解析几何与线性代数

方德植　编著

福建科学技术出版社

解析几何与线性代数

方德植　编著

福建科学技术出版社

本书介绍解析几何（包括射影几何）与线性代数（包括抽象代数概要），并把这些学科有机地联系起来论述。

全书内容共分三篇：第一篇限于论述三维实空间。第二篇把第一篇的内容推广到n维复空间里，然后把这一般的理论应用到特殊问题上来。第三篇是在前两篇的基础上加以抽象化与一般化。着重阐述线性空间、线性变换，并扼要地介绍群、环、域的基本概念与性质，还以线性代数的观点论述了射影几何的一些比较重要的内容。最后，编入两个附录：张量代数与代数方程。

本书可作为综合大学与师范院校数学系的教材或教学参考书，也可作为工科院校与高中数学教师的补充读物。

解析几何与线性代数

方德植　编著

*

福建科学技术出版社出版

（福州得贵巷27号）

福建省新华书店发行

福建新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　16.125印张　358千字

1981年12月第1版

1981年12月第1次印刷

印数：1—3,400

书号：15211·14　定价：1.67元

序　言

在数学专业的教学计划里，长期以来把解析几何、射影几何、线性代数、抽象代数列为四门课程（必修或选修），但是这样安排，所占学习时数很多，学生负担过重，而且学过以后，不能理解这四门课程的主要内容之间所具有的内在联系。作者认为这些课程有必要作较大的改革。本书就是为了这个目的而写的。它以解析几何（包括射影几何）与线性代数（包括抽象代数概要）为名，企图把上述四个学科的基本内容有机地联系起来。这样做，不但可以缩短学习时间，提高学习质量，而且就内容本身来看，也有可能结合起来叙述。因为解析几何的主要内容是研究射影空间（包括仿射空间、欧氏空间）、一次函数与二次函数的几何图形及其性质；相应地，线性代数是以线性空间、线性型与二次型作为研究的主要对象；更重要的是$n+1$维线性空间除零向量外的一维子空间与n维射影空间的点构成一对一的对应；就是说，除零向量外的$n+1$维线性空间就是n维射影空间；由于它们有这种紧密的联系，使我们能够从线性空间的一些性质来导出射影空间的一系列性质。此外，我们知道，解析几何是以代数的方法作为工具来研究几何图形的；也就是说，它用代数的方法研究几何图形的性质，揭示空间形式的相互关联性，借以获得更加普遍性的结果。反过来，解析几何为线性代数的许多对象提供了具体而又自然的解释，给代数以直观的形象，加强了数量关系的直观鲜明性，用一些重要的概念和类

比把线性代数充实起来；这样使空间形式和数量关系相互联结，相互转化和相互发展。实际上，解析几何与线性代数在发展过程中，一直是相互影响着，有着不可分割的亲缘关系。

为使初学者容易理解起见，在叙述上力求做到由浅入深，由易到难，循序渐进，由特殊到一般，由具体到抽象，再由一般到特殊，符合学生的认识过程和接受能力；而且特别注意理论基础的系统性与严密性。因此把全部内容分为三个步骤（三篇）来叙述。

第一篇的内容限于论述实空间并且维数$n=3$。第二篇把上述的概念和内容推广到n维复空间里；然后把这一般的理论应用到特殊问题（$n=4$）上来，就是研讨三维空间中的各种一次（线性）变换以及二次曲面的分类和性质等。第三篇是在前两篇的基础上加以抽象化与一般化。首先从抽象的观点考虑一些基本的代数结构和一般概念，特别着重论述线性空间与线性变换，包括射影与爱尔米得算子的分解等。此外，扼要地叙述了群、环、域的基本概念和性质，同时介绍了矩阵的奇异值和估计。还有，以线性代数的观点论述了射影几何的一些比较重要的内容，借以把解析几何与线性代数作进一步的联系。最后，在附录一中介绍了张量代数的初步知识，以供读者参考。为了教学上的需要，把代数方程的基本内容列在附录二；教师可以把它作为正式内容，可在讲完第二篇后讲授这个附录。第三篇的内容较难，可以根据讲课时数与学生水平作适当的取舍，或作为高年级的选修课程的教材。

