CHUDENG SHUXUE YANJIU

HIT

数学·统计学系列

初等数学研究(Ⅱ) 上

甘志国 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

初等数学研究（II）上

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书包括整数性质、不定方程、现行高中数学教科书11章内容(集合与逻辑,函数与方程,数列,三角,平面向量,不等式,平面解析几何,立体(平面)几何,排列、组合与二项式定理,概率与统计,极限与导数)、数系、教材研究、数学竞赛、数学问题、数学应用、数学试题、数学史话、趣味数学、其他等22个部分的初等数学研究方面的论文387篇(其中189篇以前曾发表过,有些文章是由发表的多篇文章综合成的),每篇文章各自独立成文。本书注重了科学性、系统性和趣味性,可供中学、大学师生及初等数学爱好者阅读、钻研,也可作为高三学生在数学高考复习备考时参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

初等数学研究.2.上/甘志国著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.4

ISBN 978-7-5603-2820-1

Ⅰ.初…　Ⅱ.甘…　Ⅲ.初等数学-研究　Ⅳ.O12

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第032358号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　唐　蕾　翟新烨
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张75　字数1428千字
版　　次　2009年5月第1版　2009年5月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2820-1
定　　价　118.00元(上,下)

序　言

一本凝聚了甘志国先生二十多年心血与智慧的《初等数学研究(Ⅱ)》由哈尔滨工业大学出版社出版发行了.甘先生是一位有志于初等数学研究的学者,其《初等数学研究(Ⅰ)》是一部近700页,83万字的巨著,书中收录他的初等数学论文206篇,我研读过其中一部分,认为很有参考价值.例如,"正整数的一个奇异性质","否定一个定理的逆命题"等多篇文章对我思考有关问题很有启发,我进而与甘先生合作写了几篇文章.现在甘先生出版的《初等数学研究(Ⅱ)》,又是一部规模很大的巨著:近400篇文章,共100余万字.可见甘先生之勤奋!据哈工大出版社该书的策划编辑刘培杰先生说:甘先生虽贫穷过、患过病,但"嗜数如命"!由此可知甘先生是一位难得的数学奇人.虽说是奇人,但他并不是天生的"与众不同",而是人人都可以达到的——只要你有决心,有毅力.这就是我们常说的"天下无难事,只要有心人".甘先生还在一篇对自己的简介中说:"时间是挤出来的,正如鲁迅先生所说,我是把别人喝咖啡的时间也用来进行初等数学研究.我很少与家人一起逛街、散步,因为我总是嫌他们走路太慢."这段真言对人人都有很好的教育和启发作用.

当今时代是一个信息爆炸的时代，人们要学习的知识，也许倾毕生精力学到的也只能是沧海一粟．因此，只有坚持不断的学习，掌握汲取知识的方法，不断提高学习新知识的能力，才能紧跟时代的步伐，走向成功的人生．在这方面，甘先生为我们做出了榜样．甘先生对数学的酷爱与执着感染了每一位与他交流和讨论数学问题的人，他对数学问题敏锐的洞察力和解决问题的探索精神让许多同行和学者发自内心的钦佩．虽说我曾是北京师范大学数学学院的博导、教授，在代数、数理逻辑及其应用方面也略有造诣，与我交流和讨论数学问题的国内外学者也不少，但到了老年，有幸能常与远在鄂西北的这位年轻高中数学老师书信来往讨论问题、交流心得是我最快乐的事之一．他的钻研精神和成果让我惊叹不已．我认真审读过甘先生的《初等数学研究（Ⅱ）》中一部分有代表性的文章，认为内容翔实，涉及初等数学研究的很多方面，并且涵盖了高中数学的一些重要方面：论证严谨，结论新颖，科学性强，比如该书中的文章“在无穷等比数列中寻找等差数列”给出的内容“(1)在一个等差数列中能选出等比子列的充要条件；(2)在一个等比数列中存在等差子列的充要条件”．对于数学工作者，特别是高中数学教师很有参考价值；该书中关于“数学史话”、“趣味数学”、“新题征展”方面的文章还为本书增添了浓浓的趣味性．甘先生的《初等数学研究（Ⅱ）》一书系统地再现了他二十多年来的科研历程及成果．研读这本书将会使我们获得一个聪慧的头脑，让我们在知识的海洋里遨游；使我们获得一些新的研究模式，让我们在探索世界的奥妙中去不断获取新知识，更重要的是获得一种精神和力量，利用这种精神和力量可以去解决我们所面对的各种难题．

