

CHUDENG SHUXUE YANJIU

数学·统计学系列

初等数学研究(Ⅱ)^上

甘志国 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

要 目 录

初等数学研究

(II) 上



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书包括整数性质、不定方程、现行高中数学教科书 11 章内容(集合与逻辑,函数与方程,数列,三角,平面向量,不等式,平面解析几何,立体(平面)几何,排列、组合与二项式定理,概率与统计,极限与导数)、数系、教材研究、数学竞赛、数学问题、数学应用、数学试题、数学史话、趣味数学、其他等 22 个部分的初等数学研究方面的论文 387 篇(其中 189 篇以前曾发表过,有些文章是由发表的多篇文章综合成的),每篇文章各自独立成文。本书注重了科学性、系统性和趣味性,可供中学、大学师生及初等数学爱好者阅读、钻研,也可作为高三学生在数学高考复习备考时参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

初等数学研究.2.上/甘志国著. — 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.4

ISBN 978-7-5603-2820-1

I. 初… II. 甘… III. 初等数学-研究 IV. O12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 032358 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 唐 蕾 翟新烨

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 75 字数 1 428 千字

版 次 2009 年 5 月第 1 版 2009 年 5 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-2820-1

定 价 118.00 元(上,下)

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

序 言

一本凝聚了甘志国先生二十多年心血与智慧的《初等数学研究(Ⅱ)》由哈尔滨工业大学出版社出版发行了.甘先生是一位有志于初等数学研究的学者,其《初等数学研究(Ⅰ)》是一部近700页,83万字的巨著,书中收录他的初等数学论文206篇,我研读过其中一部分,认为很有参考价值.例如,“正整数的一个奇异性质”,“否定一个定理的逆命题”等多篇文章对我思考有关问题很有启发,我进而与甘先生合作写了几篇文章.现在甘先生出版的《初等数学研究(Ⅱ)》,又是一部规模很大的巨著:近400篇文章,共100余万字.可见甘先生之勤奋!据哈工大出版社该书的策划编辑刘培杰先生说:甘先生虽贫穷过、患过病,但“嗜数如命”!由此可知甘先生是一位难得的数学奇人.虽说是奇人,但他并不是天生的“与众不同”,而是人人都可以达到的——只要你有决心,有毅力.这就是我们常说的“天下无难事,只要有心人”.甘先生还在一篇对自己的简介中说:“时间是挤出来的,正如鲁迅先生所说,我是把别人喝咖啡的时间也用来进行初等数学研究.我很少与家人一起逛街、散步,因为我总是嫌他们走路太慢.”这段真言对人人都有很好的教育和启发作用.

当今时代是一个信息爆炸的时代,人们要学习的知识,也许倾毕生精力学到的也只能是沧海一粟.因此,只有坚持不断的学习,掌握汲取知识的方法,不断提高学习新知识的能力,才能紧跟时代的步伐,走向成功的人生.在这方面,甘先生为我们做出了榜样.甘先生对数学的酷爱与执着感染了每一位与他交流和讨论数学问题的人,他对数学问题敏锐的洞察力和解决问题的探索精神让许多同行和学者发自内心的钦佩.虽说我曾是北京师范大学数学学院的博导、教授,在代数、数理逻辑及其应用方面也略有造诣,与我交流和讨论数学问题的国内外学者也不少,但到了老年,有幸能常与远在鄂西北的这位年轻高中数学老师书信来往讨论问题、交流心得是我最快乐的事之一.他的钻研精神和成果让我惊叹不已.我认真审读过甘先生的《初等数学研究(Ⅱ)》中一部分有代表性的文章,认为内容翔实,涉及初等数学研究的很多方面,并且涵盖了高中数学的一些重要方面:论证严谨,结论新颖,科学性强,比如该书中的文章“在无穷等比数列中寻找等差数列”给出的内容“(1)在一个等差数列中能选出等比子列的充要条件;(2)在一个等比数列中存在等差子列的充要条件”.对于数学工作者,特别是高中数学教师很有参考价值;该书关于“数学史话”、“趣味数学”、“新题征展”方面的文章还为本书增添了浓浓的趣味性.甘先生的《初等数学研究(Ⅱ)》一书系统地再现了他二十多年来的科研历程及成果.研读这本书将会使我们获得一个聪慧的头脑,让我们在知识的海洋里遨游;使我们获得一些新的研究模式,让我们在探索世界的奥妙中去不断获取新知识,更重要的是获得一种精神和力量,利用这种精神和力量可以去解决我们所面对的各种难题.