把解析几何与线性代数结合起来叙述的书，目前在国内尚未见到，本书仅作一个初步的尝试，能否达到预期的效

果，还得靠读者加以考察。

我校几何代数教研室副主任杨锡安同志曾试用过这本教材，据反映，效果良好。内容比一般通用教材简明易懂，但总的篇幅反而减少了，教学总时数缩短了，达到了提高教学质量，减轻学生负担过重的要求。杨锡安同志还提供了一些修改意见，特此致谢。

最后希望读者对本书多加批评，使不妥与错误之处得到修正。

方德植

一九八〇年于厦门大学

目　录

第　一　篇

第 二 篇

*第 三 篇

第 一 篇

第一章 向量代数及其在空间解析几何上的一些应用

§1. 向 量 的 概 念

在日常生活中或物理学、力学以及其他科学和工程技术中经常碰到许多简单的量，只要取定单位以后，就可用一个实数来表示这种量。例如，距离、时间、面积、温度、质量、密度等，这种只有大小的，单用数就可以表达的量叫做数量。另一种量，不但有大小并且还有方向。例如，位移、力、速度、电磁场等，这种量虽然不是数量，也可以象数量那样来运算，但有不同的运算法则。比如说，从甲地向东走20里可到乙地；又如，目标就是在我们的正前方200米处，从这两个实例中，就引出位移的概念：一个质点沿着一个方向移动一段距离，这就是一点的位移。显然，位移是一种既有大小（距离）又有方向的量，这种量是很多的，如上面所指出的力、速度、电磁场；还有加速度、角速度、力矩等都是，这种量所具有的力学或物理学的内容虽然各不相同，然而都是既有大小又有方向的量，就这一点来说，这种量和位移是一样的，于是就有必要把这种量的共同特点抽象出来作为统一的研究对象。因此，我们把“有大小与方向的

量”称为向量（又名矢量）．

按照上面所述，向量有大小与方向这两个特性．在几何中的有向线段就是一个直观的向量，因此通常用空间中（直线上平面上）的有向线段AB来表示向量，用长度$|AB|$表示大小，用端点的顺序$A\to B$表示方向；A叫起点，B叫终点．为了使有向线段清楚地表示一个向量起见，于是在写法上加一个箭头，写成$\overrightarrow{AB}$（图1·1）．

我们知道，当一个刚体从一个位置平行移动到另一位置时，刚体上每个质点在同一时间内的位移是相同的，于是每点所描出的位移向量的大小和方向是相同的，它们都刻划了刚体位移的情况．因此刚体的平移运动可用这些位移向量中的任何一个来表示，据此我们规定空间中具有大小相等、方向相同的所有向量说是相等向量称为自由向量．今后在研究有关向量的某些问题中，只需要考虑它们的大小和方向，而不必考虑它们的起点和终点．因此，我们可以把空间中的向量看作从某一定点，比方说O出发的向量，例如图1·1所示的向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{A'B'}$，与$\overrightarrow{OP}$表示同一个向量．表示向量大小的数值叫做它的模，模等于o的向量叫零向量，零向量是起点和终点重合的向量，它是唯一的方向不定的向量，记作$\overrightarrow{o}$．

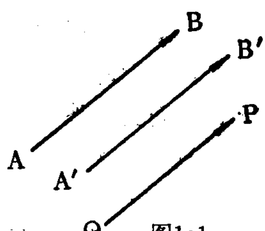

图1·1

模相等而方向相反的两个向量，叫做其中一个是另一个的反向量，例如$\overrightarrow{BA}$为$\overrightarrow{AB}$的反向量，记作$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$．

