

21世纪

高等院校工科类数学教材

高等数学

(下册)

陈兆斗 褚宝增 主编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪

高等院校工科类数学教材

高等数学

(下册)

陈北斗 褚宝增 主编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·下册/陈兆斗,褚宝增主编. —北京:北京大学出版社, 2008. 8

(21世纪高等院校工科类数学教材)

ISBN 978-7-301-13536-5

I. 高… II. ①陈… ②褚… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 039296 号

书 名: 高等数学(下册)

著作责任者: 陈兆斗 褚宝增 主编

责任编辑: 曾琬婷

封面设计: 林胜利

标准书号: ISBN 978-7-301-13536-5/O·0748

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 电子邮箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021 出版部 62754962

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

787mm×960mm 16 开本 17 印张 361 千字

2008 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 1 次印刷

印 数: 0001—5000 册

定 价: 26.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010-62752024 电子邮箱:fd@pup.pku.edu.cn

内 容 简 介

本书是根据教育部《工科高等数学课程教学基本要求》编写的工科类本科高等数学教材,编者全部是具有丰富教学经验的教学一线教师.全书共十二章,分上、下两册出版.上册内容包括:极限,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程等;下册内容包括:空间解析几何与向量代数,多元函数微分法及其应用,重积分,曲面积分与曲线积分,无穷级数及傅里叶级数等.本书按节配置习题,每章有总练习题,书末附有答案与提示,便于读者参考.

本书根据工科学生的实际要求及相关课程的设置次序,对传统的教学内容在结构和内容上作了合理调整,使之更适应新世纪高等数学教学理念和教学内容的改革趋势.其主要特点是:选材取舍精当,行文简约严密,讲解重点突出,服务后续课程,衔接考研思路,注重基础训练和学生综合能力的培养.

本书可作为高等院校工科类各专业本科生高等数学课程的教材,也可作为相关专业的大学生、自学考试学生的教材或教学参考书.

目 录

第七章 空间解析几何与向量代数	(1)
§ 7.1 空间直角坐标系与向量	(1)
一、空间直角坐标系	(1)
二、向量及其运算	(3)
习题 7.1	(12)
§ 7.2 曲面及其方程	(13)
一、曲面方程的概念	(13)
二、旋转曲面	(13)
三、柱面	(15)
习题 7.2	(16)
§ 7.3 空间曲线及其方程	(17)
一、空间曲线的一般方程	(17)
二、空间曲线的参数方程	(17)
三、空间曲线在坐标平面上的投影	(18)
习题 7.3	(19)
§ 7.4 平面及其方程	(20)
一、平面的点法式方程	(20)
二、平面的一般方程	(21)
三、两平面的夹角	(22)
四、点到平面距离	(23)
习题 7.4	(24)
§ 7.5 空间直线及其方程	(25)
一、空间直线的一般方程	(25)
二、空间直线的对称式方程和参数方程	(25)
三、两空间直线的夹角	(28)
四、空间直线和平面的夹角	(28)
五、平面束	(29)
习题 7.5	(30)
§ 7.6 二次曲面	(31)

一、椭球面	(31)
二、双曲面	(32)
三、抛物面	(33)
四、二次锥面	(35)
习题 7.6	(35)
总练习题七	(36)
第八章 多元函数微分法及其应用	(38)
§ 8.1 多元函数的基本概念及性质	(38)
一、平面点集	(38)
二、 n 维空间	(41)
三、多元函数的概念	(41)
四、多元函数的极限	(42)
五、多元函数的连续性	(43)
习题 8.1	(45)
§ 8.2 偏导数	(46)
一、偏导数的概念	(46)
二、高阶偏导数	(49)
习题 8.2	(50)
§ 8.3 全微分	(51)
一、全微分的定义	(51)
二、全微分在近似计算中的应用	(54)
习题 8.3	(54)
§ 8.4 多元复合函数的求导法则	(55)
一、多元复合函数求导的链式法则	(55)
二、多元复合函数的高阶导数	(57)
三、一阶微分的形式不变性	(58)
习题 8.4	(59)
§ 8.5 隐函数的求导公式	(60)
一、一个方程的情形	(60)
二、方程组的情形	(62)
习题 8.5	(65)
§ 8.6 微分法在几何上的应用	(66)
一、空间曲线的切线与法平面	(66)
二、曲面的切平面与法线	(69)