我还要建议甘先生能再挤出时间读一点数理逻辑中的“模型论”,特别是其中的“紧致性定理”,这对甘先生将来深钻数论问题是有好处的.愿甘先生以欧拉(Euler, 1707—1783)等大批数学家为榜样,一如既往的勤奋钻研初等数学,取得更加辉煌的研究成果!也郑重推荐各位初等数学爱好者能抽出时间来研读《初等数学研究(Ⅱ)》这本大作,尽早解决书中所提出的一些新问题.这样,你也会成为一名甘志国式的初等数学爱好者!

王世强

2009年1月1日

于北京师范大学

目 录

整数性质

余数另外的意义	3
已知内切圆半径的(基本)勾股形的个数	4
一类既约分数的和	7
几类双色完全平方数	8
缩小变换黑洞	10
浅探伪素数	16
空间数共 17 个	21
回归数	24
2007 年高考湖北卷的一大特色——整数性质	26
二阶递归数列的一条同余性质	30
已知内切圆半径的面积为有理数的整边三角形	35
再谈海伦三角形	39
浅探 $2^a \pm 2^b \pm 2^c$ 为完全平方数的条件	43
浅探亲和数	48
平方 m 重连整数	52
恒为整数的 l 次幂的有理系数整值多项式研究	60
$a^n - 1$ 的标准分解式中诸素因数的指数	64
$\sigma(n)$ 的一条性质及其应用——研究完全数与亲和数的奇偶性	66
素数与组合数的整除性质	69
$\prod_{i=1}^n (x + i)$ 的展开式系数的性质	74
两类 n 元排列数对模 n 的同余性质	80
两个和式的求法及整除性质	86
定义 $R(N)$ 的推广	92
素数列的研究	93
威尔逊素数定理的简化及素数的一条性质	94

相似数的整除	96
关于“ $p \mid x^3 + y^3$ ”的一个定理	97
已知一边的勾股数的求法及组数	99
whc 165 及回归数问题的解决情况	101
半缩小(半扩大)变换的黑洞	104
关于居加猜想的一个结论	108
对两道习题的研究	109
2 关于 1 093,3 511 的基本重数均为 2	111
印度奇妙数组的推广	113

不定方程

有理数集上不存在四连贯的二次多项式	117
任意正整数的全部平方差分拆及其组数	125
正整数的互素平方差分拆	131
整边正三角形的二剖分	135
又一广义勾股数组	139
所有形如 $a^2 = b + c$ 的勾股数组 (a, b, c)	140
二次不定方程有理解的结构与整数解	141
用因式分解法解缺平方项的二元二次不定方程	162
一类不定方程有正整数解的充要条件	165
费马猜想研究	168
不定方程 $2x^2 + y^2 = z^2$ 与 $x^2 + y^2 = 2z^2$ 中有未知数为平方数的正整数解研究	174
一类不定方程的正整数解	183
由 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ 所想到的	184
这样证明很简洁	185
不定方程 $x^2 - y^2 = pz^2$ 的全部整数解	188
含有 60° (或 120°) 角的整边三角形三边的求法	192
一类不定方程的解法	195
不定方程 $x^3 + 2y^3 - 4z^3 = 0$ 没有正整数解的再推广	199
对《新题征展(103)》第 5 题的研究	201

集合与逻辑

数学逻辑奇妙无穷	205
生活中的条件命题及逆否命题	207

函数与方程

关于 n 连贯多项式的几个结论	211
一些连贯、三连贯的二次多项式	215
整数集上四连贯 n 次多项式的构造	216
用 $[x]$ 的一条性质解题	219
两道例题的简解	221
“长三针”问题的简洁解法	222
谈谈周期函数	224
用素数判定多项式不可约	227
函数 $f(x) = \log_x a$ 的单调性	231
一类问题的统一解法	233
一个定理的再推广	234
解抽象函数问题举例	236
一个问题的解决	241
形似质异的函数题	243
幂、指数函数图象交点个数的完整结论	247
一元二次方程根的分布	251
谈凸函数	252
订正一道题的答案及简解两道题	254
对数公式大汇集及证明	256
更正一道选择题的答案	258
纠正一个流行错误——应尽早引入“确界”的概念	260
例谈构造对偶式解题	262
例谈函数问题的解法	266
浅探过一点作 n 次曲线切线的条数问题	291
实系数一元三次方程的求根公式	295
数学问题 1703 的一般情形	302
也谈一类绝对值函数的最值问题——兼谈一个猜想的判明	303

