高等学校教材

高等代数方法选讲

主编　张鸿艳　姜福全　周　波

東北林業大學出版社

●高等学校教材●

高等代数方法选讲

主编　张鸿艳　姜福全　周　波

東北林業大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等代数方法选讲/张鸿艳，姜福全，周波主编. —哈尔滨：东北林业大学出版社，2008.7

ISBN 978-7-81131-335-2

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①张…②姜…③周… Ⅲ. 高等代数—高等学校—教材 Ⅳ. 015

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 121162 号

责任编辑：张红梅
封面设计：彭 宇

NEFUP

高等代数方法选讲
Gaodeng Daishu Fangfa Xuanjiang
主编 张鸿艳 姜福全 周波

东北林业大学出版社出版发行
（哈尔滨市和兴路 26 号）
哈尔滨市工大节能印刷厂印装
开本787×960 1/16 印张11.5 字数206千字
2008 年 7 月第 1 版 2008 年 7 月第 1 次印刷
印数 1—1 000 册

ISBN 978-7-81131-335-2
O·94 定价：15.00 元

前　　言

《高等代数方法选讲》介绍高等代数这门专业基础课程所学知识内容，进一步掌握其典型方法和技巧方法；使学生在已学高等代数这门专业课程的基础上，了解现代数学的一些最新发展以及与其他学科的交叉和应用，初步了解现代数学中一些分支方向的国内外研究进展与动态，提高学生对学习数学重要性的认识，进一步提高学生学习数学的积极性，为学生毕业论文选题和研究生报考专业方向的选择提供一些指导与帮助。

本书适用一般院校数学与应用数学专业学生使用，是高等代数选讲课的最佳教材。本书内容包括多项式、行列式、矩阵、线性方程组、二次型和实对称矩阵、线性空间和线性变换、欧式空间。全书共分七章（第四、五、六章由黑龙江科技学院张鸿艳副教授编写；第三、七章由哈尔滨金融高等专科学校姜福全老师编写；第一、二章由佳木斯大学周波老师编写），全书由张鸿艳副教授统稿。本书的编写工作得到了东北林业大学出版社的大力支持，黑龙江科技学院宋作忠教授、母丽华教授、蔡吉花教授仔细审阅了书稿并提出了宝贵的意见，谨在此一并表示衷心的感谢。

尽管编者付出了很多努力，但由于水平所限，书中难免存在着欠缺和不足，恳请广大读者批评指正，以期不断完善。

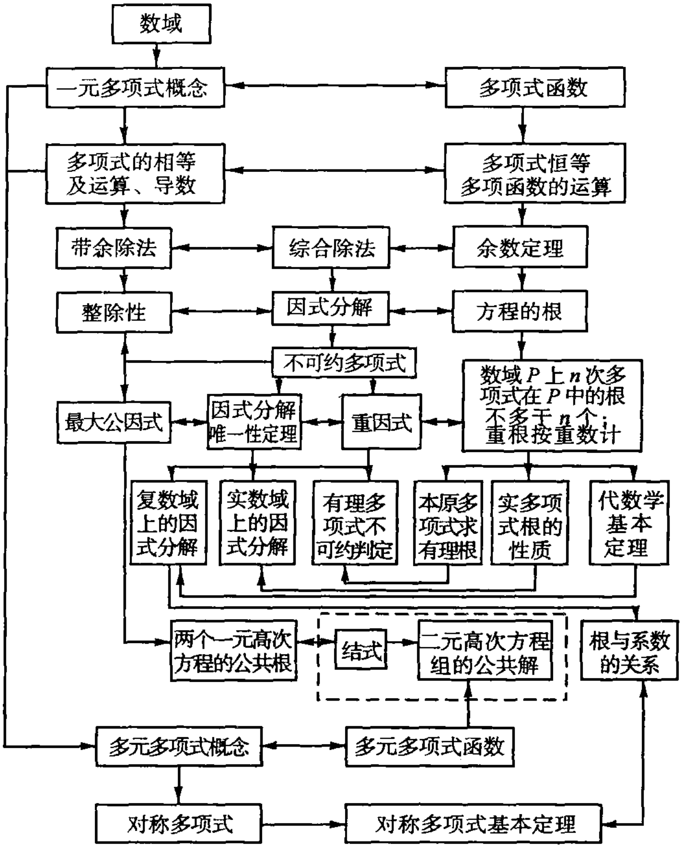
编　者

2008 年 5 月

目　录

第一章 多 项 式

知识脉络图解



§1 一元多项式

一、加 法

数域 P 上的一元多项式之全体构成的集合记为 $P[x]$.

