理工类本科生用书

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

高等代数

■ 罗文强 赵晶 彭放 苗秀花 刘智慧 编

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

理工类本科生用书

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

（中国地质大学“十一五”教材建设项目资助）

高等代数

■ 罗文强 赵晶 彭放 苗秀花 刘智慧 编

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/罗文强,赵晶,彭放,苗秀花,刘智慧编.—武汉:武汉大学出版社,2009.4

21世纪高等学校数学系列教材

ISBN 978-7-307-06887-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①罗… ②赵… ③彭… ④苗… ⑤刘… Ⅲ.高等代数—高等学校—教材 Ⅳ.O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第021107号

责任编辑:李汉保　　责任校对:刘 欣　　版式设计:马 佳

出版发行:**武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:通山金地印务有限公司

开本:787×1092 1/16 印张:22.75 字数:455千字 插页:1

版次:2009年4月第1版 2009年4月第1次印刷

ISBN 978-7-307-06887-2/O·401 定价:30.00元

21 世纪高等学校数学系列教材

编 委 会

内容简介

本书共十二章，主要内容包括预备知识，多项式，行列式，线性方程组，矩阵，二次型，线性空间，线性变换，λ-矩阵，欧几里得空间，双线性函数，MATLAB 软件在高等代数中的应用. 每章配有小结和较为丰富的例题、习题. 书末附有习题答案与提示.

本书可以作为应用数学、信息与计算等相关专业本科生高等代数课程(120 学时左右，不包括第 11 章和第 12 章)一学年的教材，也可以作为同类课程的教学参考书.

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学. 长期以来,人们在认识世界和改造世界的过程中,数学作为一种精确的语言和一个有力的工具,在人类文明的进步和发展中,甚至在文化的层面上,一直发挥着重要的作用. 作为各门科学的重要基础,作为人类文明的重要支柱,数学科学在很多重要的领域中已起到关键性甚至决定性的作用. 数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的. 发展数学科学,是推进我国科学研究和技术发展,保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要. 高等学校作为人才培养的摇篮和基地,对大学生的数学教育,是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面,而教材建设是课程建设的重要内容,是教学思想与教学内容的重要载体,因此显得尤为重要.

为了提高高等学校数学课程教材建设水平,由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议、策划,组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会,在一定范围内,联合多所高校合作编写数学课程系列教材,为高等学校从事数学教学和科研的教师,特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台. 通过该平台,联合编写教材,交流教学经验,确保教材的编写质量,同时提高教材的编写与出版速度,有利于教材的不断更新,极力打造精品教材.

本着上述指导思想,我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材. 旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平.

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有:武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学(福建泉州)、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校.

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广,为了便于区分,我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别,如:数学类本科生教材,注明:SB;理工类本科生教材,注明:LGB;文科与经济类教材,注明:WJ;理工类硕士生教材,注明:LGS,如此等等,以便于读者区分.

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出

版社之一,在国内有较高的知名度和社会影响力.武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务.我们愿与各位朋友真诚合作,力争使该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材,为高等教育的发展贡献力量!

21 世纪高等学校数学系列教材编委会

2007 年 7 月

前　言

高等代数是应用数学、信息与计算等相关专业本科生的重要基础课之一,这门课程的主要任务是培养学生的抽象思维能力,逻辑推理能力,会用代数原理和方法解决实际问题,并为后续的课程学习提供必备的基础,同时也是数学等相关专业硕士研究生入学考试的一门必考科目.高等代数的主要内容为多项式,行列式,线性方程组,矩阵,二次型,线性空间,线性变换,λ-矩阵,欧几里得空间.这门课的主要特点是概念多,定理证明多,内容比较抽象且前后联系紧密,环环相扣.在这门课程的学习过程中,许多同学反映有些内容抽象不易理解,部分习题难以完成,所学内容不知在哪些方面有所应用.针对上述问题和本课程的教学特点,我们参阅近年来出版的相关教材,结合我们的教学实践,编写了这本高等代数教材,在编写过程中重点考虑以下几个方面:

一、在内容安排上,将集合、映射、数域、数学归纳法作为预备知识写成一章,为教学提供方便;将拉普拉斯(Laplace)定理直接列入行列式的行列展开一节中,作为行列式按一行(列)展开的直接推广,这样便于学生理解;将若尔当(Jordan)标准形和若尔当(Jordan)标准形的理论推导及应用放在同一章里,使得若尔当(Jordan)标准形的理论及应用更加系统化.

