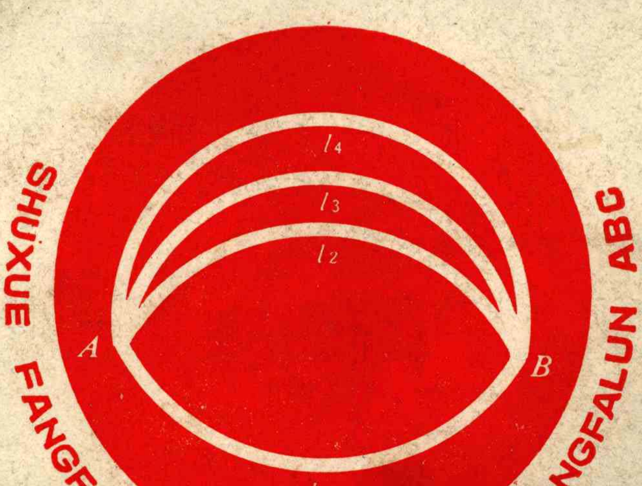
● 中学数学自学与研究丛书 ●

ZHONGXUE SHUXUE ZIXUE YU YANJIU CONGSHU

数学方法论ABC

朱梧槚　肖奚安　编著



辽宁教育出版社

中学数学自学与研究丛书

数学方法论ABC

朱梧槚　肖奚安　编著

辽宁教育出版社
一九八六年·沈阳

数学方法论 ABC

朱梧槚 肖奚安 编著

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号） 沈阳新华印刷厂印刷

字数：171,000 开本：$787\times1092^{1}/_{32}$ 印张：$8^{1}/_{2}$
印数：1—1,700
1986年9月第1版 1986年9月第1次印刷

责任编辑：黄晓梅 责任校对：李晓晶
封面设计：赵多良 插 图：韩 梅

统一书号：7371·252 定价：1.10 元

出 版 说 明

为了满足中学师生和广大自学者的需要，我们根据教育部中学教学大纲的精神，组织编写了这套《中学数学自学与研究丛书》。

这套丛书的内容大致包括：初等数学知识的综合性的研究；中学数学教学经验的总结；数学史、数学逻辑和数学方法论的介绍；还有数学教学中的一些补充性的专题等。

这套丛书的编辑出版，是对中学数学知识进行系统的归纳和研究的一种尝试。我们热切希望数学界和教育界人士，以及广大读者不吝赐教，并为我们提供新的选题，使这一套丛书进一步充实和完善。

前　言

近几年来，我国一些理工科大学和师范院校相继开设了数学方法论的选修课、数学方法论的讲习班。在一些杂志上，登载了数学方法论方面的文章，出版界也出版了一些数学方法论方面的专著和通俗读物。不少学者在各种不同的场合强调指出：要在数学教材与数学教学过程中，注意对形成数学概念的认识过程的分析，要启发学生的创造性思维，提倡数学方法论的研究和数学方法论课程的开设。这无疑是一个令人鼓舞、富于开创性的发展趋势。然而总的来说，在现今的数学教育与数学教学过程中，主要的是偏重于逻辑思维能力的训练，而不注重教给学生寻找真理和发现真理的本领，低估了形象思维的训练在智力开发中的作用，以致不能较好地培养学生的创造性思维能力。这种情况表明，我们仍需大力提倡数学方法论的研究和数学方法论课程的开设，并把它扩大到中学数学教育中去。

本书的内容安排是这样：第1章是概述数学方法论的研究对象和研究数学方法论之重要意义，第2—5章则分别阐述“经验归纳”、“类比推理”、“抽象分析”和“映射反演”等四种基本的数学方法，并对每种方法都收集了一定数量的实例进行分析讨论。然后是三个附录，其中附录一是讲公理化方法，附录二是讲集合论的思想方法，附录三是讲物

理研究中的数学方法。

还应指出，附录三的内容和各章中个别标以*号的例子，需有一定的物理知识或微积分知识才能读懂，因而一般说来，高中学生阅读本书时，可暂先略去这些内容。在阅读附录二之前，能先掌握一点普通集合论的初步知识，就能更好地理解附录二的内容。不然的话，可能会在少数地方略有不易看懂的感觉，不过只要稍加仔细推敲，就能掌握其要领的。

