



中小学教辅系列丛书
根据最新课程标准和最新教材编写

高中毕业班综合练习

数学 (理科)

主编 张宗华

供安徽地区使用

南方出版社

GAOZHONGBIYEBANZONGHELIANXI

供安徽地区使用

高中毕业班 综合练习

数学 (理科)

主 编 张宗华
副 主 编 龚为标 吴 敏
本册编写 钱 勇

南方出版社

GAOZHONGBIYEBANZONGHELIANXI

图书在版编目(CIP)数据

高中毕业班综合练习. 数学. 理科 / 张宗华主编. —海口: 南方出版社, 2008.9
ISBN 978-7-80760-082-4

I. 高... II. 张... III. 数学课—高中—习题—升学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第137704号

中小学教辅系列丛书 · 高中毕业班综合练习

数学(理科)

主编: 张宗华

责任编辑: 刘冰玉

封面设计: 田琳

出版发行: 南方出版社

邮政编码: 570208

社址: 海南省海口市和平大道70号

电话: (0898) 66160822

传真: (0898) 66160830

印刷: 合肥永青印务有限责任公司

开本: 889×1194 1/16

印张: 60

字数: 1484千字

版次: 2008年9月第1版 2008年9月第1次印刷

书号: ISBN 978-7-80760-082-4

定价: 98.00元(共4册)

如有影响阅读等印装质量问题, 请与承印厂联系调换(0551-2671569)

编写说明

2009 年我省将实行高考改革,按照新的高中课程标准进行命题。为了帮助广大考生系统复习高中各学科知识,迎接高考,我们邀请了部分长期从事高中毕业班教学工作的优秀教师编写了《高中毕业班综合练习》丛书,供安徽地区考生使用。

这套《丛书》包括语文、数学(理科)、数学(文科)、英语、物理、化学、生物、政治、历史、地理十个学科必修课和选修课内容。

《丛书》是根据教育部和省教育厅高考说明精神,以《全日制普通高级中学课程计划》和全日制普通高级中学各学科课程标准为依据,联系我省各种版本的最新高中教材而编写的。

《丛书》内容包括两大部分:

第一部分:解读考点、全面备考。本部分主要以高考考点为主线,以专题形式对高考考点进行全面复习。每个专题设置五个栏目:高考考点解读、典型例题剖析、基础知识演练、创新问题探究、经典试题回放。

第二部分:实战演练、触摸高考。本部分共编排 10 套高考模拟试题,其中英语还配有原声听力磁带,其目的是为了通过模拟训练来提高学生的解题能力。

我们希望这套《丛书》能帮助广大考生在高考中取得优异成绩,考取理想的大学。

《高中毕业班综合练习》编写组

目 录

第一轮 解读考点 全面备考

专题一 集合与函数的概念	1
专题二 初等函数及其应用	13
专题三 不等式及不等式选讲	25
专题四 三角函数	42
专题五 数列	59
专题六 平面向量	76
专题七 立体几何与空间向量及坐标系	88
专题八 解析几何与参数方程	108
专题九 概率	126
专题十 统计与统计案例	144
专题十一 算法、逻辑、推理与证明	154
专题十二 复数、导数、定积分与微积分基本定理	170

第二轮 实战演练 触摸高考

高考模拟试卷(一)	185
高考模拟试卷(二)	189
高考模拟试卷(三)	193
高考模拟试卷(四)	197
高考模拟试卷(五)	201
高考模拟试卷(六)	205
高考模拟试卷(七)	209
高考模拟试卷(八)	213
高考模拟试卷(九)	217
高考模拟试卷(十)	221
参考答案	225



第一轮 解读考点 全面备考

专题一 集合与函数的概念



高考考点解读

1. 集合的基本概念及运算

(1) 集合中的元素性质

集合中的元素具有确定性、无序性和互异性(或称不重复性).

(2) 集合的表示方法

集合有三种表示方法,即列举法、描述法及图示法.

(3) 元素与集合的关系

若一个元素 a 属于一个集合 A ,则可记作 $a \in A$;若不属于集合 A ,则可记作 $a \notin A$.

(4) 常用的数集

自然数集 $\mathbf{N}$ ($0 \in \mathbf{N}$); 整数集 $\mathbf{Z}$; 有理数集 $\mathbf{Q}$; 无理数集 $\mathbf{I}$; 实数集 $\mathbf{R}$; 复数集 $\mathbf{C}$; 正有理数集 $\mathbf{Q}^+$; 正整数集 $\mathbf{N}^+$ 或 $\mathbf{N}^*$...

(5) 集合与集合之间的关系

集合 A 是集合 B 的子集,记作 $A \subset B$,表示集合 A 中的每一个元素都属于集合 B .

集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A \subsetneq B$,表示集合 A 中的每一个元素都属于集合 B ,而集合 B 中存在元素不属于集合 A .

集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.

$A=B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$

若集合 A 有 n 个元素,则其有 2^n 个子集, $(2^n - 1)$ 个真子集, $(2^n - 2)$ 个非空真子集.

(6) 集合的运算

交集: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

并集: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

补集: $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 但 } x \notin A\}$

集合论是德国数学家康托尔在 19 世纪末创立的,是现代数学中一门基础学科.集合的初步知识是掌握和使用数学语言的基础,是每年高考中必考的知识点之一.有关集合的试题往往集中于以下几点:

①集合的概念、运算及集合与元素的关系等方面的问题.

②以集合的语言与集合的思想为载体,考查函数、方程、不等式、相交等方面的问题.

③含参数的集合问题和集合语言符号的应用等方面的问题.

高考中,集合多以选择题、填空题为主,难度不大,(如 2008 年广东卷(文)1 题、2008 年山东卷(理)1 题)但也有关于集合的解答题(如 2007 年北京卷(理)20 题).

突出重点,综合考查,在知识与方法的交汇点设计命题,是高考的一贯命题特点.集合经常以工具形式广泛应用于函数、方程、不等式等各个方面.

2. 函数的基本概念与区间

一般地,设 A, B 是非空数集,如果按照某种确定的对应关系 f ,使对于集合 A 中的任意一个数 x ,在集合 B 中都有唯一的一个数 $f(x)$ 和它对应,那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数,记作 $y=f(x), x \in A$. 其中, x 叫做自变量, x 的取值范围叫做函数的定义域;与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值,函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫做函数的值域. 显然,值域是集合 B 的子集.

区间: 设 a, b 是两个实数,而且 $a < b$. 我们规定:

①满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间,表示为 $[a, b]$.

②满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫做开区间,表示为 (a, b) .

③满足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做半开半闭区间,分别表示为 $[a, b)$, $(a, b]$.

函数的表示法有解析法、图象法和列表法.

函数的实质是两个非空数集之间的一种映射.