一道应用题的简解及推广	309
一道周期函数例题的一般情形	312
增函数与其反函数图象的交点在直线 $y = x$ 上	314
2008 年高考试题(上海理科卷)填空压轴题的另解	315
两道 2008 年高考题的简解	317
数学问题 1750 的伴随问题	319
用一个恒等式解一类无理方程	324
也探函数 $u = \frac{b \sin \theta + d}{a \cos \theta + c}$ 的值域	326
2006 年高考(湖北卷)选择压轴题欣赏	331
对数函数的一条性质及其运用	333
用凸函数的性质探求一类条件最值	335
一种简便快捷的求反函数的方法	341
用“同增异减”求复合函数的单调区间应注意什么	345
一类多元函数的值域——对四个猜想的研究	347
二次分式函数值域的两种求法	353

数 列

$ R(n^m) $ 的周期性	359
两类递推数列通项的求法	360
两个和式的求法	362
“分班数阵”的通项	364
古代数列趣题二则	366
用验证法求数列通项两例	367
从已知的等差数列中选出一些项重新组成等差(比)数列个数的问题	369
一道课本例题结论的推广	375
国家公务员考试中的数列趣题	376
等差(比)数列的一条性质	380
《类比思维的一种应用》一文的补充	382
巧求一类既约分数的和	386
是巧合? 还是必然!	388
数列求和	391
例谈如何求数列项的最值	397

由一道课本数列题编拟的趣题	399
在无穷等比数列中寻找等差数列	401
应对高考需要研究性备考——兼评 2008 年高考陕西卷(理科)压轴题	406
2008 年高考广东卷(理科)压轴题的简解	412
2008 年高考试题(四川理科卷)第 20 题的另解	414
再谈用验证法求数列通项	416
已知正整数的全部正整数等差分拆	418
周期数列 $\{A_n = a^n\}$ 的末 k 位数 $ $ 的最小正周期	424
两类取整数列的求和公式	431
等差数列与等比数列的一条对偶性质	436
谈一类数列的求和	438
对两类递推数列的研究	440
对一道联考题的研究	442
你熟悉公式 $a_n = a_m q^{n-m} (n \geq m)$ 吗?	444

三 角

一道例题结论的推广	449
关于角格点一些猜想的证明	450
用等距平行线把平面封闭图形涂成阴影的线段条数及总长度	453
“余弦定理在四边形的一个推广”的一个注释	457
再探三角形的一种边角关系	458
例谈三角迭加公式的运用	460
两点不易觉察且流传很广的错误	462
“奇变偶不变,符号看象限”的又一用途	465
实验班学生敢于探索的一道三角题	466
谈谈教科书上的一道练习题	469
谈谈课本上的两个公式	472
先把未知角表示成已知角的和(差)后再解题	474
已知 $\sin \alpha \cos \beta$ 的值巧求 $\cos \alpha \sin \beta$ 的范围	476
已知扇形的内接矩形面积的最大值	478
用公式 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ 的变式解题	481
余弦定理的妙用	483

2008 年高考试题全国卷(II)理科压轴题的简解	484
一类三角问题的完整解答	486
浅探方程 $\sin x = ax$ 解的个数	489
用三角形面积公式证明 $S_{\alpha \pm \beta}$	492
对一道三角例题的再研究	493
几个三角恒等式	496
圆心四边形的性质及一个三角恒等式	499

