快乐大本·优秀教材辅导
KUAILE DABEN
YOUXIUJIAOCAIFUDAO

线性代数
学习指导

主　编　张鸿艳　周永芳　张向华

● 课后习题 精析 精解
● 同步训练 勤学 勤练

XUEXI
ZHIDAO

哈尔滨工程大学出版社

快乐大本·优秀教材辅导
KUAILE DABEN
YOUXIUJIAOCAIFUDAO

线性代数学习指导

主　编 张鸿艳 周永芳 张向华
副主编 李　焱 孙秀娟 王　春
主　审 杜　红

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书在编写过程中充分考虑到教学实际情况，将“线性代数”课程教学过程中理论与应用做了较好结合，对广大在校学生学习这门课程提供了实际的帮助，也可作为研究生考试的复习材料。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/张鸿艳，周永芳，张向华主编. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2008.8

ISBN 978-7-81133-270-4

Ⅰ.线… Ⅱ.①张…②周…③张… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 128649 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451－82519328
传　　真 0451－82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂印刷
开　　本 787 mm×1 092 mm 1/16
印　　张 13.5
字　　数 278 千字
版　　次 2008 年 9 月第 1 版
印　　次 2008 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 27.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

线性代数是工科数学的重要组成部分，是理工科学生学习其他课程的基础，也是许多专业研究生入学考试的必考科目。为了帮助广大学生扎实掌握线性代数的知识要点，提高解题能力，我们精心编写了这本书。本书与黑龙江科技学院编写的《线性代数》教材配套是同步。在编写过程中，由于编者精选同步训练题，归纳每类题的特点，详细介绍解题方法，因此可以说本书是一本简捷、易懂的教学辅导书。

本书共分五章，分别是：第一章行列式；第二章矩阵及其运算；第三章向量组的线性相关性与矩阵的秩；第四章线性方程组；第五章相似矩阵及二次型。

全书由张鸿艳，周永芳，张向华担任主编，张鸿艳统编。

由于作者水平所限，书中不足、疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2008 年 2 月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 行列式

【本章要求】

(1)了解全排列及其逆序数的概念,会求全排列的逆序数.

(2)理解行列式的定义,掌握行列式的性质.

(3)掌握二阶、三阶行列式的计算方法,会计算简单的 n 阶行列式.

(4)熟练运用克拉默法则.

【主要内容】

1. 基本概念

定义 1 排列 把 n 个不同元素排成一列,称为这 n 个元素的全排列,简称排列.

定义 2 逆序数 在 n 个不同的自然数中,规定从小到大的次序为标准次序. 设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列. 如果某两个元素的先后次序与标准次序不同时,称这两个元素之间有 1 个逆序. 排列中逆序的总和称为排列的逆序数,记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

定义 3 奇偶排列 逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

定义 4 对换 把一个排列中某两个元素的位置互换,而其余元素的位置不动,就得到一个新的排列,这样从一个排列到另一个排列的变换称为对换,元素 i 与 j 的对换记作 (i,j). 将两个相邻的元素对换,称为相邻对换.

定义 5 n 阶行列式 用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶行列式,简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$. 它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和,其值为 $D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

或

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

特别地,一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$(注意:这里"| |"不是绝对值).

定义 6 转置行列式 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将 D 的行与列互换,得到一个新的行列式,记为

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则称 D^{T} 为 D 的转置行列式.

定义 7 代数余子式 在 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$ 中,将元素 a_{ij}所在的第 i 行第 j 列的元素划去后剩下的 $n-1$ 行 $n-1$ 列元素按原来的位置组成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij}的余子式,记作 M_{ij},称 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$为元素 a_{ij}的代数余子式.

2. **基本理论与方法**

(1)行列式的性质

性质 1 行列式与其转置行列式的值相等,即 $D^{\mathrm{T}} = D$.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式的值变号.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质 3 用一个数 k 乘行列式,等于将行列式某一行(列)中的所有元素都乘同一个数 k. 换句话说,若行列式某行(列)元素有公因子 k,则可以把它提到行列式符号外面.

性质 4 如果行列式中有两行(列)元素对应成比例,则行列式的值等于零.

性质 5 如果行列式中某一行(列)的每一个元素都可以写成两数之和,则该行列式可以表示成两个相应行列式的和.

性质 6 将行列式中某行(列)的所有元素同乘以数 k 加到另一行(列)对应的元素上,行列式的值不变.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

推论 奇(偶)排列变成标准排列的对换次数为奇(偶)数.

