

第 2 辑

SHUXUE SIXIANG GAILUN
TUXING YU TUXING GUANXI DE CHOUXIANG

数学思想概论

图形与图形关系的抽象

※史宁中/著※



NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS
WWW.NENUP.COM

东北师范大学出版社

史宁中/著

第 2 辑

SHIUXUE SIXIANG GAILUN
TUXING YU TUXING GUANXI DE CHOUXIANG

数学思想概论



NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS
WWW.NENUP.COM

东北师范大学出版社 长春

图书在版编目 (CIP) 数据

数学思想概论 (第2辑) —— 图形与图形关系的抽象 / 史宁中著. — 长春: 东北师范大学出版社, 2009. 1
ISBN 978 - 7 - 5602 - 5576 - 7

I. 数… II. 史… III. ①数学—思想方法—高等学校
教学参考资料 ②数学—思想方法—专业学校—教学
参考资料 IV. G. 01 - 0.

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 040458 号

责任编辑: 杨述春 刘晓军 封面设计: 宋 超
 责任校对: 余 天 责任印制: 张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号 (130024)

销售热线: 0431—85687213

传真: 0431—85691969

网址: <http://www.nenup.com>

电子函件: sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

长春市永昌印业有限公司印装

长春市朝阳区义和路 25—1 号 邮编· 130021

2009 年 1 月第 1 版 2009 年 1 月第 1 次印刷

幅面尺寸: 170 mm×227 mm 印张: 14.75 字数: 180 千

定价: 26.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 可直接与承印厂联系调换

目录

CONTENTS

- 第一讲 图形的认识 /1**
- § 1.1 图形抽象与人类文明 /1
 - § 1.2 图形大小的计算 /8
 - § 1.3 直角三角形 /13
- 第二讲 图形的表示 /21**
- § 2.1 最初的几何命题 /22
 - § 2.2 正多面体 /26
 - § 2.3 地球是圆的 /28
- 第三讲 图形抽象的思想基础 /34**
- § 3.1 关于概念 /35
 - § 3.2 关于证明 /40
- 第四讲 图形抽象的典范 /47**
- § 4.1 欧几里得《几何原本》概述 /48
 - § 4.2 定义、公设和公理 /52
 - § 4.3 命题的逻辑和叙述 /57
- 第五讲 几何作图及相关的数学发展 /62**
- § 5.1 线段的四则运算和根式运算 /63
 - § 5.2 由“尺规作图”得到的集合 /68

数学思想概论

§ 5.3 不可作图问题 /71

第六讲 平行线及相关的数学发展 /79

§ 6.1 平行公设的改写 /81

§ 6.2 存在两条以上的平行线:罗巴切夫斯基几何 /85

§ 6.3 不存在平行线:黎曼几何 /91

第七讲 公理体系的数学发展 /98

§ 7.1 研究对象的符号化 /102

§ 7.2 论证过程的形式化 /105

§ 7.3 公理体系的合理性 /111

第八讲 图形的量化 /119

§ 8.1 坐标系产生的数学背景 /121

§ 8.2 解析几何:图形的位置 /129

§ 8.3 度量几何:图形的运动 /138

第九讲 图形的变换 /153

§ 9.1 平面的图形变换 /155

§ 9.2 空间的图形变换 /169

§ 9.3 拓扑变换 /175

第十讲 数学的抽象 /184

§ 10.1 争论的开始 /186

§ 10.2 争论的核心 /196

§ 10.3 数学的抽象 /217

人名索引 /227

第一讲 图形的认识

阅读提示

除了火的使用之外，文字的发明应当是人类文明的开始，而这个发明是从图形的抽象开始的。如果说人类最初发明象形文字是为了与天神、与祖先交流的话，那么人类发明拼音文字则完全是为了与人的交流。早期的图形抽象，核心是把三维空间的物体用线条描绘在二维平面上。