平面向量

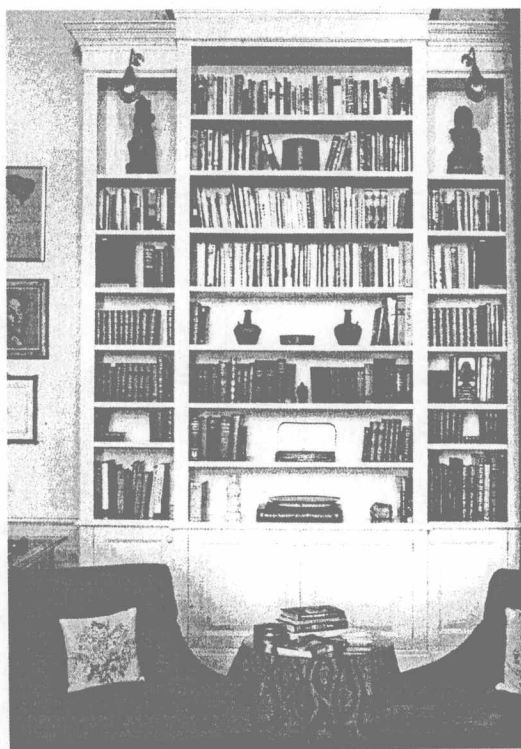
例谈“定比分点坐标公式引出的结论”的运用	503
建议	506
初学向量时应注意的问题	507
对向量共线基本定理的挖掘	509
纠正《向量题新证》一文中的“一点瑕疵”	510
例谈向量和三角形的“四心”问题	512
巧用单位向量求三角形的角平分线	516

不等式

一元高次不等式的解决口诀	519
整体求,莫拆开	520
解题宜简	522
凸函数的一个性质	525
一道复习参考题的多种证法	526
一个不等式的简证及推广	528
由教科书中的三道小题所想到的	530
浅探加权平均三角形各角的取值范围	532
这种证明仍有瑕疵	538
介绍几道 2008 年自主招生数学试题	541
一个不等式问题的初等解决	547
一个不等式的推广	550
简证两个不等式	553
一个不等式的简证	555
对一道好题的剖析	557

再谈一个最值问题的平方解法	558
不等式 $(a+b)^2 \geq 4ab$ 的另证及应用	559
用二元均值不等式证 n 元均值不等式	561
关于斜抛运动的另几个最值	563
也谈证明不等式	566
一道求取值范围题的正确解法	568
谈谈加权平均值不等式	570
排序不等式的数学归纳法证明	575
对一道中考题的深入研究——平行四边形各顶点的斯坦纳最小树	577
一个不等式的多方位推广	584
对一个不等式推广的再认识	585
权方和不等式的推广及其简证	587
对三个猜想的研究	592
不要冷落了“简化”	598
对两个猜想的否定及研究	600
一种去掉绝对值符号的方法	602
两个不等式的推广	605
不等式 $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{25}{4}$ 的六种证法	607
简解两道不等式题	609

整数性质



余数另外的意义

设 N, t 是正整数, t 除 N 的非负最小余数是由 t 和 N 唯一确定的, 记作 $R_t(N)$.

显然 $0 \leq R_t(N) \leq t-1, N \equiv R_t(N) \pmod{t}$.

下面的定理给出了余数 $R_t(N)$ 另外的意义.

定理 (1) 当 $1 \leq R_t(N) \leq t-1$ (即 $t \nmid N$) 时, 把 N 化为 $t+1$ 进制数 α , 在 $t+1$ 进制内连续求 α 的各位数字之和: 把 α 的各位数字相加得 α_1 , 再把 α_1 的各位数字相加得 $\alpha_2, \dots$ 直至得到一位数 $\alpha_k (1 \leq \alpha_k \leq t)$ 止, 则 $R_t(N) = \alpha_k$.

(2) 当 $R_t(N) = 0$ (即 $t \mid N$) 时, 把 N 化为 $t+1$ 进制数 α , 设在 $t+1$ 进制内连续求 α 的各位数字之和的结果是 α_k , 则 $\alpha_k = t$.

证明 (1) 设 $\alpha = a_0(t+1)^n + \dots + a_{n-1}(t+1) + a_n$ (整数 $n \geq 0, 0 \leq a_i \leq t, i = 0, 1, \dots, n, a_0 \neq 0$).

则 $\alpha_1 = a_0 + \dots + a_{n-1} + a_n$, 所以 $\alpha \equiv \alpha_1 \pmod{t}$.