习题 8.6	(71)
§ 8.7 方向导数与梯度	(72)
一、方向导数	(72)
二、梯度	(74)
习题 8.7	(76)
§ 8.8 多元函数的极值及其求法	(77)
一、多元函数的极值及最大值、最小值	(77)
二、条件极值	(81)
习题 8.8	(85)
§ 8.9 最小二乘法	(85)
习题 8.9	(87)
总练习题八	(88)
第九章 重积分	(90)
§ 9.1 二重积分的概念与性质	(90)
一、二重积分的概念	(90)
二、二重积分的性质	(92)
习题 9.1	(93)
§ 9.2 二重积分的计算	(94)
一、在直角坐标系下计算二重积分	(94)
二、在极坐标系下计算二重积分	(99)
* 三、二重积分的一般换元法	(102)
习题 9.2	(104)
§ 9.3 三重积分的概念与计算	(106)
一、三重积分的概念	(106)
二、三重积分的计算	(107)
习题 9.3	(115)
§ 9.4 重积分的应用	(116)
一、立体体积	(116)
二、空间曲面面积	(117)
三、质心	(118)
四、转动惯量	(120)
五、引力	(122)
习题 9.4	(123)
总练习题九	(124)

第十章 曲线积分与曲面积分	(127)
§ 10.1 对弧长的曲线积分	(127)
一、对弧长的曲线积分的概念与性质	(127)
二、对弧长的曲线积分的计算	(129)
习题 10.1	(132)
§ 10.2 对坐标的曲线积分	(132)
一、对坐标的曲线积分的概念与性质	(132)
二、对坐标的曲线积分的计算	(135)
三、两类曲线积分之间的联系	(138)
习题 10.2	(140)
§ 10.3 格林公式及其应用	(140)
一、格林公式	(140)
二、平面上对坐标的曲线积分与路径无关的条件	(145)
三、求解全微分方程	(151)
习题 10.3	(152)
§ 10.4 对面积的曲面积分	(153)
一、对面积的曲面积分的概念与性质	(153)
二、对面积的曲面积分的计算	(155)
习题 10.4	(156)
§ 10.5 对坐标的曲面积分	(157)
一、有向曲面及有向曲面面积元素的投影	(157)
二、对坐标的曲面积分的概念与性质	(158)
三、对坐标的曲面积分的计算	(161)
四、两类曲面积分的联系	(163)
习题 10.5	(165)
§ 10.6 高斯公式与斯托克斯公式	(166)
一、高斯公式	(166)
二、通量与散度	(168)
三、斯托克斯公式	(169)
四、环流量与旋度	(172)
习题 10.6	(172)
总练习题十	(174)
第十一章 无穷级数	(176)
§ 11.1 数项级数的概念和性质	(176)

一、数项级数的基本概念	(176)
二、级数的基本性质	(178)
习题 11.1	(183)
§ 11.2 数项级数收敛性的判定	(183)
一、正项级数及其审敛法	(184)
二、交错级数及其审敛法	(190)
三、绝对收敛和条件收敛	(191)
习题 11.2	(192)
§ 11.3 幂级数	(193)
一、函数项级数	(193)
二、幂级数	(194)
三、幂级数的性质	(199)
四、幂级数的加法、减法和乘法运算	(201)
习题 11.3	(202)
§ 11.4 函数的幂级数展开式	(203)
一、函数的幂级数展开式及其唯一性	(203)
二、泰勒级数及泰勒展开式	(204)
三、将函数展开成幂级数	(205)
习题 11.4	(210)
§ 11.5 幂级数的应用及欧拉公式	(211)
一、幂级数的和函数	(211)
二、利用幂级数作近似计算	(213)
三、欧拉公式的形式推导	(214)
习题 11.5	(215)
总练习题十一	(216)
第十二章 傅里叶级数	(218)
§ 12.1 周期函数的傅里叶级数	(218)
一、三角级数	(219)
二、三角函数系的正交性	(219)
三、周期函数的傅里叶级数及其收敛性	(220)
习题 12.1	(223)
§ 12.2 正弦级数与余弦级数	(223)
习题 12.2	(227)
§ 12.3 一般周期函数的傅里叶级数展开	(228)

