

$$\therefore x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}).$$

$\because f(x)$的值域为R，$\therefore f^{-1}(x)$定义域为R，

即$f(x)$的反函数为 $f^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ $(x\in R)$。

说明：透彻理解并熟练运用函数基本性质的定义研究解决问题，是一项重要的技能。要注意问题的细节。如本例（3），求反函数，开方后恰当进行根的取舍，是正确解决问题的关键。

习　题　一

一、选择题：

1. 在关系式① $\phi\subset\{a\}$，② $a\subset\{a\}$，③ $\{a\}\subseteq\{a\}$，④ $a\in\{a, b\}$，⑤ $\phi=\{0\}$，⑥ $\phi\in\{0\}$中，正确的是（　）

（A）①、②、③、④。（B）①、③、④。

（C）②、③、④、⑤。（D）①、③、⑤。

2. 集合 $\{a, b, c, d\}$ 的非空真子集的个数是

（A）16。（B）15。（C）14。（D）13。

3. 满足条件$\{1, 2, 3\}\subset M\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$的集合$M$的个数是（　）

（A）8。（B）7。（C）6。（D）5。

4. 集合$M=\{(x, y)\mid ax+y-3=0\}$，$N=\{(x, y)\mid x-y-b=0\}$，若 $M\cap N=\phi$，则a、b的值为（　）

（A）$a=1$，$b\neq 3$。（B）$a=-3$，$b\neq -1$。

（C）$a=-1$，$b\neq -3$。（D）$a=-1$，$b=-3$。

5. 若集合 $A=\{x\mid \arcsin 0\leqslant x\leqslant \arccos(-1)\}$，　$B=$

$\{x \mid \arcsin\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\}$，$I = R$，则$A \cap \overline{B}$ 是（ ）

（A）$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. （B）$\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$.

（C）$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$. （D）$\left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]$.

6. 条件甲：$A \supseteq B \supseteq C$； 条件乙：$A \cap B \cap C = C$. 则甲是乙的（ ）

（A）充分不必要条件. （B）必要不充分条件.

（C）充要条件. （D）既非充分又非必要条件.

7. 设集合$M = \{$平面上直线的 倾 斜角$\}$，$N = \{$复数的辐角主值$\}$，$P = \{$空间两异面直线所成的角$\}$， $Q = \{$广义极坐标系中点的极角$\}$， 则下列关系中正确的是（ ）

（A）$M = N = P = Q$. （B）$P = M \subset N = Q$.

（C）$P \subseteq M \cap N \subseteq Q$. （D）$P \subset M \subset N \subset Q$.

8. 满足$A \cup B = \{a, b\}$的集合A、B的组数是（ ）

（A）7. （B）8. （C）9. （D）10.

9. S、T分别是方程 $x^2 - px + 15 = 0$与 $x^2 - 5x + q = 0$的解集，且$S \cap T = \{3\}$，则$p + q$的值为（ ）

（A）14. （B）11. （C）7. （D）5.

10. 若$A = \left\{x \,\middle|\, \frac{x+3}{x-5} \leqslant 0\right\}$， $B = \{x \mid x^2 - 2x - 15 \leqslant 0\}$，

则A与B的关系是（ ）

（A）$A = B$. （B）$A \cap \overline{B} = R$. （C）$A \subset B$.

（D）$A \supset B$.

11. 若$A = \{a \mid a = 3n + 1, n \in Z\}$，$B = \{b \mid b = 3n - 2, n \in Z\}$，$C = \{c \mid c = 6n + 1, n \in Z\}$， 则A、B、C间 的 关系

为（ ）

（A） $A=B\subset C$。 （B） $A\supset B\supset C$。

（C） $A=B\supset C$。 （D） $A\subset B=C$。

12. 集合$M=\{y\,|y=x^2-4x+1,\ x\in R\}$，$N=\{y\,\|\,y+6|>1\}$ $P=\{y\,|y=\sqrt{x^2-1},\ |x|\geqslant 1\}$，则$M$、$N$、$P$间的关系为（ ）

（A） $P\subset M\subset N$。 （B） $P\subset N$，$M\cap N\neq\phi$。

（C） $P=M\supset N$。 （D） $P=N\supset M$。

13. 设 $A=\{z\,|\,|z-1|=1, z\in C\}$，$B=\{z\,|\,|z|=|z-2|, z\in C\}$，则$A\cap B$是（ ）

（A） $\{(1,\ 1),\ (1,\ -1)\}$。 （B） $\{1+i,\ 1-i\}$。

（C） $\{(1,\ 1),\ (1,\ -1)\}$。 （D） $\{i,\ -i\}$。

14. 设有集合A、B及由A到B的对应法则f；a、 b分别是A、B的元素．下列各对应法则中构成从集合A到集合 B 的映射的是（ ）

（A） $A=\{0,\ 1,\ 10, 100\}$，

$B=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$，f：$a\to b=\lg a$。

（B） $A=\{0,\ 1,\ 10,\ 100\}$，

$B=\{0,\ 10.1,\ 0.01\}$，f：$a\to b=\dfrac{1}{a}$。

（C） $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，

$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$，$f$：$a\to b=2a+1$。

（D） $A=\left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi\right\}$，

$B=\{-1,\ 1\}$，f：$a\to b=\cos a$。

15. 下列各组函数中，表示同一函数的是（ ）