函数的定义域的求法:

①使函数解析式有意义的条件(如被开偶数次方根的被开方数应大于或等于 0、分母不为 0、对数的真数应大于 0 等).

②实际问题中自变量应与实际意义相符(如



人数不能为 0.3 个等).

③给定定义域上讨论函数定义域(如 $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $f:A \rightarrow B$ 为元素 1 对应 2, 这已经构成一个函数, 而此时定义域即为 $\{1\}$).

3. 函数的图象

(1) 描点法作函数图象

通过列表、描点、连线三个步骤画出函数图象. 用描点法选点时往往选取关键点, 有时也可利用函数性质(如单调性、奇偶性、周期性、对称性等)巧妙地画出函数图象.

(2) 图象变换作图法

① 平移变换

把函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $a(a>0)$ 个单位得到函数 $y=f(x+a)$ 的图象.

把函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $b(b>0)$ 个单位得到函数 $y=f(x-b)$ 的图象.

对于左、右平移变换, 方向容易出错, 在实际判断中可熟记口诀: 左加右减, 但要注意平移的单位.

对于上、下平移变换, 相比较容易掌握, 原则是: 上加下减, 但要注意加减指的是在 $f(x)$ 的整体上.

② 对称变换

$y=f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称.

$y=-f(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于 x 轴对称.

$y=-f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称.

$y=f(|x|)$ 的图象, 可先作出 $y=f(x)$ 当 $x \geq 0$ 时的图象, 再利用偶函数图象关于 y 轴对称, 作出 $y=f(|x|)$ 的图象.

③ 伸缩变换

$y=Af(x)(A>0)$ 的图象, 可将 $y=f(x)$ 的图象上的所有点纵坐标变为原来的 A 倍, 横坐标保持不变而得到.

$y=f(ax)(a>0)$ 的图象, 可将 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{a}$ 倍, 纵坐标保持不变而得到.

4. 函数的性质

(1) 函数的单调性

对于函数定义域内某一区间 D 内任意的 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$, 有

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow y=f(x) \text{ 是 } D \text{ 上的增函数} \\ f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow y=f(x) \text{ 是 } D \text{ 上的减函数} \end{cases}$$

复合函数 $U=f(g(x))$ 的单调性规律是“同增, 异减”, 即 $f(u)$ 与 $g(x)$ 若具有相同的单调性, 则 $U=f(g(x))$ 必为增函数, 若具有不同的单调性, 则 $U=f(g(x))$ 必为减函数, 要特别注意各自的定义域是否相同.

判断函数单调性的常用方法有:

①定义法; ②两个增函数(或减函数)的和仍为增函数(减函数); ③一个增函数减去一个减函数差为增函数; ④一个减函数减去一个增函数差是减函数; ⑤互为反函数的两个函数具有相同的单调性; ⑥奇函数在对称的两个区间上具有相同的单调性, 而偶函数在对称的两个区间上却有相反的单调性; ⑦利用导数方法.

一些重要函数的单调性:

① $y=x+\frac{1}{x}$ 的单调性: $(-\infty, -1] \uparrow, (-1, 0) \downarrow, (0, 1) \downarrow, [1, +\infty) \uparrow$.

② $y=ax+\frac{b}{x}(a>0, b>0)$ 的单调性: $(-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}}) \uparrow, (-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0) \downarrow, (0, \sqrt{\frac{b}{a}}) \downarrow, (\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty) \uparrow$.

(2) 函数的奇偶性

对于定义域内任意 x , 有:

$$\begin{cases} f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \text{ 为奇函数} \\ f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases}$$

函数 $y=f(x)$ 可以是奇函数也可以是偶函数, 也可以既是奇函数又是偶函数, 也可以两者都不是, 但是必须注意的是, 研究函数的奇偶性必须首先明确函数的定义域是否关于原点对称.

奇函数的图象关于原点成中心对称图形, 反之也成立. 在定义域的公共部分内, 两奇函数之积(商)为偶函数; 两偶函数之积(商)也是偶函数; 一奇一偶函数之积(商)为奇函数(注: 商时应使分母不为 0).

若函数 $y=f(x)$ 是奇函数且 0 是定义域内的值, 则 $f(0)=0$.

一些常用的奇偶函数:

① 函数 $f(x)=a^x+a^{-x}$ 为偶函数, 函数 $f(x)=a^x-a^{-x}$ 为奇函数.

② 函数 $f(x)=\log_a \frac{1-x}{1+x}$ 为奇函数.

③ 函数 $f(x)=\log_a (x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

函数图象的变换与作法是学习函数常用的方法, 而函数的单调性与奇偶性在高考中年年必考, 主要考查函数奇偶性的判定及与周期性相结合的题目, 在命题形式上主要是以选择题、填空题和解答题为主.

2008年全国各试卷在此命题,难度都不大,其中考查奇偶性与单调性的结合,是常考考点,应给予足够的重视.



典型例题剖析

【例1】 已知 $M=\{y|y=x^2\}$, $N=\{(x,y)|x^2+y^2=10\}$, 则集合 $M \cap N$ 中元素的个数是()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 多个

【分析】 集合 M 表示函数 $y=x^2$ 的值域,是一个数集且 M 表示非负实数集,集合 N 表示方程 $x^2+y^2=10$ 的所有解所对应的有序实数对,也可以说是表示圆 $x^2+y^2=10$ 上的点,是点的集合. 元素类型不同, $\therefore M \cap N = \emptyset$, 故选 A.

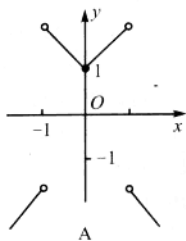
(注意:代表元素的类型是什么,再看元素的属性,从而确定该集合表示的是数集还是点集,是函数定义域还是值域等,解决这一问题关键是抓住集合与元素的实质.)

【例2】 (08山东) 满足 $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 且 $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$ 的集合 M 的个数是()

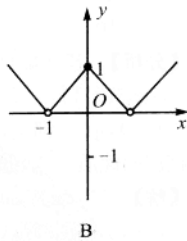
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】 利用集合交集和子集的定义,知集合 M 中包含了元素 a_1, a_2 而对于元素 a_4 , M 中可能含有,也可能不含有. 但元素 a_3 一定不在集合 M 中(否则 $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} \neq \{a_1, a_2\}$). 综上所述共有两种情况,故选 B.

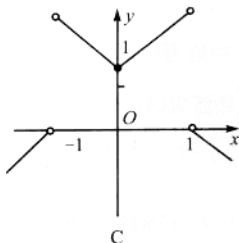
【例3】 函数 $f(x) = \frac{|1-x^2|}{1-|x|}$ 的图象是()



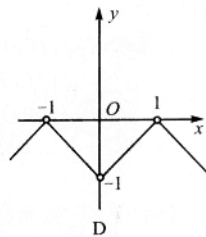
A



B



C



D

【分析】 可将 $f(x)$ 的解析式写成分段函数的形式(去掉绝对值)得出结论. 要求在自变量的不同取值范围内进行讨论,培养分类讨论的思想,锤炼学生思维的严密性. 另外,也可以取特殊值用排除法来解.