二、由于高等代数有些内容比较抽象,在编写过程中,增加了一些例题,帮助学生加深对课程内容的理解,提高解题的能力.习题按章配备,增加了国内部分高等学校的考研原题,帮助同学提高其应试能力,为顺利地通过研究生考试打下良好的基础.书末附有习题答案与提示.

三、目前以矩阵为基本计算单元的数学计算软件发展较快,日趋成熟,在自然科学、工程计算等领域中有广泛的应用,MATLAB 软件就是其中的代表.为加强高等代数的应用性,提高学生的学习兴趣,本书增加了 MATLAB 软件在高等代数中应用一章.

本书由罗文强主持编写并统稿.其中第 1 章,第 8 章,第 9 章,第 11 章由罗文强负责编写;第 3 章,第 10 章由赵晶负责编写;第 4 章,第 12 章由彭放负责编写;第 5 章,第 7 章由苗秀花负责编写;第 2 章,第 6 章由刘智慧负责编写.

本书可以作为应用数学、信息与计算等相关专业本科生高等代数课程一学年的教材,全书的教学内容约需 120 学时完成(不包括第 11 章和第 12 章).

本书的出版得到了中国地质大学“十一五”教材建设项目资助.在编写出版过

程中得到中国地质大学教务处、数理学院的领导和教师的大力支持,在此对他们表示感谢.

由于作者水平所限,书中难免有不妥和缺点,敬请读者指正.

作 者

2008 年 11 月

目 录

第1章　预备知识

§1.1　集　　合

集合是数学中最基本的概念之一，所谓集合就是指表示一定事物属性的集体．例如，某个教室里的全部桌椅组成一个集合；某个班的全体同学组成一个集合；某不等式的全部解组成一个集合；某曲线上全部的点组成一个集合，等等．组成集合的每一个事物称为这个集合的元素，我们通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素．

我们用

$$a \in M$$

表示 a 是集合 M 的元素，读为：a 属于 M．用

$$a \notin M$$

表示 a 不是集合 M 的元素，读为：a 不属于 M．

所谓给出一个集合就是规定这个集合是由哪些元素组成的．因此给出一个集合的方式不外乎两种，一种是列举法：即列举出这个集合中全部的元素；一种是描述法：即给出这个集合中元素所具有的特征属性．

例如，M 是由数 1,2,3,4,5 组成的集合，记为

$$M = \{1,2,3,4,5\}$$

这就列出了集合 M 中的全部元素，用的是列举法；记

$$M = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

表示直角坐标系中圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上全体点的集合，用的是描述法．

一般地，具有某些性质的元素全体所组成的集合 M 可以写成

$$M = \{a \mid a\text{ 具有的性质}\}.$$

不包含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$．例如，方程 $x^2+1=0$ 实根的集合是一个空集合．

如果两个集合 M 与 N 含有完全相同的元素，即 $a \in M$ 当且仅当 $a \in N$，那么集合 M 与集合 N 就称为相等，记为 $M = N$．

如果集合 M 的元素全是集合 N 的元素，即由 $a \in M$ 可以推出 $a \in N$，那么 M 就称为 N 的子集合，记为 $M \subset N$ 或 $N \supset M$．例如，全体自然数组成的集合是全体有理

数组成的集合的子集合. 由定义,每个集合都是其自身的子集合. 我们规定,空集合是任意集合的子集合.

两个集合 M 和 N 如果同时满足 $M \subset N$ 和 $N \subset M$,则 M 和 N 相等.

设 M 和 N 是两个集合,既属于 M 又属于 N 的全体元素所成的集合称为 M 与 N 的交,记为 $M \cap N$. 例如,$\{1,2,3,4\} \cap \{2,3,5\} = \{2,3\}$. 显然有

$$M \cap N \subset M, \quad M \cap N \subset N$$

属于集合 M 或属于集合 N 的全体元素所成的集合称为 M 与 N 的并,记为 $M \cup N$. 例如,$\{1,2,3,4\} \cup \{2,3,5\} = \{1,2,3,4,5\}$. 显然有

$$M \cup N \supset M, \quad M \cup N \supset N$$

两个以上的集合的交和并可以类似地定义,关于交和并的一个重要性质是分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

成立,证明留做习题.