对于本书的文字表述，我们的原则是力求使用通俗的自然语言去作易懂的陈述。并把绝大部份内容都限制在中学数学的知识范围之内。

编　　者

1985年9月于南京

目　　录

第一章 概　述

§1 数学方法论的研究对象

一般说来，从事任何一门科学的研究，都要进行推理，即从前提推出结论，并不以推理本身作为它的研究对象，而有一门学科，即数理逻辑，却以推理、特别是数学推理本身作为它的研究对象．任何一门数学分支的建立和发展，都要使用数学方法，一般说来，并不以数学方法本身作为研究对象．那么有没有一个数学分支以数学方法本身作为它的研究对象呢？数学方法论正是以数学方法本身作为研究对象的一个数学分科，说得更具体一点，“数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问”[2]．

其实各门科学既有其各不相同的研究对象，也都有其各具特点的研究方法．诸如哲学、心理学、经济学、考古学、天文学、物理学、化学学　生物学、地质学…等等，无不有其自己的研究方法．当然，数学也不例外，所以，普遍地说，所谓方法论，就是把研究方法作为讨论和研究对象的一门学问．而数学方法论就是把数学的研究方法作为讨论和研究对象的一门学问．

顺便指出，在学术问题上的观点与方法是相通的．历史

上，不同学派对同一事物所持的不同观点，实际上就是他们研究和处理该事物的不同方法．例如，Cantor 的概括原则，指任给一个性质P，则能把所有具有性质P的对象，也仅仅具有性质P的对象汇集起来构成一集．这既是 Cantor 用以造集的一种思想方法，也是认识和理解集合这一研究对象的基本观点．在哲学上，方法论和宇宙观在一定条件下是互为通用的．实际上，对某事物具有怎样的观点，就有怎样的处理方法，而观点又正是通过处理事物的方法表现出来．因此，当我们对某些问题摆观点时，却也正是在讲方法．

此外，由于数学方法论是在数学领域中讲方法，因而不同于哲学方法论，也不是一般的科学方法论．另一方面，又因为数学方法论是从方法论的角度来讲数学，因此，它又不是一般意义下的数学课．例如，从方法论的角度来讲非欧几何（参见附录一），就不是把罗氏几何（非欧几何的一种）的内容作为一门数学分支讲解，而是历史地追溯第五公设问题的提出，即当时人们是如何考虑并提出解决问题方案的，在寻求答案的征途上又走过那些弯路，最后又如何找到正确的解决问题的办法，以及如何开辟罗氏几何这一新学科，它又以怎样的思想方法继续考虑问题．又如我们要从方法论的角度来讲一讲古典集合论（参见附录二），那就要历史地总结和理解 Cantor 创造发展无限集理论的思想方法．对于某个具体的数学问题或数学定理也是一样，从方法论的角度来说，最重要的是讲清定理的发现过程．然后才是定理的证明．例如，我们从方法论的角度来讲算术平均值不小于几何平均值这一基本不等式时，关键之处不在于一步一步地用数

学归纳法把这个不等式证出来，而重要的是要讲人们如何运用类比推理的联想去发现这一基本不等式的过程。这就是说，数学方法论要研究分析问题、思考问题的方法，侧重形成数学概念的认识过程的分析，启发人们的创造性思维，探讨和研究寻找真理、发现真理的手段。

其实，数学方法论的内容极为丰富，而且由来已久。十六世纪以来，有如Descartes、Leibniz、Poincaré、Klein、Hilbert、Hadamard 等著名学者，都有过这方面的论著或发表过这方面的精辟见解。例如，十七世纪的德国大哲学家和数学家 Leibniz（1646—1716）就曾写过一本书名为《论发明的技巧》的专著。更早一点，解析几何的创始人 Descartes（1596—1650）也曾写过一本《方法论》的专著，我国商务印书馆还曾把该书列为汉译世界名著中文版。Descartes还"特别强调怎样从数学解题过程中总结出一般的思想方法及法则"[1]．他说："我所解决的每个问题，都成为以后解决其它问题的规则"[2]．较为近代一点，法国大数学家 Poincaré(1854—1912)曾写过《论数学发明创造》的论文，不过他偏重于心理过程，例如他曾以自己发现福克斯函数的经历为背景，论述过数学创造的心智活动规律。后来Hadamard（1865—1963)曾发展了 Poincaré 的这一学说，写出了《数学领域的发明心理学》这一著作。对此请参阅〔2〕第10讲，在那里有详细的介绍。