【解析】 法一:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < -1 \\ 1-x, & -1 < x \leq 0 \\ 1+x, & 0 < x < 1 \\ -(1+x), & x > 1 \end{cases}$$

由 $x < -1$ 时的图象知选 A.

法二:取 $x=2$, 得到 $f(2)=-3$, 从而结合选项可排除 B、C、D. 故选 A.

【例4】 若 $A=\{1, 3, x\}$, $B=\{x^2, 1\}$, 且 $A \cup B = \{1, 3, x\}$, 则这样的 x 的不同取值有()

- A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

【分析】 若由 $x^2=1$, $x^2=3$, $x^2=x$ 三种情况去解, 则一共可解出 5 个不同的 x 的值, 从而选择了 D, 但考虑到集合中元素的互异性, 由 $x \neq 1$, 将 $x^2=x$ 这种情况舍去, 只剩下 $x^2=3$, 选择了 A. 当然由已知不难得出 $B \subseteq A$, $\therefore x^2 \in A$, $x^2 \neq 1$, ① $x^2=3$, 得 $x = \pm\sqrt{3}$, 都符合; ② $x^2=x$, 得 $x=0$ 或 $x=1$, 而 $x \neq 1$, $\therefore x=0$, 综合①②, 共有 3 个值. 故选 B.

对于选择了 D 和 A 选项的同学, 错误的原因主要在于没考虑互异性或考虑不全面.

【例5】 设集合 $A=\{(x, y) | y=2x-1, x \in \mathbb{N}^*\}$, $B=\{(x, y) | y=ax^2-ax+a, x \in \mathbb{N}^*\}$, 问是否存在非零整数 a , 使 $A \cap B \neq \emptyset$? 若存在, 请求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

【分析】 A 为直线 $y=2x-1$ 上在 y 轴右侧的整点, B 为抛物线 $y=ax^2-ax+a$ 上 y 轴右侧的整点, 由 $A \cap B \neq \emptyset$, 即这两条曲线在 y 轴右侧有公共整点.

【解】 将方程 $y=2x-1$ 代入 $y=ax^2-ax+a$ 得 $ax^2-(a+2)x+a+1=0$.

$\therefore A \cap B \neq \emptyset$, $\therefore$ 上述方程有整数解.

首先由 $\Delta = (a+2)^2 - 4a(a+1) \geq 0$, 得

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq a \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

又由 $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $\therefore a = -1$ 或 $a = 1$.

当 $a = -1$ 时, 由 $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=-x^2+x-1 \end{cases}$

得 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$, 均不在 y 轴右侧, 舍去.



当 $a = 1$ 时, 由 $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - x + 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$, 且 $(1, 1), (2, 3)$ 均为 y 轴右侧的整点, $\therefore a = 1$ 满足 $A \cap B \neq \emptyset$.

注: 本题抓住 $A \cap B \neq \emptyset$, 并以此作为突破口将问题转化为直线与抛物线交点的问题. 另外, 为求 y 轴右侧整点, 采用补集思想, 先由 $\Delta \geq 0$ 确定范围, 再逐个检验, 分类讨论各种情况.

【例 6】 求函数 $y = \log_0(x^2 - 3x + 2)$ 的单调区间及增减性.

【分析】 本题属于求复合函数的单调性的问题, 题中可先令 $u = x^2 - 3x + 2$, 由二次函数的单调性, 知当 $x \in (-\infty, \frac{3}{2}]$ 时, $u(x)$ 为减函数; 当 $x \in (\frac{3}{2}, +\infty)$ 时, $u(x)$ 为增函数, 但这样易忽略 $u(x) > 0$ 这个条件, 从而得出错误结论, 对数要有意义, 必须使真数 $x^2 - 3x + 2 > 0$, 即 $x > 2$ 或 $x < 1$, 所以, 要注意使函数在定义域内, 然后再讨论单调性.

【解】 由 $u = x^2 - 3x + 2 > 0$ 得 $x < 1$ 或 $x > 2$, 结合二次函数的图象及单调性, 易知当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $u(x)$ 为减函数; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $u(x)$ 为增函数.

又 $y = \log_0 u$ 为减函数, 由复合函数的单调性 (同增异减) 知, 在 $x \in (-\infty, 1)$ 时, y 为增函数; $x \in (2, +\infty)$ 时, y 为减函数.

注: 本题中要注意函数的定义域是讨论函数的前提, 任何问题的解决必须在定义域内进行, 否则没有意义.

【例 7】 若 $a = \frac{\ln 2}{2}, b = \frac{\ln 3}{3}, c = \frac{\ln 5}{5}$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$
C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

【分析】 本例求 a, b, c 的大小, 直接比较有点困难, 但 a, b, c 的表达形式相同, 所以可以通过构造函数获得解答.

【解】 构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$, $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

令 $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0, \ln x < 1, \therefore 0 < x < e$.

$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0, \ln x > 1, \therefore x > e$.

$\therefore f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(e, +\infty)$ 上是减函数, 在 $(0, e)$

上是增函数.

法一: $a = \frac{2 \ln 2}{4} = \frac{\ln 4}{4}$,

$\therefore 5 > 4 > 3 > e, \therefore f(5) < f(4) < f(3)$.

$\therefore b > a > c$, 故选 C.

法二: 由 $y = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(e, +\infty)$ 上为减函数,

又 $e < 3 < 5, \therefore \frac{\ln 3}{3} > \frac{\ln 5}{5}, \therefore b > c$.

$a - b = \frac{1}{6} (6a - 6b) = \frac{1}{6} (\ln 8 - \ln 9) < 0$,

$\therefore a < b$.

$a - c = \frac{1}{10} (10a - 10c) = \frac{1}{10} (\ln 32 - \ln 25) > 0$.

$\therefore a > c$, 故 $b > a > c$. 选 C.

注: 本题为比较三个数的大小, 解题过程巧妙地应用函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$, 即使能构造函数, 判断出函数的单调性, 但 2, 3, 5 不在同一个单调区间, 而 $a = \frac{2 \ln 2}{4} = \frac{\ln 4}{4}$ 这一巧妙变化学生很难掌握, 而解法二中比较 a, b, a, c 的技巧, 关键在于找到各系数的最小公倍数.

另外, 本题的解法是函数方程思想的一个应用. 思想方法是数学中考查的重点, 方法灵活多变, 平时要多注意积累.