习题 12.3	(230)
§ 12.4 傅里叶级数的复数形式	(231)
习题 12.4	(233)
§ 12.5 傅里叶变换	(233)
一、傅里叶变换的引入	(233)
二、 δ 函数与卷积	(237)
三、傅里叶变换的性质	(241)
习题 12.5	(243)
总练习题十二	(244)
附录 傅氏变换简表	(245)
习题答案与提示	(246)

空间解析几何与向量代数

解析几何是用代数的方法来研究几何图形. 将平面解析几何推广到空间解析几何, 使得我们可以用代数的方法来研究空间中的曲面、曲线的性质. 向量是人们对力学的研究中引入的数学概念, 它既有图形又有坐标, 与空间中的点可互相表示或转化. 因此, 向量也成为研究几何图形的重要工具.

§ 7.1 空间直角坐标系与向量

一、空间直角坐标系

在空间选定一点 O 作为原点, 过点 O 作三条相互垂直的数轴, 分别标为 x 轴、 y 轴和 z 轴, 统称为坐标轴. 按通常习惯, 规定坐标轴的方向满足右手法则: 以右手握住 z 轴, 当右手四指从 x 轴正向转动 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向(图 1).

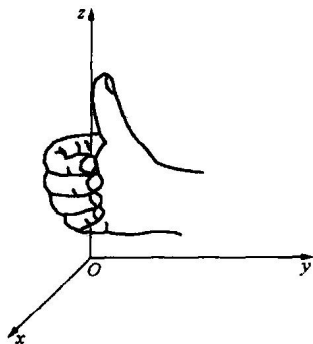


图 1

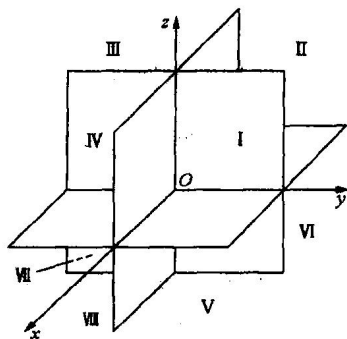


图 2

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 称为坐标平面. 由 x 轴和 y 轴所确定的平面称为 Oxy 平面, 类似有 Oyz 平面、 Ozx 平面. 这三个相互垂直的坐标平面把空间分成八个部分, 每一部分叫做一个卦限. 位于 x, y, z 轴的正半轴的卦限称为第一卦限, 从第一卦限开始, 在

Oxy 平面上方的卦限,按逆时针方向依次称为第二、三、四卦限;第一、二、三、四卦限下方的卦限依次称为第五、六、七、八卦限.这八个卦限分别用字母 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII 表示(图 2).

过空间任意一点 M 作三个平面分别垂直于 x, y, z 轴,并设依次交这三条坐标轴于 P, Q, R 三点.设 P, Q, R 在坐标轴上的坐标分别是 x, y 和 z ,那么空间一点 M 就唯一地确定了一个三元有序实数组 (x, y, z) .反之,任给一个三元有序实数组 (x, y, z) ,可依次在 x, y, z 轴上取坐标为 x, y, z 的点 P, Q, R ,过 P, Q, R 三点各作一个平面,使其分别垂直于 x, y, z 轴,这三个平面的交点就是有序三元实数组 (x, y, z) 所确定的唯一的一点(图 3).于是,空间中的点便与三元有序实数组建立了一一对应关系, (x, y, z) 被称为点 M 的坐标,其中 x, y, z 分别称为横坐标、纵坐标和竖坐标.这样确定的坐标系称为空间直角坐标系.

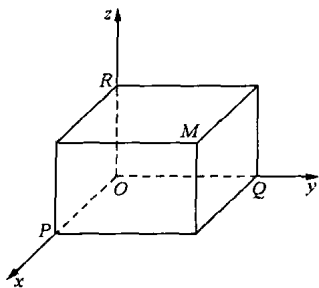


图 3

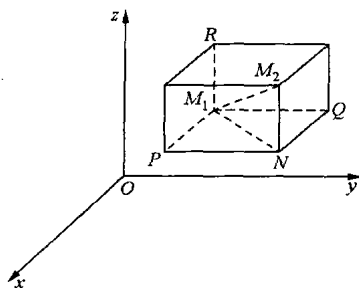


图 4

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点,过 M_1, M_2 分别作平行于坐标平面的平面,形成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 4).在直角三角形 M_1NM_2 及直角三角形 M_1PN 中,使用勾股定理知

$$|M_1M_2| = \sqrt{|M_1N|^2 + |NM_2|^2} = \sqrt{|M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2},$$