特别应该提到的是美籍匈牙利数学家G. Polya，他"是当今在世年事最高、深孚众望的数学家、教育家。他1888年生于匈牙利，青年时期曾在布达佩斯、维也纳、哥廷根、巴

黎等地攻读数学、物理学和哲学，获博士学位．1914年曾在苏黎世著名的瑞士联邦理工学院任教．1940年移居美国，1942年起任美国斯坦福大学教授．他一生发表过二百多篇论文和许多专著．他在数学的广阔领域里有极精深的造诣．不愧为一位杰出的数学家；而且他还热心于数学教育，十分重视从小培养学生思考问题、分析问题的能力，他善于把抽象的数学研究与教学实践结合起来，不愧为一位优秀的教育家．我国老一辈著名数学家中有人曾聆听过他的讲课，对他的数学教学艺术十分赞赏．

他写过一套提高与普及相结合的书，其中影响较大的有《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》等．这些堪称姊妹篇的著作相继出版后，曾在美国风靡一时，受到广泛的欢迎和推崇．此后被译成多种文字，被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一．”（见〔4〕译者的话）作为教育家的G.Polya曾花费几十年的时间钻研数学教学方法，他的这些数学方法论专著所阐述的许多思想方法受到全世界的普遍重视．

“据说有个年轻人请求声名赫赫的爱因斯坦（Albert Einstein，1879—1955，生于德国，后移居美国）介绍一下他取得成功的秘诀．爱翁大笔一挥，写了一个公式：

$$A=X+Y+Z.$$

还风趣地说，A代表成功，X代表艰苦的劳动，Y代表正确的方法，Z代表少讲空话．”（见〔5〕拾贝集——学习方法杂谈）可见爱因斯坦也把正确的方法摆在一个极为重要的位置．

§2 研究数学方法论的目的和意义

许多学者在各种不同的场合强调指出，我们在数学教学过程中，十分重要的一点是要培养学生分析问题、思考问题的方法，要重视引导学生发现真理、寻找真理，亦就是说，要在教材与教学过程中注意对形成数学概念的认识过程的分析，启发学生的创造性思维，教给学生寻找真理和发现真理的手段。然而当前数学教学的主要倾向，似乎仍然是过于强调演绎法和形式化，强调概括性和统一性。相对地较少注意培养学生分析问题和思考问题的能力，更少涉及如何启发学生的创造性思维，以及如何去发现真理和寻找真理。多数的教学、大量的著作，几乎都是从概念到概念，从定理到推论的逻辑演绎，而对如何形成数学概念，如何发现定理的过程却很少分析讨论。例如，当我们在立体几何中讲授Euler关于多面体的面、顶、棱公式（$F+V-E=2$）时，通常总是先写出公式，再加以证明，再举例，然后布置作业。但对Euler当年是如何通过经验归纳法去发现这个公式的过程却不作分析讨论，又如在物理系开设高等数学课，教材中通常都有所谓场论三公式的内容（参见附录三）．只有少数教材能涉及这些公式的物理意义；对其中的斯托克斯公式，一般的教材或教法都是先公式，后证明，再举例和布置习题。而对于如何从物理现象的观察和研究中发现这一公式的过程是不去分析讲解的。这样就难以较好地培养学生从物理现象中概括总结和发现数学规律的能力．所以徐利治教授曾在〔2〕中指出：

"在现代初、高等数学教育中，特别反映在教材与教学方法中，似乎过于偏重演绎论证的训练，把学生的注意力都吸引到形式论证（逻辑推理）的严格性上去，这对于培养学生的创造力来说实际是不利的．当然，必要的逻辑推理训练不可少，但对于有作为的数学工作者来说，发现和创新比命题论证更重要．因为一旦抓到真理之后，补行证明往往只是时间问题．"而且"研究结果表明，人脑的左右两半球有明显的分工，一般地说，左脑负担语言和逻辑思维，右脑负担超脱逻辑的形象思维和形象辨认．或者说，常用左脑则收敛思维发达，常用右脑则发散思维敏捷．而普通的学校教育多重视语言知识的灌输，受教者被迫使用左脑，而右脑的功能备受压抑，他们不善于灵活运用所学的知识，想象力贫乏．有人认为