【例 8】 设 $f(x), g(x)$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $\{x | f(x) > 0\} = \{x | 4 < x < 10\}$, $\{x | g(x) > 0\} = \{x | 2 < x < 5\}$. 则集合 $\{x | f(x) \cdot g(x) > 0\}$ 等于 ()

- A. $(2, 10)$ B. $(4, 5)$
C. $(-10, -2) \cup (2, 10)$ D. $(-5, -4) \cup (4, 5)$

【分析】 若把集合 $\{x | f(x) \cdot g(x) > 0\}$ 等同于 $\{x | 4 < x < 10\} \cup \{x | 2 < x < 5\}$ 易得错解 B 或 A. 忽略了“ $f(x), g(x)$ 都是奇函数, 因而 $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数”的性质应用, 最终导致结论出错.

【解】 $\because f(x), g(x)$ 都是奇函数,

$\therefore f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数.

由对称性可知: 只要求 $f(x) > 0, g(x) > 0$ 的解即可.

由条件可知: $f(x) > 0$ 的解为 $(4, 10), g(x) > 0$

的解为 $(2, 5), \therefore \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ 的解为 $(4, 5)$

故 $f(x) \cdot g(x)$ 的解为 $(-5, -4) \cup (4, 5)$, 故选 D.

【例 9】 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $(0,$

$+\infty$), 当 $x>1$ 时, $f(x)>0$, 且 $f(x \cdot y)=f(x)+f(y)$.

(1) 求 $f(1)$;

(2) 求证: $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$;

(3) 证明: $f(x)$ 在定义域上是增函数;

(4) 如果 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$, 求满足不等式 $f(x)-f\left(\frac{1}{x-2}\right)\geq 2$ 的 x 的取值范围.

【分析】 本题中的函数是抽象形式的函数, 涉及到了函数在某一点处的特殊值、函数性质的证明、不等式的求解. 关于抽象函数的求解方法主要是赋值法, 利用特殊值配凑出题中需要的结论形式. 在本题的求解中, 一个典型的方法技能是根据所给式子 $f(x \cdot y)=f(x)+f(y)$ 进行适当配凑, 这里该式可推出 $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$, 实际上已处于公式的地位, 在求解中必须以此为依据. 当然在配凑的过程中, 也不是漫无目的胡乱配凑, 可结合一些具体函数进行联想试探 (如 $y=\log_3 x$), 从中探寻解题思路, 但也要注意不能用 $y=\log_3 x$ 代替原题中的函数去解答. 下面列出一些常见的抽象函数与具体函数对照表, 供参考:

$$\textcircled{1} \left. \begin{aligned} f(x+y) &= f(x)+f(y) \\ f(x \cdot y) &= xf(y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = kx (k \neq 0)$$

$$\textcircled{2} \left. \begin{aligned} f(x+y) &= f(x) \cdot f(y) \\ f(xy) &= [f(x)]^y \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = a^x (a > 0$$

且 $a \neq 1$)

$$\textcircled{3} \left. \begin{aligned} f(x \cdot y) &= f(x)+f(y) \\ f(x^y) &= yf(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = \log_a x (a$$

>0 且 $a \neq 1, x > 0$)

$$\textcircled{4} \left. \begin{aligned} f(x)+f(y) &= 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ f(x) \cdot f(y) &= \frac{1}{2}f(x+y) + \frac{1}{2}f(x-y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$f(x) = \cos x$$

$$\textcircled{5} f(x \pm y) = \frac{f(x) \pm f(y)}{1 \mp f(x) \cdot f(y)} \Rightarrow f(x) = \tan x$$

【解】 (1) 令 $x=y=1$, 得 $f(1)=2f(1)$, 故 $f(1)=0$.

(2) 令 $y=\frac{1}{x}$, 得 $f(1)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$, 故 $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$.

(3) 任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_2)$

$$-f(x_1)=f(x_2)+f\left(\frac{1}{x_1}\right)=f\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

由于 $\frac{x_2}{x_1} > 1$, 故 $f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0$, 从而 $f(x_2) > f(x_1)$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

(4) 由于 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$, 而 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-f(3)$, 故 $f(3)=1$, 在 $f(x \cdot y)=f(x)+f(y)$ 中, 令 $x=y=3$, 得 $f(9)=f(3 \times 3)=f(3)+f(3)=1+1=2$.

又由 (2) 的结论知:

$$-f\left(\frac{1}{x-2}\right)=f(x-2),$$

故所给不等式可化为 $f(x)+f(x-2) \geq f(9)$,

$$\text{即 } f[x(x-2)] \geq f(9). \therefore \begin{cases} x > 0, \\ x-2 > 0, \\ x(x-2) \geq 9, \end{cases}$$

解之得 $x \geq 1 + \sqrt{10}$.

$\therefore x$ 的取值范围是 $[1 + \sqrt{10}, +\infty)$.



基础知识演练

一、选择题

1. 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{2\}$ B. $\{3\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $\{1, 3\}$

2. 设 $A=\{x|x>1\}$, $B=\{x|x^2>x\}$, 则 $A \cup B =$ ()

A. $\{x|x>1\}$ B. $\{x|x<0\}$

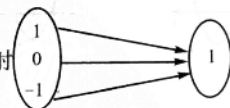
C. $\{x|x>1 \text{ 或 } x<0\}$ D. $\emptyset$

3. 已知集合 $A=\{x|x<a\}$, $B=\{x|1<x<2\}$, 且 $A \cup (\complement_{\mathbb{R}} B) = \mathbb{R}$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $a \leq 1$ B. $a < 1$ C. $a \geq 2$ D. $a > 2$

4. 若 A, B 两集合满足: $A \cup B = A$, 则一定有 ()

A. $A \subseteq B$ B. $B \subseteq A$ C. $A \subsetneq B$ D. $B \subsetneq A$

5. 由映射  表示的函数的

奇偶性是 ()

A. 奇函数

B. 偶函数

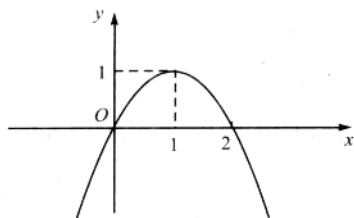
C. 非奇非偶函数

D. 既是奇函数, 也是偶函数

6. 设映射 $f: x \rightarrow -x^2 + 2x$ 是实数集 M 到实数集 N 的一个映射 (如图), 若对于实数 $p \in N$, 在 M



中不存在原象,则 p 的取值范围是 ()



- A. $(1, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$
C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, 1]$

7. 在实数集 $\mathbf{R}$ 上定义的一个函数 $y=f(x)$ 是偶函数,且 $f(x)=f(2-x)$,若 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上是减函数,则 $f(x)$ ()

- A. 在区间 $[-2, -1]$ 上是增函数,在区间 $[3, 4]$ 上是增函数
B. 在区间 $[-2, -1]$ 上是增函数,在区间 $[3, 4]$ 上是减函数
C. 在区间 $[-2, -1]$ 上是减函数,在区间 $[3, 4]$ 上是增函数
D. 在区间 $[-2, -1]$ 上是减函数,在区间 $[3, 4]$ 上是减函数