图形成为数学研究对象的真正动力是土地测量等生产实践。金字塔是人类创造的奇迹，金字塔的建造体现了古代埃及人已经掌握了相当精确的几何学知识。几乎所有的古代文明都研究了直角三角形，并且在许多古代文明的历史文献中都明确地记载了与直角三角形的边长关系密切的三个数值：3，4，5。

古埃及人、古巴比伦人以及古代中国人在日常生活和生产实践中创造出了实用而丰富多彩的经验几何学。

§ 1.1 图形抽象与人类文明

图形与数量一样，都是人们在日常生活和生产实

践中遇到的最为本原的数学对象。由于图形比数量更加直观，也更加生动，因此，人们对图形的认识早于对数量的认识，人们对图形的抽象早于对数量的抽象，甚至可以说，人类创造自己的文明是从图形的抽象开始的。人们对图形的抽象的第一步是描绘物体的外部形象，其核心是把三维空间的物体用线条描绘在二维平面上。在法国的拉马什洞穴和西班牙的阿尔塔米拉洞穴发现的、用线条描绘动物形象的岩画，被确认大约是距今一万五千年前的作品，这比人类发明文字符号和数字符号要早得多，因为古巴比伦的楔形文字距今至多五千年，那是现今为止发现的最早的文字。

那时的人类还处在▶
新石器时代，刚刚
会制作石器工具。

在东方也发现了大量的史前洞穴岩画，根据专家考证，制作这些岩画的目的是为了宗教祭祀而不是为了艺术，因为其中出现了许多虚实相间的、抽象的几何图形，比如印度的拉科杰瓦尔岩画和中国的贺兰山岩画^①。后来，人们用抽象的几何图形来记述事情和传递信息，这便是象形文字的前身。虽然现代文明中仍然使用真正意义上的象形文字的民族已经是寥寥无几了，但是，我们依然可以作这样的猜测：最初

在那个时代，制作▶
这些岩画是相当艰
辛的，需要极大的
热忱和耐力，比如
贺兰山岩画。

① 这是中国国家邮政局 1998 年为贺兰山岩画发行的邮票。



的文字都是象形文字。之所以可以作这样的猜测，与人们最初发明文字的动机有关。文字是表意符号，是传递信息的工具，那么在远古时代，人们必须借助符号来传递信息的对象是什么呢？与制作岩画的目的一样，主要是上天、鬼神和祖先，是那些看不见摸不到的、不借助符号就无法传递信息的神灵，因此文字产生的主要动机就是为了祭祀，是为了祭天神、祭祖先和占卜。古巴比伦的楔形文字、古埃及文字、汉文字中的甲骨文以及现今仍然活在人间的纳西族的东巴文字（参见图 1 - 1），都是最好的例证。

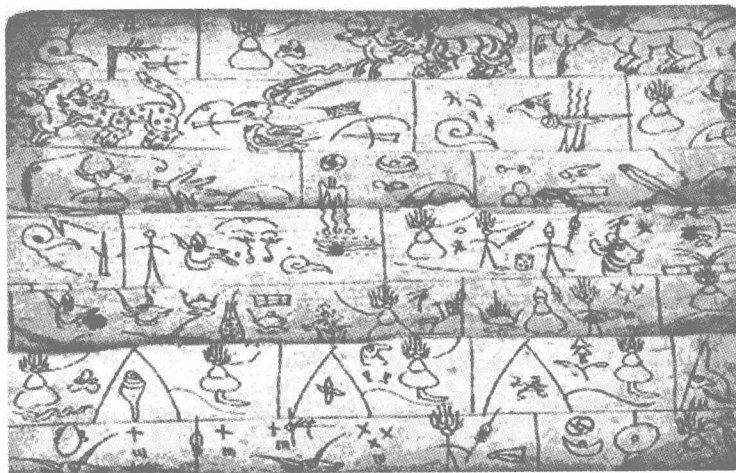


图 1 - 1 古代东巴经书（丽江市玉龙纳西族自治县鲁甸乡）

古巴比伦的楔形文字产生于两河流域，人们用削尖的芦管在湿泥版上刻写楔形文字，然后将泥版晒干，这种泥版比埃及的纸草书更容易保存，这是迄今为止发现的最早的文字，距今有五千年的历史。虽然

