面向21世纪高职高专规划教材

大学应用数学

主 编 南文胜 秦少武 江楚义

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

大学应用数学

面向21世纪高职高专规划教材

大学应用数学

主　编　南文胜　秦少武　江楚义

副主编　邵晓峰　李春梅　蔡桂荣

　　　　王锦华

主　审　张克新

同濟大學 出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书根据教育部制订的"高职高专数学教学基本要求",由多年从事高职高专数学教学工作的一线教师执笔编写而成.全书全面而又系统地讲解了高职高专应用数学的基础知识和基本方法,内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分、常微分方程初步、傅立叶级数与拉普拉斯变换、线性规划初步、概率论与数理统计及图论基础.全书共9章,每节都有配套练习题,每章后有复习题.

本书在内容上力求适用、够用、简明、通俗;在例题选择上力求全面、典型、难度循序渐进;在论述形式上则力求详尽、易懂.适合作为高职高专各专业的应用数学教材使用.

与本教材同步出版的《大学应用数学典型题解及常见考题》是教材内容的补充、延伸和拓展,对教学中的疑难问题及诸多常见考题进行了详细探讨,对教师备课、授课和学生的学习、复习以及巩固本教材的教学效果大有裨益,亦可作为本教材配套的习题课参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学应用数学/南文胜等主编.—上海:同济大学出版社,2008.8

面向21世纪高职高专规划教材

ISBN 978-7-5608-3905-9

Ⅰ.大… Ⅱ.南… Ⅲ.应用数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第103694号

面向21世纪高职高专规划教材

大学应用数学

主编 南文胜 秦少武 江楚义

责任编辑 张 莉 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址:上海市四平路1239号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787 mm×960 mm 1/16

印 张 16.5

印 数 1—6 500

字 数 330 000

版 次 2008年8月第1版 2008年8月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-3905-9/O·323

定 价 28.00元

面向21世纪高职高专规划教材

《大学应用数学》编委会

前　言

进入到21世纪，中国的高等教育已从过去的“精英型教育”迈进了“大众化教育”时代，高职院校办学规模日益壮大，正在成为高等教育中的一支重要力量.与此同时，高职高专院校的教材也面临着重大挑战.目前虽然有多种版本的高职数学教材，但无论从内容的广度、深度，还是从应用程度上都不太适应高职高专的专业特点和就业形势的需要.在院领导的大力支持下，在兄弟院校的广泛协作下，本着“以人为本，服务社会”的精神，现组织有多年教学经验的骨干教师编写了这本《大学应用数学》.

本书始终贯彻“面向社会，服务专业”、“整合优化，适应专业”、“改善思维，融入专业”的思想，立足于高职高专院校培养应用型人才的实际需要，注重数学知识与实际的联系，侧重于基本思想方法的运用，不追求复杂的计算，尽量采用与专业知识相结合的形式把数学的价值展现在学生面前.使学生在了解数学的同时又能意识到数学对专业知识的影响力，从而在学生中掀起在实践中“学数学，用数学”的热潮，使数学知识和数学思想在21世纪社会的发展中发挥应有的作用.

参加本书编写的有南文胜、江楚义、邵晓峰、李春梅、蔡桂荣、王锦华、吴佳新、陈海军、程晓红、林静、李俊等老师.全书由张克新、江楚义、南文胜、秦少武统稿.在本书编写过程中，始终得到了李家瑞院长的大力支持和关注，同时也得到了许多院校专家及各相关专业教师的热心帮助，在这里谨向他们表示最衷心的感谢！

由于水平有限，再加上时间仓促，书中难免有不足之处，敬请读者批评指正.

编　者

2008年8月

目　录

1 极限与连续

自然界和社会生活中，任何事物之间都是相互制约、相互依赖的. 这种关系在数学中反映为函数，而函数在变化过程中有下面两种现象：第一，当一个变量无限接近某个“目标”时，另一个变量(即函数)是否无限接近某个常数? 这就是本章要讨论的极限问题；第二，实际问题中，许多量的变化是“连续不断”的，这种现象反映到函数中为一个变量的变化将引起另一个变量“连续不断”的变化，这就是本章要讨论的连续问题.

1.1 初 等 函 数

1.1.1 基本初等函数

在学过的函数中，下面 6 种函数后面经常用到.

(1) 常数函数 $y = C$ (C 为常数). 定义域为$(-\infty, +\infty)$.

(2) 幂函数 $y = x^n$ (n 为任意实数). 定义域视 n 的值而定.

(3) 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$. 定义域为$(-\infty, +\infty)$.

(4) 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$. 定义域为$(0, +\infty)$.