定义 $\forall f(x), g(x) \in P[x]$,在其中适当添上一些系数为零的项,总可设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i.$$

令 $h(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$,显然 $h(x) \in P[x]$,称 $h(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和,记为

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i.$$

令 $-g(x) = \sum_{i=0}^{n} (-b_i) x^i$,显然 $-g(x) \in P[x]$,称 $-g(x)$ 为 $g(x)$ 的负元,记 $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$.

不难验证,多项式的加法有如下性质:

(1) $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$;

(2) $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$;

(3) $f(x) + (-f(x)) = 0$.

由(2)可定义

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x) + f_n(x) = (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)) + f_n(x).$$

这里 $n \geqslant 3$.

二、乘 法

定义 $\forall f(x), g(X) \in P[x]$,设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j.$$

令 $h(x) = \sum_{r=0}^{n+m} (a_r, b_0 + a_{r-1} b_1 + \cdots + a_0 b_r) x^r, a_k = 0(k > n), b_l = 0(l >$

m),显然 $h(x) \in P[x]$,称 $h(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的积,记为

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{r=0}^{n+m} (\sum_{i+j=r} a_i b_j) x^r$$

不难验证对于多项式的乘法具有以下性质:

(1) $f(x)g(x) = g(x)f(x)$;

(2) $(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$;

(3) $(f(x)+g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)$;

(4) 若 $f(x), g(x) \in P[x]$,且全不为零,则

$$f(x)g(x) \neq 0$$

从而若 $f(x)h(x) = g(x)h(x)$,且 $h(x) \neq 0$,则

$$f(x) = g(x)$$

三、次 数

定义 $f(x) \in P[x]$,$f(x) \neq 0$,称 $f(x)$ 中不为"0"的项的最高次数为该多项式的次数,记为 $\partial^0(f(x))$ 或 $\partial(f(x))$ 或 $\deg f(x)$,零多项式没有次数.

下面各式中出现的多项式均为非零多项式,如下性质成立:

(1) $\partial^0(f(x) \pm g(x)) \leqslant \max(\partial^0(f(x)), \partial^0(g(x)))$;

(2) $\partial^0(f(x) \cdot g(x)) = \partial^0(f(x)) + \partial^0(g(x))$.

§2 多项式的整除性

一、整除及其性质

定义 设 $f(x), g(x) \in P[x]$,若$\exists\, q(x) \in P[x]$,使得

$$f(x) = q(x)g(x)$$

称 $g(x)$ 能整除 $f(x)$,记为 $g(x) \mid f(x)$,否则称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$,记为 $g(x) \nmid f(x)$.

有下列性质:

(1) 任一多项式可整除零多项式;

(2) c,$cf(x)$ 均能整除 $f(x)$,这里 c 为非零常数;

(3) 若 $f(x) \mid g(x)$,$g(x) \mid h(x)$,则 $f(x) \mid h(x)$;

(4) 若 $f(x) \mid g_i(x)\ (i = 1,2,\cdots,s)$,则

$$\forall u_i(x) \in P[x]\ (i = 1,2,\cdots,s)$$

有 $f(x) \mid \sum_{i=1}^{s} u_i(x)g(x)$;

(5) $f(x) \mid g(x)$,且 $g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow f(x) = cg(x)$,$c \neq 0$,$c \in P$.

二、带余除法

定理 2.1　设 $f(x)\in P[x]$，则对 $g(x)\in P[x]$，$g(x)\neq 0$，$\exists\, q(x),r(x)$，使得 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或者 $\partial^0(r(x))<\partial^0(g(x))$，且这样的 $q(x),r(x)$ 由 $f(x),g(x)$ 唯一确定，分别称为商式与余式.