从形状上看楔形文字似乎与图形无关，但最初也是从象形文字演变过来的^①（参见图 1 - 2）。

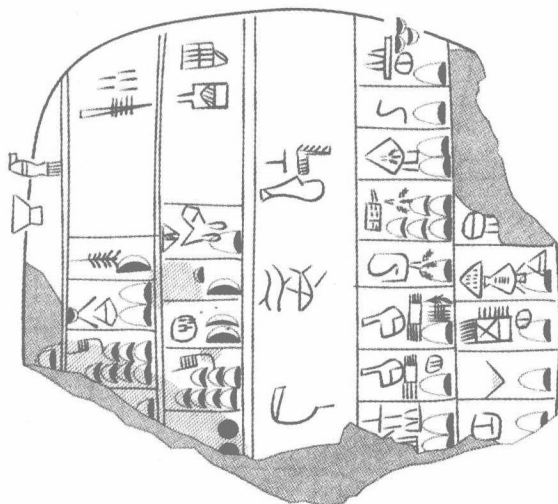


图 1 - 2 最初的楔形文字 (ATU 1, 632^②)

古埃及象形文字 Hieroglyphic 一词的直译应当是“神圣的雕刻”，因为这是由两个单词组成的词，一个单词是 Hiero（神圣），一个单词是 Glyph（雕刻），这蕴含着人们最初发明象形文字时的敬畏的神圣感。

1899 年金石学家王懿荣^③发现了甲骨文，后经罗

① 参见：G. Driver, *Semitic Writing*, London: Oxford University Press, 1948.

② 参见：Robert K. Englund, *Proto-Cuneiform Texts From Diverse Collections*, Berlin: Gebr. Mann Verlag, 1996.

③ 王懿荣（1845~1900），字正儒，一字廉生，山东福山（今烟台市福山区）古现村人。中国近代金石学家，甲骨文的发现者和爱国志士。

振玉、王国维^①等著名学者开创性的研究，不仅把中国有文字的历史提前了一千多年^②，而且使得司马迁^③《史记》中记载的中国历史更加确切。甲骨文主要是指殷墟^④甲骨文，是商代后期（公元前14世纪～前11世纪）用于占卜记事而刻在龟甲和兽骨上的文字，虽然甲骨文与现代汉字有较大的差异，原始图画文字的痕迹还比较明显，但已经具备了“象形、会意、形声”等现代汉字的造字方法（参见图1-3）。

◀比如商王朝的传承，考古的发现证实《史记》中的记载几乎无误，应当注意到，《史记》的著书年代与商王朝相隔一千多年。



图1-3 甲骨文字（殷商武丁早期《征讨卜辞》）

-
- ① 王国维（1877～1927），字伯隅、静安，号观堂、永观，浙江海宁人。近代中国著名学者，杰出的古文字学家、国学大师。
- 罗振玉（1866～1940），祖籍浙江省上虞县，客籍江苏省淮安县（今江苏省淮安市楚州区）。
- ② 参见：王宇信，杨升南主编。《甲骨学一百年》。北京：社会科学文献出版社，1999。
- ③ 司马迁（公元前145～前90），字子长，西汉夏阳龙门人。我国伟大的史学家、文学家，所著《史记》是中国第一部纪传体通史，被后人誉为“史家之绝唱，无韵之离骚”。（鲁迅）
- ④ 殷墟在现今河南安阳小屯村一带，商王盘庚于公元前14世纪左右将商王朝迁都于此，至纣亡国，历8代12王273年。