而

$$|M_1P| = |x_2 - x_1|, \quad |PN| = |y_2 - y_1|, \quad |NM_2| = |z_2 - z_1|,$$

由此可得空间任意两点的距离公式:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特别地,点 $M(x, y, z)$ 到原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1 在 y 轴上求一点 M , 使点 M 到 $A(1, 0, 2), B(3, 1, 1)$ 两点的距离相等.

解 可设点 M 的坐标为 $(0, y, 0)$. 根据题意,有 $|MA| = |MB|$, 即

$$\sqrt{(1-0)^2 + (0-y)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (1-y)^2 + (1-0)^2}.$$

两边去根号,解得 $y=3$. 故所求的点为 $M(0,3,0)$.

二、向量及其运算

向量(矢量)是既有大小又有方向的量,例如:位移、速度、加速度、力、力矩等. 可以用一条有向线段表示向量,其中线段的长度表示向量的大小,线段的方向表示向量的方向. 若有向线段的起点为 $A(x_0, y_0, z_0)$, 终点为 $B(x_0+x, y_0+y, z_0+z)$, 则向量就被唯一确定了,用符号 \mathbf{a} , \vec{a} 或 \overrightarrow{AB} 表示(图 5).

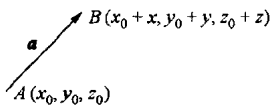


图 5



图 6

我们规定长度相等且方向相同的有向线段表示同一向量,并把这种向量称为**自由向量**. 例如:若向量 \overrightarrow{AB} 经过平移得到向量 \overrightarrow{CD} , 则 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (图 6). 显然,将向量平移后,向量的起点和终点的坐标虽然改变了,但两点的坐标之差不变. 一般地,向量可以用终点与起点坐标之差表示,从而将向量 \overrightarrow{AB} 的起点 A 移到原点,则可以用坐标 (x, y, z) 来表示向量 \mathbf{a} 或 \overrightarrow{AB} .

向量的大小也称为向量的**模**. 向量 $\mathbf{a} = (x, y, z)$ 的模记做 $|\mathbf{a}|$, $|\vec{a}|$, 即

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

它的方向由

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\mathbf{a}|}$$

确定,其中 α, β, γ 分别为向量 \mathbf{a} 与 x, y, z 轴正半轴的夹角. 称 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为向量 \mathbf{a} 的**方向余弦**. 显然有

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

模为零的向量称为**零向量**,记做 $\mathbf{0}$. 零向量的方向可以看做是任意的.

模为 1 的向量称为**单位向量**. 与 \mathbf{a} 同向的单位向量记做 \mathbf{a}^0 .

与向量 \mathbf{a} 长度相等且方向相反的向量称为 \mathbf{a} 的**反向量**,记做 $-\mathbf{a}$.

对于两个非零向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} , 如果它们的方向相同或者相反,就称这两个向量**平行**,也称两向量**共线**,记做 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$. 规定零向量与任何向量都平行.

下面我们讨论向量在数轴上的投影.

设有空间一点 M 及一数轴 u , 过点 M 作与数轴 u 垂直的平面, 平面与数轴 u 的交点 M' 称为点 M 在数轴 u 上的投影点(图 7).

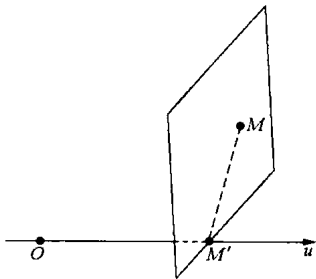


图 7

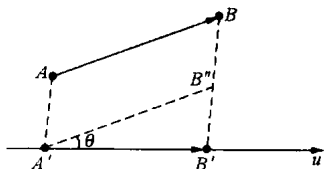


图 8

定义 1 设向量 \overrightarrow{AB} 的起点 A 和终点 B 在数轴 u 上的投影点分别为 A' 和 B' , 那么数轴 u 上的有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 称为向量 \overrightarrow{AB} 在数轴 u 上的投影向量(图 8). 分别记 A', B' 在数轴 u 上的坐标为 u_A, u_B , 称 $u_B - u_A$ 为向量 \overrightarrow{AB} 在数轴 u 上的投影, 记做 $\text{Prj}_u \overrightarrow{AB}$ 或 $(\overrightarrow{AB})_u$, 其中数轴 u 称为投影轴.