推论　设 $f(x),g(x)\in P[x]$，$g(x)\neq 0$，则 $g(x)\mid f(x)\Leftrightarrow r(x)=0$.

§3　多项式的最大公因式

一、最大公因式

定义　设 $f(x),g(x)\in P[x]$，若有

(1) $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式；

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一个公因式都能整除 $d(x)$，称 $d(x)$ 为 $f(x),g(x)$ 的最大公因式.

定理 3.1　$\forall f(x),g(x)\in P[x]$，必存在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)\in P[x]$，且有 $u(x),v(x)\in P[x]$，使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$$

由最大公因式的定义可知，若 $d_1(x),d_2(x)$ 同时为 $f(x),g(x)$ 的最大公因式时，则 $d_1(x)\mid d_2(x)$，$d_2(x)\mid d_1(x)$，故有 $d_1(x)=cd_2(x)$，$c\neq 0$，这表明，两个多项式的最大公因式之间最多相差一个非零常数因子，$f(x),g(x)$ 不全为零时，其最大公因式非零，我们把其中首项系数为 1（简称首 1）的最大公因式记为 (f,g).

对于 $P[x]$ 中 $m(m\geqslant 2)$ 个多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)$ 的最大公因式，我们完全可以像两个多项式的最大公因式那样去定义，并且可以得到同样的存在"唯一"性定理及表达定理. 具体去求 m 个多项式的最大公因式，固然可以用辗转相除法，但是计算繁杂，我们将在第三章 §2 中介绍利用矩阵及矩阵初等变换求最大公因式的简便方法.

二、互素及其有关性质

定义　设 $f(x),g(x)\in P[x]$，若

$$(f,g)=1$$

称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

定理 3.2　$f(x),g(x)\in P[x]$，则 $(f,g)=1\Leftrightarrow\exists\, u(x),v(x)\in P[x]$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

推论 1　若 $f(x)=f_1(x)(f,g)$，$g(x)=g_1(x)(f,g)$，则

$$(f_1,g_1)=1$$

推论 2　若$(g_1,f)=1,(g_2,f)=1$,则

$$(g_1g_2,f)=1$$

推论 3　若$f(x)\mid g_1(x)g_2(x)$,且$(f,g_1)=1$,则

$$f(x)\mid g_2(x)$$

推论 4　若$f_1(x)\mid g(x),f_2(x)\mid g(x)$且$(f_1,f_2)=1$,则

$$f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$$

§4　多项式的分解

一、不可约多项式及其性质

定义　设$p(x)\in P[x]$且$\partial^0(p(x))\geqslant 1$,如果$p(x)$不能分解为$P[x]$中两个次数比$p(x)$低的多项式之积,称$p(x)$在$P$上不可约,否则称$p(x)$在$P$上可约.

命题 1　设$p(x)\in P[x],\partial^0(p(x))\geqslant 1$,则$p(x)$不可约$\Leftrightarrow p(x)$只有形如$c$与$cp(x)$的因式,这里$c\neq 0,c\in P$.

命题 2　若$p(x)$为P上的不可约多项式,则$\forall f(x)\in P[x]$,或者$p\mid f$或者$(p,f)=1$.

命题 3　若$p(x)$为P上的不可约多项式,则对

$$f(x),g(x)\in P[x]$$

只要$p\mid fg$,就必有$p\mid f$或$p\mid g$.

命题 3′　若$p(x)$为P上的不可约多项式,

$$p(x)\mid f_1(x)\cdots f_s(x),s\geqslant 2$$

则$\exists i,p(x)\mid f_i(x)(1\leqslant i\leqslant s)$.

二、分解定理

定理 4.1　设$f(x)\in P[x]$且$\partial^0(f(x))\geqslant 1$,则

(1)$f(x)$必可分解为P上的有限个不可约多项式的乘积;

(2)如果

$$\begin{aligned}f(x)&=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)\\&=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)\end{aligned}$$

其中$p_i(x),q_j(x)(i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,t)$为$P$上的不可约多项式,则$s=t$且适当调整因式的次序后有

$$p_i(x)=c_iq_i(x),i=1,2,\cdots,s$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为 P 的非零常数.