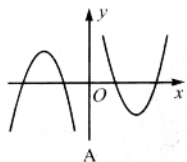
8. 设函数 $f(x)=\sin(2x+\phi)$ ($0\leq\phi\leq\pi$) 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,则 ϕ 的值是 ()

- A. 0 B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

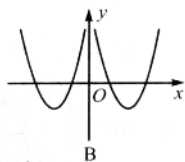
9. 函数 $y=\frac{\log_2(x-1)}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域为 ()

- A. $(1, 2]$ B. $(1, 2)$
C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, 2)$

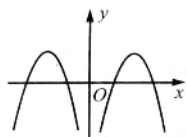
10. 函数 $f(x)=\log_2|x|$, $g(x)=-x^2+2$, 则 $f(x)\cdot g(x)$ 的图象只可能是 ()



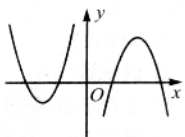
A



B



C



D

二、填空题

1. 设集合 $A=\{5, \log_2(a+3)\}$, 集合 $B=\{3, m^2\}$, 若 $B\subseteq A$, 则实数 $m=$.

2. 设集合 $A=\{x||x|<4\}$, $B=\{x|x^2-4x+3>0\}$, 则集合 $A\cup B=$.

3. 若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 对任意实数 x , 都有 $f(x+3)\leq f(x)+3$ 和 $f(x+2)\geq f(x)+2$, 且 $f(5)=5$, 则 $f(2009)=$.

4. 如果函数 $y=\begin{cases} 2x-3(x>0) \\ f(x) (x<0) \end{cases}$ 是奇函数, 则 $f(x)=$.

三、解答题

1. 记函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x-3}{x+1}}$ 的定义域为 A , $g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)]$ ($a<1$) 的定义域为 B , 则

(1) 求 A ;

(2) 若 $B\subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

2. 设 $f(x)=-\frac{x}{1+|x|}$ ($x\in\mathbf{R}$), 区间 $M=[a, b]$ ($a<b$), 集合 $N=\{y|y=f(x), x\in M\}$, 则使 $M=N$ 成立的实数对 (a, b) 是否存在? 若存在, 有几对?

3. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 设 $F(x)=f(x)-f(a-x)$,

(1) 用函数单调性定义证明: $F(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数;

(2) 证明: 函数 $y = F(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a}{2}, 0)$ 成中心对称图形.



创新问题探究

一、选择题

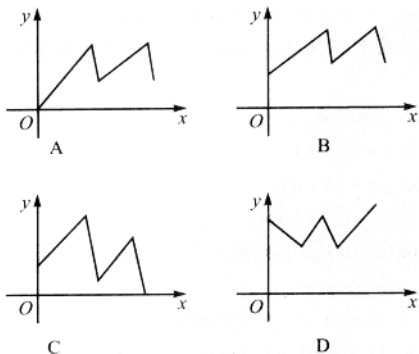
1. 设向量集合 $M = \{a | a = (1, 2) + \lambda(3, 4), \lambda \in \mathbf{R}\}$, $N = \{a | a = (2, 3) + \lambda(4, 5), \lambda \in \mathbf{R}\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{(1, 1)\}$ B. $\{(1, 1), (-2, -2)\}$
C. $\{(-2, -2)\}$ D. $\emptyset$

2. 某班有 50 名学生报名参加两项比赛, 参加 A 项的有 30 人, 参加 B 项的有 33 人, 且 A, B 项都不参加的同学比 A, B 项都参加的同学的三分之一多一人, 则只参加 A 项, 没有参加 B 项的学生有多少人? ()

- A. 13 B. 20 C. 17 D. 9

3. 你一定知道乌鸦喝水的故事吧! 一个紧口瓶中盛有一些水, 乌鸦想喝, 但是嘴够不着瓶中的水, 于是聪明的乌鸦衔来一些小石子放入瓶中, 瓶中水面的高度随着石子的增多而上升, 乌鸦喝到了水, 但是还没有解渴, 瓶中的水面就下降到了乌鸦够不着的高度, 乌鸦只好再去衔些石子放入瓶中, 水面又上升, 乌鸦终于喝足了水, 哇哇地飞走了. 如果设衔入瓶中石子的体积为 x , 瓶中水面的高度为 y , 下面能大致表示上面故事情节的图象是 ()



4. 设 $f(x) = x^2$, 集合 $A = \{x | f(x) = x, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | f[f(x)] = x, x \in \mathbf{R}\}$, 则 A 与 B 的关系是 ()

- A. $A \cap B = A$ B. $A \cap B = \emptyset$
C. $A \cup B = \mathbf{R}$ D. $A \cup B = \{-1, 1, 0\}$

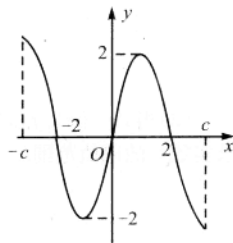
5. 设集合 $P = \{1, 2\}$, $Q = \{2, 3, 4\}$, 定义一种新的运算 $P * Q = \{(a, b) | a \in P, b \in Q\}$, 则 $P * Q$ 中元素的个数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

6. 已知函数 $f(x) = \lg \frac{2+x}{2-x}$, $g(x) = \ln(ax^2 + 2x + a)$. 若函数 $y = f(\frac{x}{2}) + f(\frac{2}{x})$ 的定义域为 A, 使函数 $g(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 的实数 a 的取值集合为 B, 则 $A \cup B$ 等于 ()

- A. $(-4, 4)$
B. $(-2, 2)$
C. $(-2, -1) \cup (0, 2)$
D. $(-4, -1) \cup (1, +\infty)$

7. $f(x)$ 是定义在区间 $[-c, c]$ 上的奇函数, 其图象如图所示. 令 $g(x) = af(x) + b$, 则下列关于函数 $g(x)$ 的叙述中正确的是 ()



A. 若 $a < 0$, 则函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称

B. 若 $a = -1, -2 < b < 0$, 则方程 $g(x) = 0$ 有大于 2 的一个实数根

C. 若 $a \neq 0, b = 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有两个实根

D. 若 $a \geq 1, b > 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有三个实数根

8. 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 且 $f(2) = 0$, 则使得 $f(x) < 0$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(2, +\infty)$
C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 2)$

二、填空题

1. 若函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 2a^2})$ 是奇函数, 则 $a =$ _____.

2. 已知 $f(x) = a \sin 2x + b \tan x + 1$, 且 $f(-2) = 4$, 那么 $f(\pi + 2) =$ _____.



三、解答题

1. 若不等式 $x^2 + ax + 1 \geq 0$ 对一切 $x \in (0, \frac{1}{2}]$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

2. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $f(x+2) = -f(x)$, 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x^3$.