下面介绍笛卡儿积.

设 A,B 是两个集合,令

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

称为 A 与 B 的笛卡儿积,简称为 A 与 B 的积. 由定义 $A \times B$ 表示一切有序对 (a,b) 的集合,其中 $a \in A, b \in B$.

例如,把全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$,则

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{R}\}$$

表示直角坐标平面上全体点的集合. 有序数对 (a,b) 表示平面上横坐标为 x,纵坐标为 y 的一个点.

两个集合的积可以推广到多个集合的积. 集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积为

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \cdots, a_n \in A_n\}$$

n 个实数集合的积 $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$ 是由 n 个实数的有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的全体组成的集合,记为 $\mathbf{R}^n$. 即

$$\mathbf{R}^n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}\}$$

其中每一个元素 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为一个 n 维实向量,每个实数 $a_k (k = 1,2,\cdots,n)$ 称为这个 n 维实向量的分量.

§1.2 映 射

映射是数学中最基本的概念之一,在初等数学中已学过,这一节,我们进一步讨论这个概念和简单性质.

设 M 和 M' 是两个集合,所谓集合 M 到集合 M' 的一个映射是指一个法则,这个法则使 M 中每一个元素 a 都有 M' 中一个确定的元素 a' 与之对应. 如果映射 σ 使元

素 $a' \in M'$ 与元素 $a \in M$ 对应,那么记为

$$\sigma(a) = a'$$

a' 称为 a 在映射 σ 下的像,而 a 称为 a' 在映射 σ 下的一个原像.

M 到 M 自身的映射,有时也称为 M 到自身的变换.

集合 M 到集合 M' 的两个映射 σ 及 τ,若对 M 的每个元素 a 都有 $\sigma(a) = \tau(a)$,则称 σ 与 τ 相等,记为 $\sigma = \tau$.

下面看几个例子.

例 1 M 是全体整数的集合,M' 是全体偶数的集合,定义

$$\sigma(n) = 2n, \quad n \in M.$$

这是 M 到 M' 的一个映射.

例 2 令 $\mathbf{R}$ 是一切实数的集合,B 是一切非负实数的集合,定义

$$\sigma(x) = x^2, \quad x \in \mathbf{R}$$

这是 $\mathbf{R}$ 到 B 的一个映射.

例 3 令 $\mathbf{C}$ 是一切复数的集合,定义

$$\sigma(a + b\mathrm{i}) = a - b\mathrm{i}, \quad a,b \in \mathbf{R}$$

这是 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{C}$ 的一个映射.

例 4 定义

$$\tau(a + b\mathrm{i}) = b, \quad a,b \in \mathbf{R}$$

这是 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射.

例 5 设 M,M' 是两个非空的集合,a_0 是 M' 中一个固定的元素,定义

$$\sigma(a) = a_0, \quad a \in M$$

即 σ 把 M 的每个元素都映射到 a_0,这是 M 到 M' 的一个映射.

例 6 设 M 是一个集合,定义

$$\sigma(a) = a, \quad a \in M$$

即 σ 把 M 的每个元素都映到其自身,称为集合 M 的恒等映射或单位映射,记为 1_M.

例 7 令 $A = B$ 等于一切正整数的集合,定义

$$\sigma(n) = n - 1, \quad n \in A$$

不是 A 到 B 的映射,因为 $\sigma(1) = 1 - 1 = 0 \notin B$.

对于映射我们可以定义乘法,设 σ 及 τ 分别是集合 M 到 M',M' 到 M'' 的映射,乘积 $\tau\sigma$ 定义为

$$(\tau\sigma)(a) = \tau(\sigma(a)), \quad a \in M \tag{1-1}$$

即相继施行 σ 和 τ 的结果,$\tau\sigma$ 是 M 到 M'' 的一个映射. 例如,前面的例 3 和例 4 的映射乘积 $\tau\sigma$,就是把每一个复数 $a + b\mathrm{i}$ 映到实数 $-b$,是 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射.

对于集合 M 到 M' 的任何一个映射 σ 显然都有

$$1_{M'}\sigma = \sigma 1_M = \sigma$$

映射的乘法适合结合律. 设 σ,τ,φ 分别是集合 M 到 M',M' 到 M'',M'' 到 M''' 的