设 $f(x)\in P[x]$, $\partial^0(f(x))\geqslant 1$, 若

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)\cdots p_r^{r_r}(x) \tag{1}$$

这里 $c\neq 0$, $p_i(x)$ 为首 1 的不可约多项式, $i\neq j$ 时 $p_i(x)\neq p_j(x)(i,j=1,2,\cdots,s)$, 称(1)式为 $f(x)$ 的标准分解式.

三、重因式定义

定义 $p(x)$ 为 P 上的不可约多项式满足 $p^k(x)\mid f(x)$, 而 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$, 称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式(这里 k 为非负整数).

当 $k=0$ 时, $p(x)$ 不为 $f(x)$ 的因式; 当 $k=1$ 时, 称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的单因式; 当 $k>1$ 时, 称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的重因式.

定理 4.2 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式($k\geqslant 1$), 则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $(k-1)$ 重因式.

推论 1 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式 $\Leftrightarrow p(x)$ 为 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式.

推论 2 $f(x)$ 无重因式 $\Leftrightarrow (f(x),f'(x))=1$.

§5 有理系数多项式

定义 设 $f(x)$ 为整系数多项式, 如果 $f(x)$ 的各项系数的最大公因数是 1, 称 $f(x)$ 为本原多项式.

引理 1 两个本原多项式的乘积仍是本原多项式.

引理 2 设非零的整系数多项式 $f(x)$ 在有理数域 Q 上可约, 则 $f(x)$ 必能分解为两个次数较 $f(x)$ 低的整系数多项式的乘积.

定理 5.1 (Eisenstein) 设整系数多项式 $f(x)=a_nx_n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq 0,n\geqslant 1)$, 如果存在素数 p 使得 $p\mid a_i(i=0,1,2\cdots,n-1)$, $p\nmid a_n$, 且 $p^2\nmid a_0$, 则 $f(x)$ 在有理数域不可约.

§6 复、实系数多项式

代数基本定理 任何次数不小于 1 的复系数多项式必有一个复数根.

可将代数基本定理改述为: 任何次数不小于 1 的复系数多项式必有一个一次因式 $x-c$(c 为复数).

由此可知, 对于复系数多项式, 仅一次式是不可约的, 因而, 其分解定理如

下:

定理 6.1　任何 $n(n \geqslant 1)$ 次复系数多项式 $f(x)$ 必有唯一的标准分解式

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{l} (x - c_i)^{r_i}$$

其中 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数, $c_i(i = 1,2,\cdots,l)$ 为互异复数, $r_i(i = 1,2,\cdots,l)$ 为正整数.

推论　任何 $n(n \geqslant 1)$ 次复系数多项式恰有 n 个复根.

定理 6.2　任何 $n(n \geqslant 1)$ 次实系数多项式必有唯一的标准分解式

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{s} (x - c_i)^{r_i} \cdot \prod_{j=1}^{t} (x^2 + p_j x + q_j)^{l_i}$$

其中 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数, $c_i(i = 1,2,\cdots,s)$ 及 $p_j \cdot q_j(j = 1,2,\cdots,t)$ 都是实数, $r_i(i = 1,2,\cdots,s)$ 及 $l_j(j = 1,2,\cdots,t)$ 都是正整数, 且 $x^2 + p_j x + q_j$ 不可约, 即

$$p_j^2 - 4q_j < 0(j = 1,2,\cdots,t)$$

推论　对于实系数多项式, 仅一次式及形如 $x^2 + px + q$ 而 $p^2 - 4q < 0$ 的二次式不可约.

问题探讨

1. (四川师范大学)　设 $f(x), g(x)$ 不全为 0, 求证:

$$(f,g)^n = (f^n, g^n) \qquad (n \text{ 为正整数})$$

【证】　*方法 1*　令 $d(x) = (f(x), g(x))$, 则需证的可改为 $d^n(x) = (f^n(x), g^n(x))$.