模等于1的向量叫单位向量．对于两个向量，比如$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，我们不能说$\overrightarrow{OA}$大于$\overrightarrow{OB}$或$\overrightarrow{OB}$小于$\overrightarrow{OA}$，只能说

$\overrightarrow{OA}$的模大于$\overrightarrow{OB}$的模，可写为$|\overrightarrow{OA}|>|\overrightarrow{OB}|$。

§2. 向量的线性运算

1. 向量的加法. 在前一节里已经说过向量是可以用具有长度和方向的有向线段来表示的；并且也有一种运算法则。现在从加法法则讲起。

为此，先考虑这样一个实例：连续施行两次位移也是一个位移。从点A位移到点B，再从B位移到C，合并起来就是从A到C的位移，合成的方法可以用三角形来表示（图1·2）。

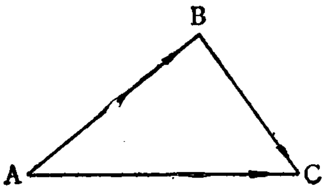

图1·2

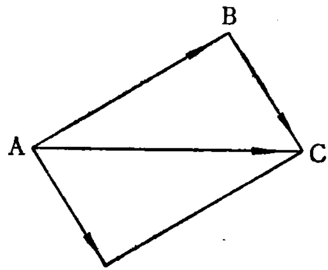

图1·3

关于力的合成，通常用平行四边形法，但也可以用三角形法，只要从同一个起点把一个力的起点移到另一个力的终点处则可，平行四边形法是从同一起点作两个向量（图1·3），三角法是连续地作两个向量。

从位移和力的这种合成法就可以引出对一般向量的加法法则：

从一点引一个向量$\vec{\alpha}$，然后从向量$\vec{\alpha}$的终点引向量$\vec{\beta}$得一折线；最后从折线的起点到终点的向量叫做$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$的

和，记作$\vec{\alpha}+\vec{\beta}$（图1·4），很明显$\vec{\alpha}+\vec{\beta}$与起点的选取无关；从不同的起点所作出的和的模与方向都相等，也就是所得到的向量和都是相等的。

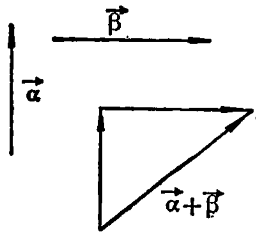

图1·4

现在我们可以叙述向量和的运算法则：

$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ 交换律（见图1·5）

$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ 结合律（见图1·6）

$\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$

$\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$

从这些法则可见：向量的加法法则与实数的加法法则相同。

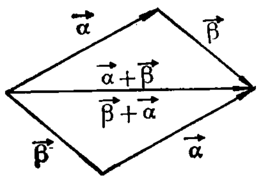

图1·5

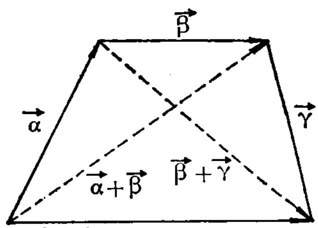

图1·6

2. 数乘向量. 直线上的连续移动是最简单的位移过程，比如弹簧的伸缩，只有位移大小的改变和方向的反转，大小的改变可以用倍数来表示，而方向的反转可以用负号来表示，从这里引出数乘向量的概念，以后简称为数乘。

实数a与向量$\vec{\alpha}$的数乘是向量$a\vec{\alpha}$，它的大小是

$$|a\vec{\alpha}| = |a||\vec{\alpha}|$$

它的方向，当$a>0$时与$\vec{\alpha}$相同，当$a<0$时与$\vec{a}$相反，当$a=0$或$\vec{\alpha}=\vec{0}$时，认为$a\vec{\alpha}$等于零向量或简称为零，若$\vec{\alpha}$是一个位移，则$a\vec{\alpha}$表示位移a个$\vec{\alpha}$，也就是当$a>1$时，把$\vec{\alpha}$伸长a倍，当$0<a<1$时，则缩短a倍（图1·7）