我还要建议甘先生能再挤出时间读一点数理逻辑中的“模型论”，特别是其中的“紧致性定理”，这对甘先生将来深钻数论问题是有好处的．愿甘先生以欧拉(Euler,1707—1783)等大批数学家为榜样，一如既往的勤奋钻研初等数学，取得更加辉煌的研究成果！也郑重推荐各位初等数学爱好者能抽出时间来研读《初等数学研究（Ⅱ）》这本大作，尽早解决书中所提出的一些新问题．这样，你也会成为一名甘志国式的初等数学爱好者！

王世强

2009年1月1日

于北京师范大学

目　　录

整数性质

不定方程

集合与逻辑

函数与方程

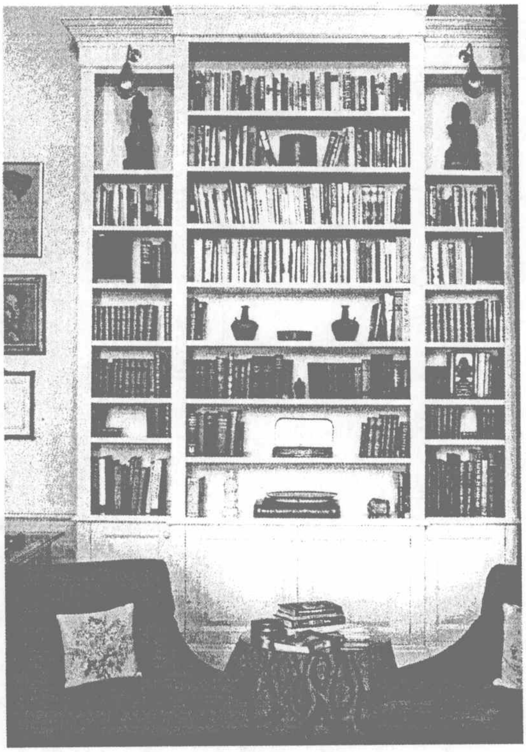
数　列

三　角

平面向量

不等式

整数性质



余数另外的意义

设 N,t 是正整数，t 除 N 的非负最小余数是由 t 和 N 唯一确定的，记作 $R_t(N)$.

显然 $0 \leqslant R_t(N) \leqslant t-1, N \equiv R_t(N) \pmod t$.

下面的定理给出了余数 $R_t(N)$ 另外的意义.

定理 (1) 当 $1 \leqslant R_t(N) \leqslant t-1$(即 $t \nmid N$) 时，把 N 化为 $t+1$ 进制数 α，在 $t+1$ 进制内连续求 α 的各位数字之和：把 α 的各位数字相加得 α_1，再把 α_1 的各位数字相加得 α_2，… 直至得到一位数 $\alpha_k(1 \leqslant \alpha_k \leqslant t)$ 止，则 $R_t(N) = \alpha_k$.

(2) 当 $R_t(N) = 0$(即 $t \mid N$) 时，把 N 化为 $t+1$ 进制数 α，设在 $t+1$ 进制内连续求 α 的各位数字之和的结果是 α_k，则 $\alpha_k = t$.

证明 (1) 设 $\alpha = a_0(t+1)^n + \cdots + a_{n-1}(t+1) + a_n$(整数 $n \geqslant 0, 0 \leqslant a_i \leqslant t, i = 0,1,\cdots,n, a_0 \neq 0$).