创造力＝知识量×发散思维能力．

如果知识渊博，想象力也丰富，则创造能力强，反之则弱．根据这种理论，在学习时就要让大脑左右并用，不可偏废，尤其应该开发右脑的功能，把重点放在形象思维的训练上．"（见〔5〕拾贝集——学习方法杂谈）．显然，开设数学方法论课程或在教学过程中贯彻启发式的方法论教学法，将大大有利于形象思维的训练，有利于学生创造能力的培养．

当然，我们也并不主张每一门数学课的每一个定理和每一个公式，都要从它们的历史来源、直观背景、发现过程和研究方法来讲解，这样做不仅要使课程本身的体系和内容解体，而且也是办不到的．因为一个定理或一个证明，如果说一、二页就能写下来，那么作为这个定理的探讨过程，可能

是几十页、几百页、甚至几千页也难以写下，虽然许多开创性的思想方法正在这里展示得淋漓尽至，而且这也就是华罗庚教授所说："大家应到数学家的废纸篓里去寻找研究方法"．这一名言的道理所在．然而要把所有这些统统写进每一本教材中去，或者要在每个教学过程中全部反映出来，这也是不适当和不可能的．对此事实上只能在教材与教学过程中适当注意贯彻方法论的素材和教学方法．此外就是以开展数学方法论的研究和开设数学方法论的课程的办法来弥补这方面的不足．

不过，强调数学系统的完美无缺，注重逻辑推导的严密性，这也是数学发展的必然趋势，它对数学的发展起了重要的积极作用．问题在于我们不能因此就只强调此方而偏废了另一方．其实，在教材或专著的写作中所形成的当前这种倾向性（即前述过于强调演绎法和形式化），似也由来已久．历史上，大数学家 Gauss(1777—1855) 在青年时代就著有《算术研究》一书，这是1801年出版的一本数论名著，书中许多结果，包括著名的二次互反律等等，都是首先从观察、实验，经过经验的归纳推理而发现的，然而Gauss在书中从来不谈这些结果的发现过程．所以，近世代数的创始人之一的 Abel(1802—1829)在读完 Gauss的《算术研究》一书之后，曾大为感慨地说：Gauss象狐狸一样的狡猾，他对自己的思想方法的来龙去脉从不交待，象狐狸尾巴一样地将自己留下的足迹扫除得干干净净．并且Gauss本人也是承认的，他曾指出，我们搞数学的人，虽然在不断地发现定理，给出证明，建造数学大厦，然而却象水泥匠一样，等到抹好

四壁之后，就拆走了脚手架。因而当他把自己的作品展现给大家观看时，却已是雄伟壮观、完美无缺的建筑物了。难怪现行的许多专著，即使对于每个定理的证明都已一步一步地看懂了，也很难抓到其中的思想方法和实质性的东西。不过，现在也已有一些学者不再追随这种倾向，而以一种新的精神来写书了，据说美国学者Halmos就写了一本有关 Hilbert 空间理论方面的专著，他把 Hilbert 空间理论分成几批问题，然后一步一步地探讨并解决这些问题，前一个问题是基础并为后一个问题的桥梁，而后一个问题的解决又加深了对前一个问题的理解。

第二章　经验归纳法

§1　经验归纳法的意义及其与数学归纳法的关系

经验归纳法，也称为实验归纳法，它是科学家处理经验的一种方法．也就是从实验、观察得到的事实材料和积累的丰富经验出发，进而引出一种带有普遍意义的猜想，或者建立起一种有理论意义的信念，在数学中也就是得出某个待证的普遍命题．因而也是一种从个别到一般、从实验事实到理论的一种寻找真理和发现真理的手段．它是数学方法论的基本方法之一．而数学归纳法则是用来证明同自然数有关的命题或猜想的一种方法．所以经验归纳法和数学归纳法是不同的．而人们往往喜欢把这两种不同的方法都简称为归纳法，尤应注意不要由此而造成错觉，误认为两者等同．

让我们先回顾一下究竟什么是数学归纳法，并举例一、二，以示其应用．

现把全体自然数构成的集合记为

$$N=\{n|\ n\text{为自然数}\}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

又把自然数 n 具有的性质 P 记为 $P(n)$．然后假定下述二命题是成立的．

(A')　$P(0)$，