不仅仅是象形文字，下面的故事促使我们猜想拼音文字也是从几何图形演变而来的。拿破仑^①远征埃及时，他的部下 1799 年在罗塞塔城附近发现了一块黑色玄武岩的断碑，这便是著名的罗塞塔石碑（Rosetta Stone）。这个石碑经历了二千多年的风雨，现在矗立在大英博物馆埃及厅的入口处。石碑上面有三种字体，最上面是古埃及的象形文字夹杂着图形符号，中间是古埃及的民书体文字，下面是希腊文字，参见图 1 - 4。人们判断这三种字体记述的是同一件事情，这

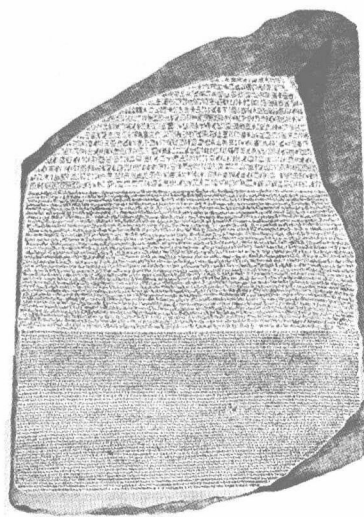


图 1 - 4 罗塞塔碑文

样就可以借助希腊文字来猜测古埃及象形文字，但是

① 拿破仑·波拿巴（Napoleon Bonaparte, 1769~1821），法兰西第一共和国第一执政（1799~1804），法兰西第一帝国及百日王朝的皇帝（1804~1814, 1815），法兰西共和国近代史上著名的军事家和政治家，曾经占领过西欧和中欧的大部分领土，使法国资产阶级革命的思想得到了更为广泛的传播。

人们始终无法彻底解释这些古埃及象形文字，因为文字中夹有一些抽象图形反复出现。1824年，法国语言学家商博良^②(Champollion, 1790~1832)推测那些古埃及象形文字不单纯是表意符号，更多的是发音符号所表示的音节文字，才揭开了这个千古之谜^③。我们知道，现在使用的欧洲文字中的大多数都与古拉丁文字有关，古拉丁文字又与古希腊文字有关，而古希腊文字又与古埃及文字有关，这些文字在本质上都是拼音文字，因此，商博良的推测说明：**在最初阶段，拼音文字的符号表达借助了象形文字。**

◀据说，是受数学家傅立叶^①的影响商博良才开始了对古埃及文字的研究。

如果说人类最初发明象形文字是为了与天神、与祖先交流的话，那么人类发明拼音文字则完全是为了与人的交流。除了火的使用之外，文字的发明应当是人类文明的开始，而这个发明是从图形的抽象开始的，虽然说这种抽象谈不上什么清晰的数学意义或者几何学意义，但是这种抽象为未来几何学的形成和发展奠定了深厚的文化基础，其核心就是我们已经说过的，把三维空间的物体用线条描绘在二维平面上。纵观人类文明的形成，酝酿的时间往往要比后来快速发展的时间还要长远得多。

◀自从发明了文字，信息的传递才有了可靠的载体。因此，人们称没有文字记载以前的文化为史前文化。

① 傅立叶 (J. Fourier, 1768~1830)，法国数学家、物理学家。因固体中热传导方式的研究而闻名，关于波动及其周期性运动的研究也非常深刻，成为数学中的一个分支，被命名为傅立叶分析。

② 商博良 (Champollion, 1790~1832)，法国语言学家、历史学家。

③ 参见：中国大百科全书编委会. 中国大百科全书光盘 (1.1版, 考古卷) [M/CD]. 北京：中国大百科全书出版社，2000.