(1) 求证: 直线 $x=1$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴;

(2) $x \in [1, 5]$ 时, 求 $f(x)$ 的解析式;

(3) 当 $A = \{x \mid |f(x)| > a, x \in \mathbf{R}\}$, 如果 $A \neq \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

3. 设 $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $g\left[g\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ 的值为多少?

4. 已知两个整数集 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2\}$, 其中 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, 试求:

(1) 当 $A \cap B = \{a_1, a_4\}$, 且 $a_1 + a_4 = 10$ 时, a_1, a_4 的值应各是多少?

(2) 若 $A \cup B$ 中所有元素之和为 124, 你能确定集合 A, B 中所有的元素吗?



经典试题回放

一、选择题

1. (07 江苏) 已知全集 $U = \mathbf{Z}$, $A = \{-1, 0, 1\}$, $2, B = \{x \mid x^2 = x\}$, 则 $A \cap \complement_U B$ 为 ()

- A. $\{-1, 2\}$ B. $\{-1, 0\}$
C. $\{0, 1\}$ D. $\{1, 2\}$

2. (07 陕西) 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x-3| < 2\}$, 则集合 $\complement_U A =$ ()

- A. $\{2, 3, 4, 5\}$ B. $\{2, 3, 4\}$
C. $\{1, 5\}$ D. $\{1, 3\}$

3. (08 广东) 第二十九届夏季奥林匹克运动会将于 2008 年 8 月 8 日在北京举行, 若集合 $A = \{\text{参加北京奥运会比赛的运动员}\}$, 集合 $B = \{\text{参加北京奥运会比赛的男运动员}\}$, 集合 $C = \{\text{参加北京奥运会比赛的女运动员}\}$, 则下列关系正确的是 ()

- A. $A \subseteq B$ B. $B \subseteq C$
C. $A \cap B = C$ D. $B \cup C = A$

4. (08 海南, 宁夏) 已知集合 $M = \{x \mid (x+2)(x-1) < 0\}$, $N = \{x \mid x+1 < 0\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()

- A. $(-1, 1)$ B. $(-2, 1)$
C. $(-2, -1)$ D. $(1, 2)$

5. (07 广东) 设 S 是至少含有两个元素的集合. 在 S 上定义了一个二元运算“ $*$ ”(即对任意的 $a, b \in S$, 对于有序元素对 (a, b) , 在 S 中有唯一确定的元素 $a * b$ 与之对应), 若对任意的 $a, b \in S$, 有 $a * (b * a) = b$, 则对任意的 $a, b \in S$, 下列等式中不恒成立的是 ()

- A. $(a * b) * a = a$
B. $b * (b * b) = b$
C. $[a * (b * a)] * (a * b) = a$
D. $(a * b) * [b * (a * b)] = b$

6. (07 安徽) 下列函数中, 反函数是其自身的函数为 ()

- A. $f(x) = x^2, x \in [0, +\infty)$
B. $f(x) = x^3, x \in (-\infty, +\infty)$



C. $f(x) = e^x, x \in (-\infty, +\infty)$

D. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$

7. (06 湖南) 函数 $y = \sqrt{\log_2 x - 2}$ 的定义域为 ()

A. $(3, +\infty)$ B. $[3, +\infty)$

C. $(4, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$

8. (07 江苏) 设函数 $f(x)$ 定义在实数集上, 它的图象关于直线 $x=1$ 对称, 且当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = 3^x - 1$, 则有 ()

A. $f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{2}{3}\right)$

B. $f\left(\frac{2}{3}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right)$

C. $f\left(\frac{2}{3}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right)$

D. $f\left(\frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{2}{3}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right)$

9. (07 福建) 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则满足 $f\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) < f(1)$ 的实数 x 的取值范围是 ()

A. $(-1, 1)$

B. $(0, 1)$

C. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

10. (06 全国 II) 函数 $y = f(x)$ 与 $g(x) = \log_2 x$ ($x > 0$) 的图象关于原点对称, 则 $f(x)$ 的表达式为 ()

A. $f(x) = \frac{1}{\log_2 x} \quad (x > 0)$

B. $f(x) = \frac{1}{\log_2 (-x)} \quad (x < 0)$

C. $f(x) = -\log_2 x \quad (x > 0)$

D. $f(x) = -\log_2 (-x) \quad (x < 0)$

11. (07 浙江) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \geq 1 \\ x & |x| < 1 \end{cases}$, $g(x)$ 是二次函数, 若 $f(g(x))$ 的值域是 $[0, +\infty)$, 则 $g(x)$ 的值域是 ()

A. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

B. $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$

C. $[0, +\infty)$

D. $[1, +\infty)$

12. (07 山东) 设 $a \in \left\{-1, 1, \frac{1}{2}, 3\right\}$, 则使函数 $y = x^a$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 而且 $y = x^a$ 为奇函数的所有 a 值为 ()

A. 1, 3

B. -1, 1

C. -1, 3

D. -1, 1, 3

二、填空题

1. (08 重庆) 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{3, 4\}$, 则 $(A \cup B) \cap (\complement_U C) =$ _____.

2. (07 福建) 中学数学中存在许多关系, 比如“相等关系”、“平等关系”等等, 如果集合 A 中元素之间的一个关系“ $\sim$ ”满足以下三个条件:

(1) 自反性: 对于任意 $a \in A$, 都有 $a \sim a$;

(2) 对称性: 对于 $a, b \in A$, 若 $a \sim b$, 则有 $b \sim a$;

(3) 传递性: 对于 $a, b, c \in A$, 若 $a \sim b, b \sim c$, 则有 $a \sim c$.

则称“ $\sim$ ”是集合 A 的一个等价关系. 例如“数的相等”是等价关系, 而“直线的平行”不是等价关系 (自反性不成立). 请你列出两个等价关系: _____.

3. (07 四川) 若函数 $f(x) = e^{-(x-a)^2}$ (e 是自然对数的底数) 的最大值是 m , 且 $f(x)$ 是一偶函数, 则 $m+u =$ _____.

4. (07 上海) 函数 $y = \frac{\lg(4-x)}{x-3}$ 的定义域是 _____.

5. (07 宁夏) 设函数 $f(x) = \frac{(x+1)(x+a)}{x}$ 为奇函数, 则实数 $a =$ _____.

6. (07 江西) 设有一组圆 $C_k: (x-R+1)^2 + (y-3k)^2 = 2k^4$ ($R \in \mathbf{N}^*$), 下列四个命题:

A. 存在一条定直线与所有圆均相切;

B. 存在一条定直线与所有圆均相交;

C. 存在一条定直线与所有圆均不相交;

D. 所有圆均不经过原点.

其中真命题的代号是 _____.