(5) 三角函数

正弦函数 $y = \sin x$. 定义域为$(-\infty, +\infty)$.

余弦函数 $y = \cos x$. 定义域为$(-\infty, +\infty)$.

正切函数 $y = \tan x$. 定义域为$\left\{x \,\middle|\, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

余切函数 $y = \cot x$. 定义域为$\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

(6) 反三角函数

反正弦函数 $y = \arcsin x$. 定义域为$[-1, 1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

反余弦函数 $y = \arccos x$. 定义域为$[-1, 1]$，值域为$[0, \pi]$.

反正切函数 $y = \arctan x$. 定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$. 定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$(0, \pi)$.

这 6 种函数是研究其他各种函数的基础，统称为基本初等函数.

1.1.2　复合函数

在许多问题中，经常遇到由几个较简单的函数复合而成的函数. 一般地，有下列定义：

定义 1　设函数 $y=f(u)$, $u=g(x)$，如果 $u=g(x)$ 的值域全部或部分属于 $y=f(u)$ 的定义域，则 u 将 y 表示为 x 的函数，这个函数称为由 $y=f(x)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的**复合函数**，记为

$$y=f[g(x)],$$

其中，u 称为中间变量，x 为自变量.

不是任何两个函数都能复合成一个复合函数. 例如，$y=\sqrt{u}$ 和 $u=-x^2-2$ 就不能复合成一个函数，原因是 $u=-x^2-2$ 的值域不在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域内.

例 1　将以下各题中的 y 表示为 x 的函数，并求出函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{u}$, $u=1-x$；

(2) $y=\ln u$, $u=1+x$；

(3) $y=u^2$, $u=\cos v$, $v=\dfrac{x}{5}$.

解　(1) 将 $u=1-x$ 代入 $y=\sqrt{u}$，得 $y=\sqrt{1-x}$. 由 $1-x\geqslant 0$，得 $x\leqslant 1$，所以，函数的定义域是 $(-\infty, 1]$；

(2) 将 $u=1+x$ 代入 $y=\ln u$，得 $y=\ln(1+x)$. 由 $1+x>0$，得 $x>-1$，所以，函数的定义域是 $(-1, +\infty)$；

(3) 将 $v=\dfrac{x}{5}$ 代入 $u=\cos v$，得 $u=\cos\dfrac{x}{5}$，再将 $u=\cos\dfrac{x}{5}$ 代入 $y=u^2$，得 $y=\left(\cos\dfrac{x}{5}\right)^2$. 由题意得，$x$ 为一切实数，所以，函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

例 2　指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{1+x^2}$；　(2) $y=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$；　(3) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

解　(1) $y=\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1+x^2$ 复合而成的；

(2) $y=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 是由 $y=\cos u$ 和 $u=3x+\dfrac{\pi}{4}$ 复合而成的；

(3) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 是由 $y=\ln u$ 和 $u=\dfrac{1+x}{1-x}$ 复合而成的.

注意　在分析一个复合函数的复合过程时，必须保证每一个分解过程中的函数为一个基本初等函数，或是基本初等函数的四则运算.

1.1.3　初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算或有限次的函数复合而形成的，能用一个式子表示的函数，叫**初等函数**. 例如

$$y = 1 + x^2,\ y = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

都是初等函数. 本教材中讨论的函数大多为初等函数，分段函数除外.

习题 1－1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \sqrt{2x+3}$；　　(2) $y = \sqrt{1-|x|}$；

(3) $y = \sqrt{x^2-3} + \dfrac{1}{\ln(1+x)}$；　　(4) $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$.

2. 将以下各题中的 y 表示为 x 的函数，并求出函数的定义域.

(1) $y = \sin u,\ u = 1 - x$；

(2) $y = \sqrt{u},\ u = 1 + x^2$；

(3) $y = \ln u,\ u = \ln v,\ v = 3^x$.

3. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y = \sin\sqrt{1-x}$；　　(2) $y = e^{x^2+3}$；

(3) $y = \sin(ax+b)$，其中 a, b 是常数；

(4) $y = \arccos\dfrac{1-x^2}{2}$.

4. 设 $f(x) = 2\arcsin\dfrac{x}{2}$，求 $f(0),\ f(1),\ f(\sqrt{2}),\ f(-\sqrt{3}),\ f(-2)$.

1.2　极限与极限的运算法则

1.2.1　函数极限的定义

函数的极限与自变量的变化趋势有密切的关系，我们主要研究自变量在以下几种不同的变化趋势下函数的极限：

1. 自变量趋于无穷大时函数的极限

自变量趋于无穷大有三种情形：x 趋于正无穷大，记为 $x \to +\infty$；x 趋于负无穷大，记为 $x \to -\infty$；x 趋于无穷大，记为 $x \to \infty$，表示 $|x|$ 无限增大. 我们重点介绍 $x \to \infty$ 时函数的极限，其他可类似定义.