因为 $d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)$, 所以

$$f(x) = d(x)f_1(x), \quad g(x) = d(x)g_1(x)$$

且

$$(f_1(x), g_1(x)) = 1 \tag{1}$$

于是 $f^n(x) = d^n(x)f_1^n(x), g^n(x) = d^n(x)g_1^n(x)$. 此即 $d^n(x) \mid f^n(x), d^n(x) \mid g^n(x)$. 再由式(1)有 $(f_1^n(x), g_1^n(x)) = 1$, 从而存在 $u(x), v(x)$ 使

$$u(x)f_1^n(x) + v(x)g_1^n(x) = 1$$

再边乘 $d^n(x)$ 有　$$d^n(x)u(x)f^n(x) + d^n(x)v(x)g^n(x) = d^n(x)$$

对 $\forall \varphi(x) \mid f^n(x), \varphi(x) \mid g^n(x)$, 由上式知 $\varphi(x) \mid d^n(x)$, 故

$$d^n(x) = (f^n(x), g^n(x))$$

方法 2　令 $d(x) = (f(x), g(x))$, 则

$$f(x) = d(x)f_1(x), \quad g(x) = d(x)g_1(x), \quad (f_1(x), g_1(x)) = 1$$

从而$(f_1^n(x),g_1^n(x))=1$. 故有

$$(f^n(x),g^n(x))=(d^n(x)f_1^n(x),d^n(x)g_1^n(x))$$
$$=d^n(x)(f_1^n(x),g_1^n(x))=d^n(x)$$

2. 证明:$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$,其中$h(x)$的首项系数为1.

【证】 令$d(x)=(f(x),g(x))$,则有$d(x)\mid f(x)$且$d(x)\mid g(x)$,从而

$$d(x)h(x)\mid f(x)h(x),d(x)h(x)\mid g(x)h(x)$$

又由$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$得

$$d(x)h(x)=u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)$$

故$d(x)h(x)$是$f(x)h(x)$与$g(x)h(x)$的最大公因式. 又因为$d(x)h(x)$的首项系数为1,所以

$$(f(x)h(x),g(x)h(x))=d(x)h(x)=(f(x),g(x))h(x)$$

3. 设$f(x)$为多项式,则$f(x)=kx$的充要条件为$f(a+b)=f(a)+f(b)$, $\forall a,b$成立.

【证】 必要性显然,下面来证明充分性,事实上,由条件

$$f(2x)=f(x+x)=2f(x)$$

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$,而

$$f(2x)=2^na_nx^n+2^{n-1}a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+2a_1x+a_0$$
$$=2(a_nx^n+\cdots+a_1^x+a_0)$$

$i\geqslant 2$时,由$2^ia_i=2a_i$得$a_i=0$,又$a_0=2a_0$,所以$a_0=0$,从而$f(x)=a_1x$,即$f(x)=kx$成立.

4. 设$f(x)$是复系数多项式,$\bar{f}(x)$表示与$f(x)$系数共轭的多项式,若$d(x)=(\bar{f}(x),f(x))$,则$d(x)$为实系数多项式.

【证】 $d(x)=0$时,即$f(x)=0$,结论成立,设$d(x)\neq 0$,$d(x)\mid f(x)$, $d(x)\mid\bar{f}(x)$,故$\bar{d}(x)\mid f(x)$,$\bar{d}(x)\mid\bar{f}(x)$.

又$d(x)=u(x)f(x)+v(x)\bar{f}(x)$,故$\bar{d}(x)=\bar{u}(x)\bar{f}(x)+\bar{v}(x)f(x)$,$\bar{d}(x)$为$f(x)$和$\bar{f}(x)$的最大公因式.

又$d(x)$,$\bar{d}(x)$均为首1的,故$d(x)=\bar{d}(x)$,故$d(x)$为实系数多项式.

5. 设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$为整系数多项式,若$a_n,a_0$为奇数且$f(1)$,$f(-1)$至少有一个为奇数,或者$a_n,a_0,f(1),f(-1)$都不能被3整除,则$f(x)$无有理根.