数乘向量的乘法服从下列运算法则：

$$a(b\vec{\alpha}) = (ab)\vec{\alpha} \quad \text{（结合律）}$$

$$(a+b)\vec{\alpha} = a\vec{\alpha} + b\vec{\alpha} \quad \text{（分配律）}$$

$$a(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = a\vec{\alpha} + a\vec{\beta} \quad \text{（见图1·8）}$$

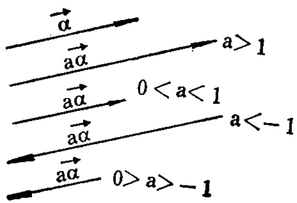

图1·7

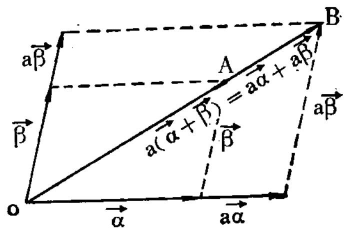

图1·8

现在来证明上列性质：

向量$a(b\vec{\alpha})$与$(ab)\vec{\alpha}$的模相等并各等于$|a||b||\vec{\alpha}|$，如果a，b同号，这些向量与$\vec{\alpha}$同向；如果a，b异号，这些向量与$\vec{\alpha}$反向，因此，向量$a(b\vec{\alpha})$和$(ab)\vec{\alpha}$的模相等，方向相同，所以相等。如果a，b中有一个等于零，或者$\vec{\alpha}=\vec{0}$，则$a(b\vec{\alpha})$与$(ab)\vec{\alpha}$都是$\vec{0}$，所以也相等，结合律证毕。

其次来证明分配律的第一性质：

$$(a+b)\vec{\alpha} = a\vec{\alpha} + b\vec{\alpha}$$

如果a，b，$\vec{\alpha}$中有一个等于零，等式显然成立，因此可

以假定a，b，$\vec{\alpha}$都异于零。如果a和b同号，则$a\vec{\alpha}$和$b\vec{\alpha}$同向，所以

$|a\vec{\alpha}+b\vec{\alpha}|=|a\vec{\alpha}|+|b\vec{\alpha}|=|a||\vec{\alpha}|+|b||\vec{\alpha}|=(|a|+|b|)|\vec{\alpha}|$，而

$$(a+b)|\vec{\alpha}|=|a+b||\vec{\alpha}|=(|a|+|b|)|\vec{\alpha}|$$

总之，$(a+b)\vec{\alpha}$和$a\vec{\alpha}+b\vec{\alpha}$的模相等，至于它们的方向，在$a>0$，$b>0$时，与$\vec{\alpha}$相同，而在$a<0$，$b<0$时，都与$\vec{\alpha}$相反，$a$，$b$异号的情形，可作相仿的考虑。

最后证明分配律的第二性质：

$$a(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=a\vec{\alpha}+a\vec{\beta}$$

如果有一个向量或实数a等于零，这个等式显然成立，如果$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$平行，$\vec{\beta}$可表示为形式$\vec{\beta}=b\vec{\alpha}$，则从分配律的第一性质可推出第二性质，事实上，

$$a(1+b)\vec{\alpha}=a(\vec{\alpha}+b\vec{\alpha})=a\vec{\alpha}+ab\vec{\alpha}$$

由此推出：

$$a(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=a\vec{\alpha}+a\vec{\beta}$$

如果$\vec{\alpha}$和$\vec{\beta}$不平行，则$a>0$时，向量$\overrightarrow{oB}$（图1·8）一方面表示$a\vec{\alpha}+a\vec{\beta}$，另一方面又表示$a\overrightarrow{oA}$，等于$a(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$；在$a<0$时，两向量改变为相反的方向。