引例 1　历史上很长一段时间内，人们试图采用各种图形（如矩形、三角形）去计算圆的面积，约公元 263 年，我国的数学家刘徽提出了“割圆术”，即用圆的内接正多边形逼近圆，先作正三角形，把它的面积记为 A_1，再作正六边形，面积记为 A_2，再作正十二边形，面积记为 A_3，……照此下去，圆的内接 $3\times2^{n-1}$ 边形的面积为 A_n，当边数 n 无限增大时，A_n 就会无限接近圆的面积 A.

引例 2　一套刚装修的房子，室内甲醛等有毒物质的浓度较高，随着时间的推移，浓度逐渐降低，当时间无限延长时，室内有害物质的浓度趋近于“零”.

定义 1　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -a)$ 和 $(a, +\infty)$ $(a>0)$ 内有定义，如果当 x 的绝对值无限增大（即 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么，A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限. 记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

注　(1) $x\to\infty$ 包括 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$，所以

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在.

例 1　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$.

解　如图 1-1 所示，$x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 都无限向“零”靠近，所以有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

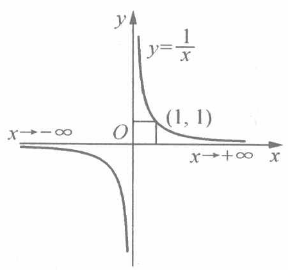

图 1-1

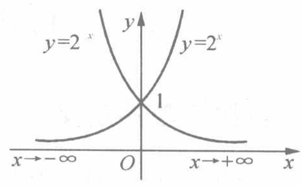

图 1-2

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{-x}$.

解　如图 1-2 所示，$x\to+\infty$ 时，2^{-x} 无限向“零”靠近，所以

$$\lim_{x\to+\infty}2^{-x}=0.$$

例 3 讨论 $x \to \infty$ 时，$\arctan x$ 极限的存在情况.

解 如图 1 - 3 所示.（1）当 $x \to +\infty$ 时，$\arctan x$ 无限向 $\frac{\pi}{2}$ 趋近，即 $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$；

（2）当 $x \to -\infty$ 时，$\arctan x$ 无限向 $-\frac{\pi}{2}$ 趋近，即 $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

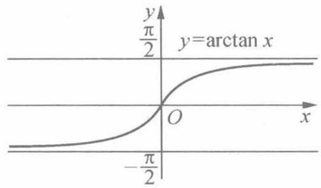

图 1 - 3

因为，$\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x \neq \lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x$，所以，当 $x \to \infty$ 时，$\arctan x$ 的极限不存在.

2. 自变量趋于有限值时函数的极限

自变量 x 趋于一点 x_0 有以下三种情形：x 从 x_0 的右侧趋于 x_0，记为 $x \to x_0^+$；x 从 x_0 的左侧趋于 x_0，记为 $x \to x_0^-$；x 从 x_0 两侧同时趋于 x_0，记为 $x \to x_0$.

引例 在炎热的夏天，气象部门预报：××地区 7 月 1 日 14:00 室外最高气温达 40℃，即当时间接近 7 月 1 日 14:00 时，室外气温无限接近 40℃.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域[①]内（点 x_0 可以除外）有定义，如果当 x 无限接近 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么，A 称为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \ (x \to x_0).$$

注 （1）$x \to x_0$ 的方式是任意的，即 x 可以从 x_0 的左边接近 x_0，也可以从 x_0 的右边接近 x_0；

（2）求 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，只讨论 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的变化情况，与 x 在 x_0 处是否有定义无关.

例 4 考察 $x \to 1$ 时，函数 $y = x + 1$ 的变化趋势.

解 当 $x \to 1$（无论 $x > 1$ 或是 $x < 1$）时，$y = x+1$ 都无限接近于 2，即

$$\lim_{x \to 1}(x + 1) = 2.$$

例 5 讨论 $x \to 1$ 时，$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的极限.

解 作出函数的图像，如图 1 - 4 所示. 函数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在 $x = 1$ 处没有定义，即 $f(1)$ 不存在.

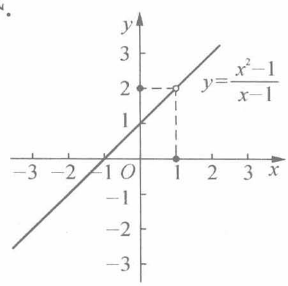

图 1 - 4

① 设 $\delta > 0$，点 x_0 的 δ 邻域表示为区间 $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$.