定理 2 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$ 等于它的任一行(列)的各元素与其对应元素的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\,(i = 1,2,\cdots,n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\,(j = 1,2,\cdots,n).$$

此定理又叫行列式按行(列)展开法则.

定理 3 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$ 中某一行(列)的各元素和另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0(i\neq j),$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0(i\neq j).$$

(2)克拉默法则

设含有 n 个未知量,n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}\tag{1}$$

可简写为$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i(i=1,2,\cdots,n)$. 其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$称为方程组的系数,$b_i(i=1,2,\cdots,n)$称为方程组的常数项.

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为方程组的系数行列式.

定理4(克拉默法则) 若方程组(1)的系数行列式 $D\neq0$,则它有唯一解,其解为 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$ $(j=1,2,\cdots,n)$,其中 D_j 是用常数项的元素替换 D 的第 j 列所得到的行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1\,j-1}&b_1&a_{1\,j+1}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2\,j-1}&b_2&a_{2\,j+1}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n\,j-1}&b_n&a_{n\,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}(j=1,2,\cdots,n).$$

克拉默法则蕴含两个结论:(1)方程组有解且解是唯一的;(2)方程组的解可用求解公式 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$给出.

推论 如果线性方程组(1)无解或有无穷多解,则它的系数行列式必为零.

若方程组(1)右边的常数 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$都为零,则称它为齐次线性方程组. 否则,方程组(1)称为非齐次线性方程组.

定理5 如果齐次线性方程组有非零解,则 $D=0$.

推论 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq0$,则齐次线性方程组没有非零解.

克拉默法则建立了线性代数方程组的解与已知的系数和常数项之间的关系,具有理论价值,但在具体求解时,需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式,计算量较大,一般不采用.

【疑难解析】

例1 在一个 n 阶行列式中等于零的元素如果比 n^2-n 个还多,那么此行列式等于零,为什么?

解 n 阶行列式中共有 n^2 个元素,题设在一个 n 阶行列式中等于零的元素比 n^2-n 个还

多,即 n 阶行列式中不为零的元素比 $n^2-(n^2-n)=n$ 个还少. 而 n 阶行列式任一项都有 n 个因子,它们在不同的行不同的列. 因此,每一项都为零,即 n 阶行列式等于零.

例 2 为什么 $n(n\geqslant 4)$ 阶行列式不能按对角线展开?

解 二阶、三阶行列式可以按对角线展开,而四阶及四阶以上的行列式不能按对角线展开. 例如,对于四阶行列式,如果按对角线法则展开,则只能写出八项,这显然是错误的,因为按照行列式的定义可知,四阶行列式一共有 4! 项,即四阶行列式是 24 项的代数和. 另外,按对角线法则作出的项的符号也不一定正确. 譬如,乘积项 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$,其列标排列 4123 的逆序数为 3,应取负号而不是正号. 所以,在计算 $n(n\geqslant 4)$ 阶行列式时,对角线法则失效.

【考研精解】

例 1(1999 年考研数学题) 记行列式

$$\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

为 $f(x)$,则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为(B)

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

解 由行列式的性质知

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-z & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 5x-3 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & x-5 & -5 \\ 0 & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x-2 & -2 \\ 0 & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & x-2 & -2 \\ -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 0 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

故 $f(x)=0$ 有两个根. 因而应选(B).

例 2(2000 年考研数学题) 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 2 & & & \\ 1 & 0 & 3 & 3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$.

解 行列式按第 n 行展开,得

$$D_n=nD_{n-1}+(-1)^{n+1}(n-1)!=\cdots=n!\left[\frac{(-1)^2}{1}+\frac{(-1)^3}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right].$$

例 3（2001 年考研数学题） 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a_1-2 \\ a_2-2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_3-2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n-2 & 1 \end{vmatrix}(a_i\neq 3;i=1,2,\cdots,n).$$

解 采用升阶的方法.

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & a_1-2 \\ 0 & a_2-2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & a_n-2 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & a_1-3 \\ -1 & a_2-3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & a_n-3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{r_{i+1}\div(a_i-3)}(a_1-3)\cdots(a_n-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -\dfrac{1}{a_1-3} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{a_2-3} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\dfrac{1}{a_n-3} & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_1-r_i}(a_1-3)\cdots(a_n-3)\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{1}{a_i-3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{a_1-3} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{a_2-3} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\dfrac{1}{a_n-3} & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1-3)\cdots(a_n-3)(-1)^{1+1}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-3}\right)\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-3}\right](a_1-3)\cdots(a_n-3).$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

例 4(2002 年考研数学题)　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&1&\cdots&1\\2&0&2&0&\cdots&0\\3&0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n-1&0&0&0&\cdots&n-1\\n&n-1&n-2&n-3&\cdots&1\end{vmatrix}$ $(n\geqslant2)$.