§ 1.2 图形大小的计算

使得图形成为数学研究对象的真正动力，还是土地测量等生产实践。几乎所有涉及数学史的书都要提到古埃及的几何学，并且都认为几何学起源于古埃及。几何学之所以能够在古埃及得以发展，是与古埃及人的生活条件有关。古埃及地处非洲北部，与非洲的大部分平原一样，北非也是干旱荒芜之地，只有周期出现的尼罗河泛滥才给这片土地带来生机和活力。尼罗河每年6月份开始泛滥，洪水大约维持四个月，于是人们在每年10月份洪水退去、土地干涸后开始播种，第二年尼罗河泛滥前收获完毕。当时洪水泛滥之宏伟是现代人难以想象的，古希腊历史学家希罗多德^①（Herodotus，公元前484～前425）曾经到过埃及，他在著作《历史》中记载^②：

尼罗河在泛滥的时候，它不仅泛滥到三角洲上去，而且也泛滥到被认为是属于利比亚和阿拉伯的那些地方上去；它泛滥到离河岸有两天的路程的地方，有时远些，有时则近些。

当尼罗河泛滥到地面上来的时候，只有市镇才可以被看到高高的在水面之上并且是干燥的，和爱琴海

① 希罗多德（Herodotus，公元前484～前425），古希腊历史学家，被誉为“历史之父”。所著《历史》一书共9卷。

② 希罗多德著. 历史 [M]. 王嘉隽译. 北京：商务印书馆，1959：283，316.

上的岛屿非常相似。只有这些市镇露在水面之上，而埃及的其他地方则完全是一片水。……船只实际上就是经过金字塔的近旁的……

尼罗河泛滥对于古埃及人们的生活以及经济发展影响之重大，甚至政府的税收政策也与洪水有关。国家规定：根据每年洪水的高度和耕种的土地面积征税，关于这一点，希罗多德在《历史》这部书中是这样记载的^①：

◀河水泛滥诱发丈量土地，这是几何学产生的重要原因。

如果河水冲毁了一个人分得的土地的任何一部分土地，这个人就可以到国王那里去把发生的事情报告他，于是国王便派人前来调查并测量损失地段的面积，今后他的租金就要按照减少后的土地面积来征收了。我想，正是由于有了这样的做法，埃及才第一次有了量地法，而希腊人又在那里学到了它。

希罗多德是公元前5世纪的人，他关于古希腊人是从古埃及那里学到几何学的论述应当是有道理的。事实上，现在通用的英文几何一词 geometry 源于古希腊语 γεωμετρία，就是土地测量的意思，因为这个词是由 γη（土地）和 μετρία（测量）复合而成。也就是说，古希腊人从古埃及人那里学到了几何学。

◀也有的学者直接把希罗多德文中的量地法翻译为几何。

古埃及人发明几何学完全是为了实际的需要，他

^① 希罗多德著. 历史 [M]. 王嘉隽译. 北京: 商务印书馆, 1959: 321.

们创造了一套有效的计算土地面积的方法，其中包括三角形、长方形和梯形，还包括圆面积的近似公式，这些被记录在公元前 1700 年左右的莱茵德纸草书^①上（详见《数学思想概论》第一辑^②第四讲中关于“圆周率”的讨论）。现存的文献表明，虽然古埃及人并没有明确给出面积的定义，但是，古埃及人很清楚地知道：面积是对于平面物体大小的度量，他们很可能就是用长乘以宽来度量长方形的面积、并且把这种度量作为最基本的面积度量元素。如果是这样的话，那么这种思想是极为重要的，这就是现今大学数学教科书中普遍使用的勒贝格^③测度的原形。我们之所以可以做这样的猜测，是因为在莱茵德纸草书上记载^④，古埃及人用“四边形两组对边之和的一半的乘积”作为这个四边形的面积，如果令一个四边形的四条边依次为 a, b, c 和 d ，那么这个四边形的面积公式为

其实，直到今天，人们在现实生活中仍用类似的方法估算四边形（特别是不规则四边形）的面积。

$$\frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2}.$$

显然，当这个四边形为长方形，即 $a=c$ 和 $b=d$ 时，面积恰为“长乘以宽”。很多学者认为这个近似

① “莱茵德纸草书”（Rhind Papyrus）是公元前 1650 年左右的埃及数学著作，属于世界上最古老的数学著作之一。作者是书记官阿默斯。内容似乎是依据了更早年代（公元前 1849 年～前 1801 年）的教科书，是为当时包括贵族、祭司等知识阶层而作的。最早发现于埃及底比斯的废墟中。公元 1858 年由英国的埃及学者莱因德（A. H. Rhind）购得，故名“莱茵德纸草书”。现藏于伦敦大英博物馆。该纸草书全长 544 厘米，宽 33 厘米。