三、解答题

1. (06 上海) 设 S 为满足下列两个条件的实数所组成的集合:

① $1 \notin S$; ② 若 $a \in S$,

则 $\frac{1}{1-a} \in S$, 求解下列各问题:

(1) 若数列 $\{2 \cdot (-1)^n\}$ 中的项都在 S 中, 求 S 中所含元素个数最少的集合 S^* ;



(2) 在 S^* 中任取 3 个元素 a, b, c , 求使 $abc = -1$ 的概率;

(3) S 中所含元素个数一定是 $3n (n \in \mathbf{N}^*)$ 个吗? 若是, 请给出证明; 若不是, 试说明理由.

2. (07 浙江) 设 $f(x) = \frac{x^3}{3}$, 对任意实数 t , 记

$$g_t(x) = t^{\frac{2}{3}}x - \frac{2}{3}t.$$

(1) 求函数 $y = f(x) - g_t(x)$ 的单调区间;

(2) 求证: (i) 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq g_t(x)$ 对任意正实数 t 成立;

(ii) 有且仅有一个正实数 x_0 , 使得 $g_s(x) \geq g_t(x_0)$ 对任意正实数 t 成立.

3. (08 上海) 已知函数 $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^{|x|}}$.

(1) 若 $f(x) = 2$, 求 x 的值;

(2) 若 $2f(2t) + mf(t) \geq 0$ 对于 $t \in [1, 2]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

参考答案

基础知识演练

一、1. C 2. C 3. C 4. B 5. B 6. A 7. B 8. C 9. B 10. C

二、1. $\pm\sqrt{5}$ 2. P 3. 2009 4. $2x+3$

三、1. (1) 由 $2 - \frac{x+3}{x+1} \geq 0$, 得 $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$,

$\therefore x < -1$ 或 $x \geq 1$, 即

$$A = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty).$$

(2) 由 $(x-a-1)(2a-x) > 0$, 得

$$(x-a-1)(x-2a) < 0.$$

$$\because a < 1, \therefore a+1 > 2a.$$

$$\therefore B = (2a, a+1).$$

$$\because B \subseteq A, \therefore 2a \geq 1 \text{ 或 } a+1 \leq -1, \text{ 即}$$

$$a \geq \frac{1}{2} \text{ 或 } a \leq -2.$$

$$\text{而 } a < 1, \therefore \frac{1}{2} \leq a < 1 \text{ 或 } a \leq -2.$$

故当 $B \subseteq A$ 时, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup$

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right).$$

2. $\because x \in M, M = [a, b]$, 则 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, $N = \{y | y = f(x), x \in M\}$, $\therefore f(x)$ 的值域为 $N = M = [a, b]$.

又 $\because f(x) = -\frac{x}{1+|x|} = \frac{-(1+x)+1}{1+x} = -1 + \frac{1}{1+x}$ 是一减函数, $\therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是减函数.

$$\therefore N = [f(b), f(a)] = [a, b] = M,$$

$$\text{即 } \begin{cases} a = f(b) = \frac{-b}{1+|b|} \\ b = f(a) = \frac{-a}{1+|a|} \end{cases}$$

解之得 $a = b = 0$, 这与 $a < b$ 矛盾.

∴实数对 (a, b) 不存在.

3. (1) 设任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x_2) &= [f(x_1) - f(a - x_1)] - \\ &\quad [f(x_2) - f(a - x_2)] \\ &= [f(x_1) - f(x_2)] + [f(a - x_2) - \\ &\quad f(a - x_1)], \end{aligned}$$

∵ $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, ∴ $f(x_1) - f(x_2) < 0$.

又∵ $x_1 < x_2$, ∴ $a - x_2 < a - x_1$, 由 $f(x)$ 的增性, 得
 $f(a - x_2) - f(a - x_1) < 0$.

∴ $F(x_1) - F(x_2) < 0$, 即 $F(x_1) < F(x_2)$.

故 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

(2) 设 $A(x, y)$ 为函数 $y = F(x)$ 图象上任一点, 则 $A(x, y)$ 关于点 $(\frac{a}{2}, 0)$ 中心对称的点为 $A'(a - x, -y)$, 由题意知, 只要证: 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 均有 $F(x) = -F(a - x)$ 即可. 任取 $x \in \mathbf{R}$, 则 $F(a - x) = f(a - x) - f[a - (a - x)] = f(a - x) - f(x) = -[f(x) - f(a - x)] = -F(x)$.

故 $F(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a}{2}, 0)$ 成中心对称图形.

创新问题探究

一、1. C 2. D 3. B 4. A 5. D 6. A 7. B 8. D

二、1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2. -2

三、1. $a \geq -\frac{5}{2}$

2. (1) 令 $x = t - 1$, 则由 $f(x + 2) = -f(x)$ 得 $f(1 + t) = -f(t - 1)$.

又∵ $f(x)$ 是奇函数,

∴ $f(t - 1) = -f(1 - t)$.

∴ $f(1 + t) = f(1 - t)$, 即 $f(1 + x) = f(1 - x)$.

即函数 $y = f(x)$ 的图象的一条对称轴是 $x = 1$.

(2) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = x^3$.

当 $x \in [1, 3]$ 时, ∵ $f(x + 2) = -f(x)$,

∴ $f(x) = -f(x - 2)$.

而 $x \in [1, 3]$, ∴ $x - 2 \in [-1, 1]$,

∴ $f(x) = -f(x - 2) = -(x - 2)^3$.

若 $x \in [3, 5]$, 则 $f(x) = -f(x - 2) = -(-f(x - 4)) = f(x - 4)$.

∵ $x \in [3, 5]$, ∴ $x - 4 \in [-1, 1]$.

∴ $f(x) = f(x - 4) = (x - 4)^3$.

综上所述, $f(x)$ 在 $[1, 5]$ 之间的解析式为:

$$f(x) = \begin{cases} -(x - 2)^3, & x \in [1, 3] \\ (x - 4)^3, & x \in [3, 5] \end{cases}$$

(3) 使 $|f(x)| > a$ 的解集不为空集的实数 a 即为所求. 而若要 $|f(x)| > a$ 的解集为空集, 只需 a 不小于 $|f(x)|$ 的最大值即可.

∵ $f(x + 4) = f(x)$, ∴ $f(x)$ 是以4为周期的函数.

则当 $x \in [-1, 1]$ 时, $|f(x)|_{\max} = 1^3 = 1$.

当 $x \in [1, 3]$ 时, $|f(x)|_{\max} = 1^3 = 1$.

∴ $|f(x)|_{\max} = 1$.

∴只要 $a < 1$, 则 $|f(x)| > a$ 的解集不为空集.

3. $\frac{1}{2}$

4. (1) ∵ $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, 而 a_1 又是 B 中的元素, ∴ $a_1 \geq 0$, ∴ a_1 只能等于集合 B 中的 a_1^0 , 从而有 $a_1 = a_1^0$, ∴ $a_1 = 0$ 或 $a_1 = 1$. 若 $a_1 = 0$, 由 $a_1 + a_4 = 10$ 知 $a_4 = 10$ (舍去, 因为10不是任何整数的平方), ∴ $a_1 = 1, a_4 = 9$.