根据数乘的上述运算法则，可知也与实数的相应的运算法则相同。

向量的加法与数乘向量的乘法的运算叫做向量的线性运算。

总之线性运算可象多项式那样来运算。

上面我们已经指出求两个向量的和可以用折线一次作出，对于多个向量$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$，……，$\vec{\delta}$的和也可用折线一次作

出：从一点引出向量$\vec{\alpha}$其次从$\vec{\alpha}$的终点引出$\vec{\beta}$等等，我们得到向量折线$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$，…，$\vec{\delta}$，最后作向量$\vec{\mu}$，其起点与折线的第一个向量$\vec{\alpha}$的起点重合，而其终点则与折线的最后一个向量$\vec{\delta}$的终点重合（图1·9），这个向量$\vec{\mu}$就叫做$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$，…，$\vec{\delta}$的和。

记作

$$\vec{\mu}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\cdots+\vec{\delta}$$

上面我们已经确定两个向量的和与其加数的顺序无关。由此，从向量加法的结合性质可知，任意数目的向量之和也与其加数的顺序无关。

3．向量的减法．向量的减法定义为向量的加法的逆运算：减去向量$\vec{\beta}$就是指加上它的反向量$-\vec{\beta}$（图1·10），即

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$$

对任意两向量$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$成立三角形不等式：

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\leqslant|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$

因三角形的一边不大于其它两边之和（图1·10）。

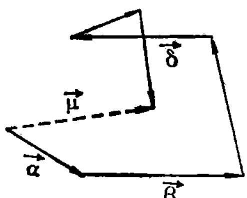

图1·9

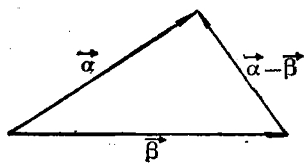

图1·10

4．一些简单的应用．速度．在某时刻，一个质点沿一个特殊方向以速率V里/时在空间中运动，这可用一个长度V的向量$\vec{V}=\vec{PQ}$来描述，$\vec{V}$具有适当的方向和定向（图1·11），

称它为速度向量，若质点是一点P，则在一点钟以后它在Q，单位时间（一小时）和单位距离（里）是任意取的，若单位时间改变（比如改为分），这个同一速度必须用一个不同的向量来表示；方向相同，但大小改为$V/60$，因此，若时间用分来测量，则具有这个单位时间的速度向量是$\frac{1}{60}\vec{V}$.

如果说河水流的速度是$\vec{v}$，当一个人按河水流动不同的方向以速度$\vec{w}$划船，则$\vec{v}+\vec{w}$是他的最后速度（见图1·12）.

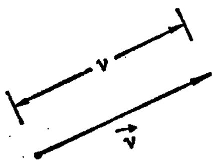

图1·11

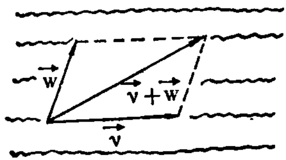

图1·12

力. 在某方向的一个力（b磅）是用那个方向的长度b的一个向量来表示（同样，单位改变，长度也要相应的改变），在图1·13中，S是太阳，E是地球（大点！），E（在这个时候）以速度$\vec{v}$运动，则由牛顿万有引力定律，由于S有一个力$\vec{F}$作用在E上，（$\vec{F}$的大小与$\overline{ES}^2$成反比）牛顿运动的第二定律。如果有一个力$\vec{v}$作用在E上，速度是会改变的，

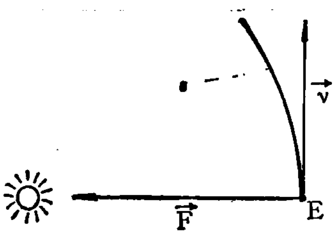

图1·13

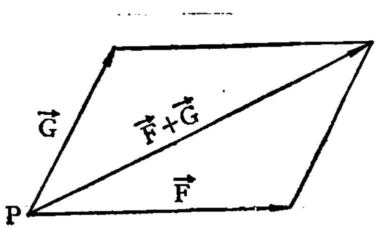

图1·14