解

$$D_n\xlongequal{r_n-(n-1)r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&1&\cdots&1\\2&0&2&0&\cdots&0\\3&0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n-1&0&0&0&\cdots&n-1\\1&0&-1&-2&\cdots&-(n-2)\end{vmatrix}$$

将行列式按第 2 列展开

$$=(-1)^3\begin{vmatrix}2&2&0&\cdots&0\\3&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n-1&0&0&\cdots&n-1\\1&-1&-2&\cdots&-(n-2)\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_1-c_{n-1}]{\substack{c_1-c_2\\c_1-c_3\\\vdots}}-\begin{vmatrix}0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\1+\frac{1}{2}(n-2)(n-1)&-1&-2&\cdots&-(n-2)\end{vmatrix}$$

$$=-(-1)^{n-1+1}\frac{n^2-3n+4}{2}(n-1)!=(-1)^{n+1}\frac{n^2-3n+4}{2}(n-1)!.$$

例 5　(1991 年考研数学题)n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}a&b&0&\cdots&0&0\\0&a&b&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&b\\b&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

分析　这种类型的行列式按行(列)展开后可化为相应的三角行列式,再应用三角行列式的结论来计算.

解　按第一列将所求行列式展开,得

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix} = a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

【教材习题详解】

习 题 一

(A)

1. 计算下列各排列的逆序数,并指出它们的奇偶性.

(1)621354;　(2)795346182;　(3)864312579;　(4)987654321.

解 (1)$\tau(621354)=0+1+2+1+1+2=7$,奇排列.

(2)$\tau(795346182)=0+0+2+3+3+2+6+1+7=24$,偶排列.

(3)$\tau(864312579)=0+1+2+3+4+4+2+1+0=17$,奇排列.

(4)$\tau(987654321)=0+1+2+3+4+5+6+7+8=36$,偶排列.

2. 在 1,2,3,4,5,6,7,8,9 组成的下列排列中,选择 i 和 j,使得

(1)$58i419j73$ 为偶排列;　(2)$679i125j4$ 为奇排列.

解 先给定 i 和 j 的值,然后求所给排列的奇偶性,如果符合要求,就可以确定 i 和 j 的值,否则根据排列的性质,作一个对换,改变排列的奇偶性,也可以确定 i 和 j 的值.

(1)在排列 $58i419j73$ 中缺 2 和 6,于是令 $i=2,j=6$ 得排列 582419673,此排列的逆序数为 18,故为偶排列.

(2)在排列 $679i125j4$ 中缺 3 和 8,于是令 $i=3,j=8$ 得排列 679312584,此排列的逆序数为 20,故为偶排列,对上面的排列施行对换,即取 $i=8,j=3$,得排列 679812534 为奇排列.

3. 判断下列各乘积是否是四阶行列式的展开式中的项?若是,试确定该项所带的正负号.

(1)$a_{11}a_{23}a_{34}$;　(2)$a_{12}a_{22}a_{34}a_{41}$;　(3)$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$;　(4)$a_{24}a_{31}a_{12}a_{43}$.

解 由 n 阶行列式的定义知,n 阶行列式中的项应是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积. 这意味着,每一项中 n 个元素的行标和列标各为一个 n 阶排列,该项的符号由行标排列和列标排列逆序数之和的奇偶性决定. 也可以先将行标按自然顺序排列,那么该项的符号就由相应列标排列的逆序数的奇偶性决定.

(1)对乘积 $a_{11}a_{23}a_{34}$,由于其不是取自不同行不同列的四个元素的乘积,不符合 n 阶行列式的定义中所含项的要求,故它不在行列式的展开式中.

(2)注意到乘积 $a_{12}a_{22}a_{34}a_{41}$ 的行标排列为 1234,列标排列为 2241 不是一个 4 阶排列(因该数组中有两个 2,且没有 1). 故它不在行列式的展开式中.

(3)乘积 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$的行标排列为1234,列标排列为1324,且$(-1)^{\tau(1324)}=-1$,故该项前面应为负号.