② 本书“第一辑”指：史宁中著，数学思想概论（第一辑）：数量与数量关系的抽象。长春：东北师范大学出版社，2008。

③ 勒贝格（H. Lebesgue, 1875～1941），法国数学家。他对数学的主要贡献属于积分领域，即勒贝格积分。

④ 参见：依夫斯著，数学史上的里程碑。欧阳绛，等译。北京：北京科学技术出版社，1990。

公式太粗糙，但是我们应当知道，古埃及人发明这个公式是为了测量耕种用的土地，而耕种用地大多近似为长方形或者直角三角形，并且古埃及人还知道，直角三角形的面积为长方形面积的一半。

最让人们吃惊的是古埃及人关于体积的计算，虽然古埃及人并没有给出体积的定义，但是他们清晰地用底面积乘以高来计算体积，莱茵德纸草书上的第 41 题就是一个求体积的问题：

有一个圆柱形的仓库，底部圆面的直径是 9，高是 10，求体积。

得到的结论是 $10 \times 64 = 640$ ，显然这是高与底面积的乘积。计算底面积即圆的面积的公式是：

$$S = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2,$$

其中 d 为圆的直径，因为在这个问题中 $d=9$ 可以得到 $S=8 \times 8=64$ 。我们知道，圆面积的计算公式为 $S = \frac{\pi d^2}{4}$ ，令其等于 64 可以解得 $\pi = \frac{256}{81} = 3.1605$ ，这与我们在第一辑“圆周率”那一节得到的结果是一致的。

莫斯科纸草书^①上的第 14 题是一个更为复杂的求体积的问题，原题如下：

◀ 由这个例子也可以看到，没有数学符号的表达，要清晰地阐述一个数学命题是非常困难的。

① 与莱茵德纸草书一样，也是在用纸莎草压制成的草片上书写的古埃及的数学知识，由俄国贵族戈列尼雪夫于 1893 年在埃及购得，现藏于莫斯科普希金精细艺术博物馆。

如果有人告诉你，一个截四棱锥体高为 6，底边长为 4，顶边长为 2，你就将这个 4 平方，得到 16；又将它加倍，得到 8；将 2 平方，得到 4。把 16，8，4 加起来得到 28。你要取 6 的三分之一，得到 2。你要取 28 的 2 倍，得到 56。看，它是 56，你会知道它是对的。

把其中的解题方法用现代符号表述：设上面的正方形的边长为 a ，下底正方形边长为 b ，高为 h ，那么截四棱锥的体积公式是

$$V = \frac{1}{3}h (a^2 + ab + b^2),$$

把 $a=2$ ， $b=4$ 和 $h=6$ 代入上面的公式，可以得到 $V=56$ 。显然，当 $a=b$ 时，上面的公式恰为底面积乘以高。计算体积是一件非常困难的事情，在今天，许多计算体积公式的证明需要利用微积分的方法，而在四千多年以前的古埃及人就得到了如此复杂的公式，实在是一件不可思议的事情。

金字塔是人类创造的奇迹，金字塔的建造体现了古埃及人已经掌握了相当精确的几何学知识。以其中最大的胡夫 (Khufu)^① 金字塔为例进行说明，这是一个底为四方形的锥形体，原高 146.5 米（现高 138 米），底边原长 233 米（现长 227 米）。令人吃惊的是，四个底边长度的误差仅为 1.6 厘米，这是底边长

① 胡夫 (Khufu，全名胡尼胡夫)，埃及第四王朝第二位法老，希腊人称他为奇阿普斯 (Cheops)。