同理, $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \dots \equiv \alpha_k \pmod{t}$, 所以 $\alpha \equiv \alpha_k \pmod{t}$.

又 $N = \alpha, N \equiv R_t(N) \pmod{t}$, 所以 $R_t(N) \equiv \alpha_k \pmod{t}$.

又 $1 \leq R_t(N) \leq t-1, 1 \leq \alpha_k \leq t$, 所以 $R_t(N) = \alpha_k$.

(2) 因为 $N \equiv 0 \pmod{t}, N = \alpha, \alpha \equiv \alpha_k \pmod{t}$, 所以 $\alpha_k \equiv 0 \pmod{t}$.

又 $1 \leq \alpha_k \leq t$, 所以 $\alpha_k = t$. 证毕.

由文献[1]中的定义知, 连续求正整数 N 的各位数字之和结果是 $R(N)$, 再由本文的定理知 $R(N)$ 的另外意义: 当 $1 \leq R(N) \leq 8$ 时, $R(N)$ 是 9 除 N 的余数; 当 $R(N) = 9$, 9 除 N 的余数是 0.

参考文献

- [1] 甘志国. $\{R(n^m)\}$ 的周期性[J]. 数学通讯, 1994(2): 24.

已知内切圆半径的(基本)勾股形的个数

整边直角三角形叫做勾股形,三边互素的勾股形叫做基本勾股形.文献[1]给出了已知一直角边的(基本)勾股形的个数,本文给出已知内切圆半径的(基本)勾股形的个数,所得结论简洁完整.

定理1 勾股三边均可表为 $(2tmn, t(m^2 - n^2), t(m^2 + n^2))$,其中 $t, n, m - n \in \mathbf{N}^*$, $(m, n) = 1, 2 \nmid m - n$. 其内切圆半径 $r = tn(m - n)$.

(以上 $t = 1$ 时,即基本勾股形的结论)

在定理1中可证,不同的一组 (t, m, n) 的值对应于一个不同的勾股形.所以,有

定理2 (1) 内切圆半径为 r 的勾股形的个数,即使 $r = tn(m - n)$ 的有序数组 $(t, n, m - n)$ 的取法,其中 $t, n, m - n \in \mathbf{N}^*$, $(n, m - n) = 1, 2 \nmid m - n$;

(2) 内切圆半径为 r 的基本勾股形的个数,即使 $r = n(m - n)$ 的有序数组 $(n, m - n)$ 的取法,其中 $n, m - n \in \mathbf{N}^*$, $(n, m - n) = 1, 2 \nmid m - n$.

定理3 (1) 内切圆半径为 $r = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ (p_i 是互不相同的奇素数, $\alpha, \alpha_i \in \mathbf{N}, i = 1, \cdots, k$) 的勾股形的个数为 $(\alpha + 1)(2\alpha + 1) \cdots (2\alpha_k + 1)$;

(2) 内切圆半径为 r 的基本勾股形的个数为 2^k (k 是 r 的奇素因数的个数).

证明 (1) 由定理2(1),只需证明

使 $tn(m - n) = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 的有序数组 $(t, n, m - n)$ 的取法为 $(\alpha + 1)(2\alpha_1 + 1) \cdots (2\alpha_k + 1)$ 种.

可设 $t = 2^{\alpha'} p_1^{\alpha'_1} \cdots p_k^{\alpha'_k}$ ($\alpha', \alpha'_i \in \mathbf{Z}, 0 \leq \alpha' \leq \alpha, 0 \leq \alpha'_i \leq \alpha_i, i = 1, \cdots, k$)

①

$$n(m - n) = 2^{\alpha - \alpha'} p_1^{\alpha_1 - \alpha'_1} \cdots p_k^{\alpha_k - \alpha'_k} \quad ②$$

当 $\alpha'_i (i = 1, \cdots, k)$ 都小于 α_i 时,①中 t 的取法为 $(\alpha + 1)\alpha_1 \cdots \alpha_k$ 种;对于每一种取法 t ,因为②中 $\alpha - \alpha'_i \in \mathbf{N} (i = 1, \cdots, k)$,所以由②可得奇数 $m - n$ 的取法为 2^k 种;对于每一种取法 $m - n$, n 有1种取法.所以此时 $(t, n, m - n)$ 有 $2^k(\alpha + 1)\alpha_1 \cdots \alpha_k$ 种取法.