(4)乘积 $a_{24}a_{31}a_{12}a_{43}$的元素的顺序调整后有 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$,其行标排列是自然顺序,列标排列为2413,且$(-1)^{\tau(2413)}=-1$,故该项前面应为负号.

4. 用行列式的定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & e \\ 0 & 0 & f & 0 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

解 (1)根据行列式的定义,此行列式中不为零的项只有 $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$这一项,其列标排列2143的逆序数为2,所以此行列式的值为$(-1)^2abef=abef$.

(2)由于行列式中不为零的项只有$1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$这一项,而把这 n 个元素按行下标自然顺序排列时,列下标的排列为$(n-1)(n-2)\cdots 21n$,而此排列的逆序数为$\tau((n-1)(n-2)\cdots 21n)=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$,所以 $D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$.

5. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

解 (1)$D=2\times(-4)\times 3+0\times 1\times(-1)+1\times 1\times 8$

$-2\times 1\times 8-0\times 1\times 3-1\times(-4)\times(-1)=-36.$

(2)$D=acb+bac+cba-a^3-b^3-c^3=3abc-a^3-b^3-c^3$.

6. 证明奇数阶反对称行列式的值为零. 反对称行列式为下列形式:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

其特点是元素 $a_{ij}=-a_{ji}(i\neq j)$, $a_{ii}=0(i=j)$.

证 根据行列式的性质3和性质1,得

$$D_n=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^nD_n^{\mathrm{T}}=(-1)^nD_n$$

故 n 为奇数时,$D_n=-D_n$,由此得 $D_n=0$.

7. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$;

(3) $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; (4) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$;

(5) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, (a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$.

解 (1)

$$D=adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}=abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4abcdef$$

(2)

$$D=a\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$=a\left(b\begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & d \end{vmatrix}\right)-(-1)\begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix}$$

$$=abcd+ab+ad+1.$$

(3)

$$D\xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1,\ r_3+2r_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-2r_2}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}\xlongequal{c_3\leftrightarrow c_4}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix}=57.$$

(4)将行列式的第 $n+1$ 行依次与上一行交换直至第 1 行,再将所得行列式的第 $n+1$ 行依次与上一行交换直至第 2 行;进行下去,最后将所得行列式的第 $n+1$ 与第 n 行交换,得

$$D_{n+1}=(-1)^{n+(n-1)+\cdots+2+1}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a & a-1 & \cdots & a-n\\ a^2 & (a-1)^2 & \cdots & (a-n)^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n\end{vmatrix}$$

对右边的 $n+1$ 阶行列式的列按前一方法处理,得

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a-n & a-n+1 & \cdots & 1\\ (a-n)^2 & (a-n+1)^2 & \cdots & a^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & a^n\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}[(a-n+i-1)-(a-n+j-1)]=\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(i-j).$$

(5)

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=1,2,\cdots,n]{c_1+\frac{1}{a_j}c_{j+1}}\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

8. 证明下列等式

(1) $\begin{vmatrix}a^2 & ab & b^2\\ 2a & a+b & 2b\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(a-b)^3$; (2) $\begin{vmatrix}a+b & b+c & c+a\\ u+v & v+w & w+u\\ x+y & y+z & z+x\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a & b & c\\ u & v & w\\ x & y & z\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}a_1+1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+1 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+1 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+1\end{vmatrix}=a_1+a_2+\cdots+a_n+1$;

(4) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$

证 (1)

$$D \xlongequal[c_2-c_3]{c_1-c_3} \begin{vmatrix} a^2-b^2 & b(a-b) & b^2 \\ 2(a-b) & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a-b)(a+b) & b(a-b) \\ 2(a-b) & a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3.$$

(2)将左边行列式 D 拆成两个行列式之和

$$D = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ u & v+w & w+u \\ x & y+z & z+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ v & v+w & w+u \\ y & y+z & z+x \end{vmatrix} = D_1 + D_2.$$

$$D_1 \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ u & v+w & w \\ x & y+z & z \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$D_2 \xlongequal{c_2-c_1} \begin{vmatrix} b & c & b+c \\ v & w & v+w \\ y & z & z+x \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_2} \begin{vmatrix} b & c & a \\ v & w & u \\ y & z & x \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_3} - \begin{vmatrix} a & c & b \\ u & w & v \\ x & z & y \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

故 $D = D_1 + D_2 = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}.$

(3)

$$\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + 1.$$

(4)

$$D \xlongequal[c_4-c_1]{c_2-c_1, c_3-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-3c_2]{c_3-2c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com