则 $\alpha_1 = a_0 + \cdots + a_{n-1} + a_n$，所以 $\alpha \equiv \alpha_1 \pmod t$.

同理，$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \cdots \equiv \alpha_k \pmod t$，所以 $\alpha \equiv \alpha_k \pmod t$.

又 $N = \alpha, N \equiv R_t(N) \pmod t$，所以 $R_t(N) \equiv \alpha_k \pmod t$.

又 $1 \leqslant R_t(N) \leqslant t-1, 1 \leqslant \alpha_k \leqslant t$，所以 $R_t(N) = \alpha_k$.

(2) 因为 $N \equiv t \pmod t, N = \alpha, \alpha \equiv \alpha_k \pmod t$，所以 $\alpha_k \equiv t \pmod t$.

又 $1 \leqslant \alpha_k \leqslant t$，所以 $\alpha_k = t$. 证毕.

由文献[1]中的定义知，连续求正整数 N 的各位数字之和结果是 $R(N)$，再由本文的定理知 $R(N)$ 的另外意义：当 $1 \leqslant R(N) \leqslant 8$ 时，$R(N)$ 是 9 除 N 的余数；当 $R(N) = 9$，9 除 N 的余数是 0.

参考文献

[1] 甘志国. $\{R(n^m)\}$ 的周期性[J]. 数学通讯，1994(2):24.

已知内切圆半径的(基本) 勾股形的个数

整边直角三角形叫做勾股形,三边互素的勾股形叫做基本勾股形.文献[1]给出了已知一直角边的(基本) 勾股形的个数,本文给出已知内切圆半径的(基本) 勾股形的个数,所得结论简洁完整.

定理 1 勾股 三边均可表为$(2tmn, t(m^2-n^2), t(m^2+n^2))$,其中 $t, n, m-n \in \mathbf{N}^*$, $(m,n)=1$, $2 \nmid m-n$.其内切圆半径 $r = tn(m-n)$.

(以上 $t=1$ 时,即基本勾股形的结论)

在定理 1 中可证,不同的一组(t,m,n)的值对应于一个不同的勾股形.所以,有

定理 2 (1) 内切圆半径为 r 的勾股形的个数,即使 $r = tn(m-n)$ 的有序数组$(t,n,m-n)$的取法,其中 $t,n,m-n\in\mathbf{N}^*$, $(n,m-n)=1$, $2\nmid m-n$;

(2) 内切圆半径为 r 的基本勾股形的个数,即使 $r=n(m-n)$ 的有序数组$(n,m-n)$的取法,其中 $n,m-n\in\mathbf{N}^*$, $(n,m-n)=1$, $2\nmid m-n$.

定理 3 (1) 内切圆半径为 $r=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$($p_i$ 是互不相同的奇素数,$\alpha,\alpha_i\in\mathbf{N}$, $i=1,\cdots,k$) 的勾股形的个数为$(\alpha+1)(2\alpha+1)\cdots(2\alpha_k+1)$;

(2) 内切圆半径为 r 的基本勾股形的个数为 2^k(k 是 r 的奇素因数的个数).

证明 (1) 由定理 2(1),只需证明

使 $tn(m-n)=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 的有序数组$(t,n,m-n)$的取法为$(\alpha+1)(2\alpha_1+1)\cdots(2\alpha_k+1)$种.

可设 $t=2^{\alpha'}p_1^{\alpha'_1}\cdots p_k^{\alpha'_k}$($\alpha',\alpha'_i\in\mathbf{Z}$, $0\leqslant\alpha'\leqslant\alpha$, $0\leqslant\alpha'_i\leqslant\alpha_i$, $i=1,\cdots,k$) ①

$$n(m-n)=2^{\alpha-\alpha'}p_1^{\alpha_1-\alpha'_1}\cdots p_k^{\alpha_k-\alpha'_k} \quad ②$$

当 α'_i($i=1,\cdots,k$) 都小于 α_i 时,① 中 t 的取法为$(\alpha+1)\alpha_1\cdots\alpha_k$ 种;对于每一种取法 t,因为 ② 中 $\alpha-\alpha'_i\in\mathbf{N}$($i=1,\cdots,k$),所以由 ② 可得奇数 $m-n$ 的取法为 2^k 种;对于每一种取法 $m-n$,n 有 1 种取法.所以此时$(t,n,m-n)$有 $2^k(\alpha+1)\alpha_1\cdots\alpha_k$ 种取法.