当 $\alpha'_i (i = 1, \cdots, k)$ 中有且只有 $\alpha_k = \alpha'_k$ 时,①中 $\alpha'_i < \alpha_i (i = 1, \cdots, k - 1)$,所以 t 有 $(\alpha + 1)\alpha_1 \cdots \alpha_{k-1}$ 种取法;②中 $\alpha - \alpha'_i \in \mathbf{N}^* (i = 1, \cdots, k - 1)$, $\alpha_k - \alpha'_k = 0$,所以对于每一种取法 t ,奇数 $m - n$ 有 2^{k-1} 种取法;对于每一种取

法 $m - n$, n 有 1 种取法. 所以此时 $(k, n, m - n)$ 有 $2^{k-1}(\alpha + 1)\alpha_1 \cdots \alpha_{k-1}$ 种取法.

从而可得, $\alpha'_i (i = 1, \cdots, k)$ 中有且只有一个 $\alpha'_i = \alpha_i$ 时, $(t, n, m - n)$ 共有 $2^{k-1}(\alpha + 1) \sum \alpha_1 \cdots \alpha_{k-1}$ 种取法 (约定, 本文中的求和“ $\sum$ ”轮遍 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$). 同理有

$\alpha'_i (i = 1, \cdots, k)$ 中有且只有两个 $\alpha'_i = \alpha_i$ 时, $(t, n, m - n)$ 共有 $2^{k-2}(\alpha + 1) \sum \alpha_1 \cdots \alpha_{k-2}$ 种取法.

$\vdots$

$\alpha'_i (i = 1, \cdots, k)$ 中有且只有 $k - 1$ 个 $\alpha'_i = \alpha_i$ 时, $(t, n, m - n)$ 共有 $2(\alpha + 1) \sum \alpha_1$ 种取法.

$\alpha'_i = \alpha_i (i = 1, \cdots, k)$ 时, 显然 $(t, n, m - n)$ 有 1 种取法.

所以有序数组 $(t, n, m - n)$ 的全部取法为

$$2^k(\alpha + 1)\alpha_1 \cdots \alpha_k + 2^{k-1}(\alpha + 1) \sum \alpha_1 \cdots \alpha_{k-1} + \cdots + 2(\alpha + 1) \sum \alpha_1 + 1 = (\alpha + 1)(2\alpha_1 + 1) \cdots$$

$(2\alpha_k + 1)$ 种 (展开此式右边可证此式).

(2) 由定理 2(2) 来证就不难了.

推论 对于任意的正整数 r , 总存在内切圆半径为 r 的基本勾股形.

再给出几处文献的标记.

1. 文献[1] 中三个繁杂和式的结果:

$$M = M_1 = \frac{1}{2} [(2k_1 + 1) \cdots (2k_s + 1) - 1] \quad (4)$$

$$M_2 = \frac{1}{2} [(2k + 1)(2k_1 + 1) \cdots (2k_s + 1) - 1] \quad (5)$$

其中 M, M_1, M_2 见文献[1] 的 ④, ⑪, ⑫. 只要展开上面式 ④ 的右端, 即可证得式 ④, 式 ⑤ 不易直接看出, 但可由文献[2] 得到.

2. 由文献[1] 及[2] 可得

(1) 一直角边为 $a = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ (p_i 是互不相同的奇素数, $\alpha, \alpha_i \in \mathbf{N}^*, i = 1, \cdots, k$) 的勾股形的个数为 $\frac{1}{2} [(2\alpha - 1)(2\alpha_1 + 1) \cdots (2\alpha_k + 1) - 1]$;

(2) 一直角边为 $a(2 \nmid a \text{ 或 } 4 \mid a)$ 的基本勾股形的个数为 2^{k-1} (k 是 a 的素因数的个数, $k \geq 1$); 一直角边为 $a(2 \parallel a)$ 的基本勾股形不存在.

此结论与定理 3 相似.

3. 求出内切圆半径为 r (r 是任意正整数) 的海伦三角形的个数是极为困难的 (见文献[3] 末), 但本文定理 3 已给出内切圆半径为 r 的直角海伦三角形 (即