(2) 由(1)结论知: $A = \{1, a_2, a_3, 9\}$, $B = \{1, a_2^0, a_3^0, 81\}$, 且 $a_2^0 = 9$ 或 $a_3^0 = 9$.

当 $a_2^0 = 9$ 时, $a_2 = 3$ 或 $a_2 = -3$ (舍去, 因为 $a_2 > a_1 = 1$).

∴ $1 + 3 + a_3 + 9 + a_3^0 + 81 = 124$.

∴ $a_3^0 + a_3 - 30 = 0$, ∴ $a_3 = 5$ 或 $a_3 = -6$ (舍).

此时 $A = \{1, 3, 5, 9\}$, $B = \{1, 9, 25, 81\}$.

当 $a_3^0 = 9$ 时, $a_3 = 3$. 此时∵ a_2 是整数.

∴ $1 = a_1 < a_2 < a_3 = 3$, 从而 $a_2 = 2$.

∴ $A \cup B = \{1, 2, 3, 9, 4, 81\}$.

而 $1 + 2 + 3 + 9 + 4 + 81 = 100 \neq 124$.

∴综上所述, $A = \{1, 3, 5, 9\}$, $B = \{1, 9, 25, 81\}$.

经典试题回放

一、1. A 2. C 3. D 4. C 5. A 6. D 7. D 8. B 9. D 10. D 11. B 12. A

二、1. $\{2, 5\}$

2. 答案不唯一, 如“图形的全等”、“集合的相等”、“图形的相似”、“非零向量的共线”、“命题的充要条件”等等

3. 1

4. $\{x | x < 4 \text{ 且 } x \neq 3\}$

5. -1 6. BCD

三、1. (1) $a_n = 2 \cdot (-1)^n$, 所以 $a_1 = -2, a_2 = +2, a_3 = -2 \dots$ 即 S 中必含有元素2和-2.

$$\begin{aligned} 2 \in S &\Rightarrow \frac{1}{1-2} \in S \Rightarrow -1 \in S \Rightarrow \frac{1}{1-(-1)} \in S \Rightarrow \frac{1}{2} \in S \Rightarrow \\ \frac{1}{1-\frac{1}{2}} &\in S \Rightarrow 2 \in S. \end{aligned}$$

同理, 由 $-2 \in S$ 可得 $\frac{1}{3} \in S$ 和 $\frac{3}{2} \in S$. 所以 S 中至少含有元素 $-2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$.

即 S 中所含元素个数最少的集合为

$$S^* = \left\{ 2, -1, \frac{1}{2}, -2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2} \right\}.$$

(2) 在 S^* 中任取3个元素 a, b, c , 共有 $C_6^3 = 20$ 种不同的取法, 而其中能使 $abc = -1$ 的只有 $2, -1, \frac{1}{2}$ 和 $-2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ 两种取法, 所以使 $abc = -1$ 的概率为 $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

(3) 一定含 $3n(n \in \mathbf{N}^*)$ 个.

由 $a \in S$ 且 $1 \notin S \Rightarrow a \neq 1$, 所以由 $a \in S \Rightarrow \frac{1}{1-a} \in S \Rightarrow$



$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} \in S \Rightarrow 1 - \frac{1}{a} \in S \Rightarrow \frac{1}{1-(1-\frac{1}{a})} \in S, \text{ 即 } a \in S.$$

从而当 $a \in S$ 时, $\frac{1}{1-a} \in S, 1 - \frac{1}{a} \in S$.

下面证明 $a, \frac{1}{1-a}, 1 - \frac{1}{a}$ 互不相等.

若 $a = \frac{1}{1-a}$, 则 $a - a^2 = 1$, 即 $a^2 - a + 1 = 0$.

而 $a^2 - a + 1 = 0$ 无解, 所以 $a \neq \frac{1}{1-a}$.

同理, 可证得 $a \neq 1 - \frac{1}{a}, \frac{1}{1-a} \neq 1 - \frac{1}{a}$.

即 $a, \frac{1}{1-a}, 1 - \frac{1}{a}$ 互不相等. 所以 S 中所含元素个数一定是 $3n(n \in \mathbb{N}^+)$ 个.

$$2. (1) y = \frac{x^3}{3} - 4x + \frac{16}{3}.$$

由 $y' = x^2 - 4 = 0$, 得 $x = \pm 2$.

因为当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $y' > 0$, 当 $x \in (-2, 2)$ 时, $y' < 0$, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $y' > 0$.

故所求函数的单调递增区间是 $(-\infty, -2), (2, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-2, 2)$.

$$(2) (i) \text{ 令 } h(x) = f(x) - g_t(x) = \frac{x^3}{3} - t^{\frac{2}{3}}x + \frac{2}{3}t (x >$$

$0)$, 则 $h'(x) = x^2 - t^{\frac{2}{3}}$. 当 $t > 0$ 时, 由 $h'(x) = 0$, 得 $x = t^{\frac{1}{3}}$; 当 $x \in (0, t^{\frac{1}{3}})$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (t^{\frac{1}{3}}, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最小值是 $h(t^{\frac{1}{3}}) = 0$, 故当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq g_t(x)$ 对任意正实数 t 成立.

(ii) $\because f(2) = \frac{8}{3} = g_8(2)$, 由 (i) 得, $g_8(2) \geq g_t(2)$ 对任意正实数 t 成立.

即存在正实数 t 成立, 下面证明 x_0 的唯一性: 当 $x_0 \neq 2$,

$$x_0 > 0, t = 8 \text{ 时, } f(x_0) = \frac{x_0^3}{3}, g_8(x_0) = 4x_0 - \frac{16}{3}.$$

3. (1) 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 0$;

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x}$.

由条件可知 $2^x - \frac{1}{2^x} = 2$.

$$\text{即 } (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 1 = 0,$$

$$\therefore 2^x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

$$\because 2^x > 0,$$

$$\therefore 2^x = 1 + \sqrt{2}.$$

$$\therefore x = \log_2(1 + \sqrt{2}).$$

$$(2) \text{ 当 } t \in [1, 2] \text{ 时, } 2^t \left(2^{2t} - \frac{1}{2^{2t}} \right) + m \left(2^t - \frac{1}{2^t} \right) \geq 0,$$

$$\text{即 } m(2^{2t} - 1) \geq -(2^{4t} - 1).$$

$$\because 2^{2t} - 1 > 0, \therefore m \geq -(2^{2t} + 1).$$

$$\because t \in [1, 2], \therefore -(1 + 2^{2t}) \in [-17, -5].$$

$\therefore m$ 的取值范围是 $[-5, +\infty)$.