当 α'_i($i=1,\cdots,k$) 中有且只有 $\alpha_k=\alpha'_k$ 时,① 中 $\alpha'_i<\alpha_i$($i=1,\cdots,k-1$),所以 t 有$(\alpha+1)\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}$ 种取法;② 中 $\alpha-\alpha'_i\in\mathbf{N}^*$($i=1,\cdots,k-1$),$\alpha_k-\alpha'_k=0$,所以对于每一种取法 t,奇数 $m-n$ 有 2^{k-1} 种取法;对于每一种取

法 $m-n,n$ 有1种取法.所以此时$(k,n,m-n)$有$2^{k-1}(\alpha+1)\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}$种取法.

从而可得,$\alpha'_i(i=1,\cdots,k)$中有且只有一个$\alpha'_i=\alpha_i$时,$(t,n,m-n)$共有$2^{k-1}(\alpha+1)\sum\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}$种取法(约定,本文中的求和"$\sum$"轮遍$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$).同理有

$\alpha'_i(i=1,\cdots,k)$中有且只有两个$\alpha'_i=\alpha_i$时,$(t,n,m-n)$共有$2^{k-2}(\alpha+1)\sum\alpha_1\cdots\alpha_{k-2}$种取法.

$\vdots$

$\alpha'_i(i=1,\cdots,k)$中有且只有$k-1$个$\alpha'_i=\alpha_i$时,$(t,n,m-n)$共有$2(\alpha+1)\sum\alpha_1$种取法.

$\alpha'_i=\alpha_i(i=1,\cdots,k)$时,显然$(t,n,m-n)$有1种取法.

所以有序数组$(t,n,m-n)$的全部取法为

$$2^k(\alpha+1)\alpha_1\cdots\alpha_k+2^{k-1}(\alpha+1)\sum\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}+\cdots+2(\alpha+1)\sum\alpha_1+1=(\alpha+1)(2\alpha_1+1)\cdots$$

$(2\alpha_k+1)$种(展开此式右边可证此式).

(2) 由定理2(2)来证就不难了.

推论 对于任意的正整数r,总存在内切圆半径为r的基本勾股形.

再给出几处文献的标记.

1.文献[1]中三个繁杂和式的结果:

$$M=M_1=\frac{1}{2}[(2k_1+1)\cdots(2k_s+1)-1] \qquad ④$$

$$M_2=\frac{1}{2}[(2k+1)(2k_1+1)\cdots(2k_s+1)-1] \qquad ⑤$$

其中M,M_1,M_2见文献[1]的④,⑪,⑫.只要展开上面式④的右端,即可证得式④,式⑤不易直接看出,但可由文献[2]得到.

2.由文献[1]及[2]可得

(1) 一直角边为$a=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$($p_i$是互不相同的奇素数,$\alpha,\alpha_i\in\mathbf{N}^*,i=1,\cdots,k$)的勾股形的个数为$\frac{1}{2}[(2\alpha-1)(2\alpha_1+1)\cdots(2\alpha_k+1)-1]$;

(2) 一直角边为$a(2\nmid a$或$4\mid a)$的基本勾股形的个数为2^{k-1}(k是a的素因数的个数,$k\geqslant1$);一直角边为$a(2\parallel a)$的基本勾股形不存在.

此结论与定理3相似.

3.求出内切圆半径为r(r是任意正整数)的海伦三角形的个数是极为困难的(见文献[3]末),但本文定理3已给出内切圆半径为r的直角海伦三角形(即