【证】 (1)设a_n,a_0为奇数且$f(1)$,$f(-1)$至少有一个为奇数,若有有理

根$\frac{s}{r}$,$(s,r)=1$则$r\mid a_n$,$s\mid a_0$,故r,s为奇数,则

$$f(x)=(x-\frac{s}{r})g(x),$$

$$rf(x)=(rx-s)g(x),$$

$$rx-s\mid f(x)$$

因而
$$f(x)=(rx-s)q(x)$$

$rx-s$为本原多项式,故$q(x)$为整系数多项式,

$$f(1)=(r-s)q(1),$$

$$f(-1)=(-r-s)q(-1),$$

r,s均为奇数,因而$r-s$, $-r-s$均为偶数,故$f(1)$,$f(-1)$均为偶数,与已知矛盾.

(2)$a_n,a_0,f(1),f(-1)$均不能被3整除,若$f(x)$有有理根,$\frac{s}{r}$,$(r,s)=1$,而$r\mid a_n$,$s\mid a_0$则r,s均不能被3整除,由上得$f(x)=(rx-s)q(x)$,$q(x)$为整系数多项式,

$$f(-1)=(-r-s)q(-1),$$

$$f(1)=(r-s)q(1)$$

设$r=3m_1+1$,$s=3m_2+1$,则$3\mid r-s$,故$3\mid f(1)$矛盾,同样证明其他情况,因而$f(x)$没有有理根.

6. 设$f(x),g(x),h(x)$是数域P上的多项式,且有

$$\begin{cases}(x+a)f(x)+(x+b)g(x)=(x^2+c)h(x) & (1)\\(x-a)f(x)+(x-b)g(x)=(x^2+c)h(x) & (2)\end{cases}$$

其中$a,b,c\in P$,$a\neq 0$,$a\neq b$,$c\neq 0$,求证x^2+c是$f(x)$和$g(x)$的公因式.

【证】 由式(1) - 式(2) 得　$af(x)+bg(x)=0$,于是

$$f(x)=-\frac{b}{a}g(x) \tag{3}$$

由式(1) + 式(2) 得

$$2(x^2+c)h(x)=2x(f(x)+g(x))=2\frac{a-b}{a}xg(x)$$

可见$(x^2+c)\mid xg(x)$,但$(x^2+c,x)=1$,故$(x^2+c)\mid g(x)$.由式(3) 得$(x^2+c)\mid f(x)$.故x^2+c是$f(x)$和$g(x)$的公因式.

7. 设$f(x)$与$g(x)$为任意两个非零多项式,且$\partial(g(x))\geqslant 1$,

证明:

$$f(x)=r_m(x)g^m(x)+\cdots+r_1(x)g(x)+r_0(x)$$

其中 $r_0(x),r_1(x),\cdots,r_m(x)$ 或为0或次数小于 $g(x)$，但 $r_m(x)\neq 0$，上述表示唯一.

【证】 由带余除法

$$f(x)=g(x)q_1(x)+r_0(x)$$

$r_0(x)=0$ 或 $\partial(r_0(x))<\partial(q(x))$，若 $\partial(q_1(x))\geqslant\partial(g(x))$，则

$$q_1(x)=g(x)q_2(x)+r_1(x),r_1(x)\text{ 为余式},$$

$$f(x)=g^2(x)q_2(x)+g(x)r_1(x)+r_0(x)$$

$$\cdots$$

$$f(x)=r_m(x)g^m(x)+\cdots+r_1(x)g(x)+r_0(x)$$

$r_i(x)$ 满足条件，$i=0,1,\cdots,m$.

若还有：$f(x)=r'_n(x)g^n(x)+\cdots+r'_1(x)g(x)+r'_0(x)$，不妨设 $n\geqslant m$，由上得到 $g(x)\mid r'_0(x)-r_0(x)$，故 $r'_0(x)=r_0(x),\cdots,r'_m(x)=r_m(x)$，从而 $n=m$.

8. 设 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 互质，则

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0\\ 0 & g(\lambda)\end{pmatrix}\text{与}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & f(\lambda)g(\lambda)\end{pmatrix}$$

是等价的 λ— 矩阵.

【证】 由条件存在 $u(\lambda),v(\lambda)$ 使

$$u(\lambda)f(\lambda)+v(\lambda)g(\lambda)=1,$$

$$v(\lambda)\times\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0\\ 0 & g(\lambda)\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} f(\lambda) & v(\lambda)g(\lambda)\\ 0 & g(\lambda)\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 1\\ 0 & g(\lambda)\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -f(\lambda)g(\lambda) & g(\lambda)\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -f(\lambda)g(\lambda) & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -f(\lambda)g(\lambda)\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & f(\lambda)g(\lambda)\end{pmatrix}$$

结论成立.

9. 证明：$g(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$ 能整除 $f(x)=1+x^4+x^8+\cdots+x^{4n}$ 的充要条件是 n 为偶数.

【证】 由条件

$$(1-x^2)g(x)=1-(x^2)^{n+1},$$

$$(1-x^4)f(x)=1-(x^4)^{n+1}$$

充分性. 设 n 为偶数,

$$1-(x^4)^{n+1}=1-(x^{2(n+1)})^2=(1+x^{2(n+1)})(1-x^{2(n+1)})$$

故 $(1-x^2)g(x)\mid(1-x^4)f(x),g(x)\mid(1+x^2)f(x)$,

我们断定 $(g(x),1+x^2)=1$,若不然,设 α 为 $1+x^2$ 与 $g(x)$ 的公共根,则

$$g(\alpha)=0,\alpha^2=-1$$

$$g(\alpha)=1+\alpha^2+(\alpha^2)^2+\cdots+(\alpha^2)^n$$

由于 n 为偶数,故 $g(a)\neq 0$,矛盾,由 $(g(x),1+x^2)=1,g(x)\mid f(x)$.

必要性. 由条件

$$g(x)=\frac{1-x^{2(n+1)}}{1-x^2},f(x)=\frac{1-x^{4(n+1)}}{1-x^4}$$

设 $f(x)=g(x)q(x)$,即

$$\frac{1-x^{4(n+1)}}{1-x^4}=\frac{1-x^{2(n+1)}}{1-x^2}q(x),$$

$$\frac{(1+x^{2(n+1)})(1-x^{2(n+1)})}{(1-x^2)(1+x^2)}=\frac{1-x^{2(n+1)}}{1-x^2}q(x),$$

$$q(x)=\frac{1+x^{2(n+1)}}{1+x^2}$$

由于 $q(x)$ 为多项式,故 $1+x^2\mid 1+x^{2(n+1)}$.

若 $n=2m+1$,即 $1+x^2\mid 1+x^{4(m+1)}$,$1+x^2=0$ 的根为 i 或 $-i$,有

$$1+i^{4(m+1)}=1+1^{m+1}=2=0$$

矛盾,由上得 n 为偶数.

10. 证明:若 $x\mid f^k(x)$,则 $x\mid f(x)$.

【证】 用反证法,若 $x\nmid f(x)$,则有 $f(x)=g(x)\cdot x+c$,其中 c 为非零常数,乘方并整理得

$$f^k(x)=h(x)\cdot x+c^k,\text{其中 } c^k\neq 0$$

这与 $x\mid f^k(x)$ 矛盾. 故 $x\mid f(x)$.

11. 如果 $x^2+x+1\mid f(x^3)+x\cdot g(x^3)$,证明:$x-1\mid f(x)$,且 $x-1\mid g(x)$.

【证】 *方法 1* 设 $f(x)=q_1(x)(x-1)+r_1,g(x)=q_2(x)(x-1)+r_2$,其中 r_1,r_2 为常数,则

$$f(x^3)=q_1(x^3)(x^3-1)+r_1,g(x^3)=q_2(x^3)(x^3-1)+r_2$$

于是有

$$f(x^3)+xg(x^3)=(x^2+x+1)(x-1)(q_1(x^3)+xq_2(x^3))+r_2x+r_1$$