值得注意的是, 投影是数量而不是向量, 当 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向和数轴 u 的正向一致时, 投影为正; 当 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向和数轴 u 的正向相反时, 投影为负. 设 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A'B''}$, 记 $\angle B'A'B'' = \theta$, 如图 8 所示, 易得

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \theta.$$

按定义 1, 向量 \mathbf{a} 在空间直角坐标系中的坐标 x, y, z 就是 \mathbf{a} 在三条坐标轴上的投影, 即

$$x = \text{Prj}_x \mathbf{a}, \quad y = \text{Prj}_y \mathbf{a}, \quad z = \text{Prj}_z \mathbf{a}.$$

给定非零向量 \mathbf{b} , 作与 \mathbf{b} 同向的数轴 u . 称向量 \mathbf{a} 在数轴 u 上的投影为 \mathbf{a} 在向量 \mathbf{b} 上的投影, 记做 $\text{Prj}_b \mathbf{a}$.

(一) 向量的加减法

定义 2 设两向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 称向量 $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ 为 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的和, 记做 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, 即

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

当向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 不共线时, 作有向线段 \overrightarrow{OA} 和 \overrightarrow{OB} 分别表示向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} , 再以 OA, OB 为边作平行四边形 $OACB$, 则对角线 \overrightarrow{OC} 就表示 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. 这一确定向量之和的法则称为平行四边形法则(图 9). 物理学中力的合成、速度的合成都是利用这种加法. 也可以作有向线段 \overrightarrow{AB} 表示向量 \mathbf{a} , 作 \overrightarrow{BC} 表示 \mathbf{b} , 此时 \mathbf{a} 的终点与 \mathbf{b} 的起点相接, 则有向线段 \overrightarrow{AC} 就表示 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (图 10). 这一确定向量之和的法则称为三角形法则.

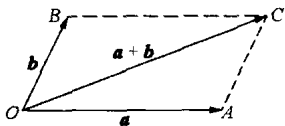


图 9

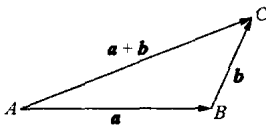


图 10

我们规定两向量 b 与 a 的差为

$$b - a = b + (-a),$$

即看做是向量 b 与 $-a$ 的和(图 11). 从图形上看, a 的终点到 b 的终点的向量就是 $b - a$.

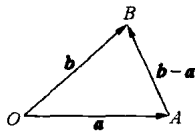
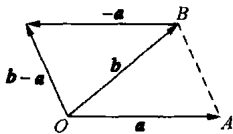


图 11

显然, 任给向量 \overrightarrow{AB} 及点 O , 有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

由此可得到三角形的两边之和大于等于第三边的向量表示形式:

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{及} \quad |a - b| \leq |a| + |b|.$$

(二) 向量与数的乘法

定义 3 设向量 $a = (x, y, z)$, λ 为任一实数, 向量 $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ 称为向量 a 与数 λ 的乘积, 简称数乘, 记做 λa , 即

$$\lambda a = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

显然, 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同向; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反向; 当 $\lambda = 0$ 时, λa 为零向量, 且均

有 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$ (图 12). 如果 $a \neq 0$, 可验证 $a^0 = \frac{1}{|a|} a$.

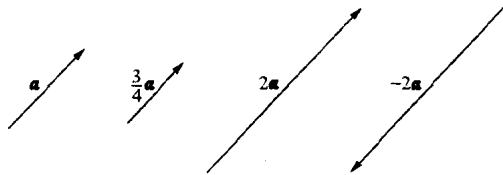


图 12

以上讨论的向量的加减运算和数乘运算统称为向量的线性运算. 对任意的向量 a, b, c 及实数 λ, μ , 向量的线性运算满足如下运算法则:

- (1) $a + b = b + a$; (交换律)
- (2) $a + (b + c) = (a + b) + c$; (结合律)
- (3) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a = \mu(\lambda a)$; (数乘结合律)

$$(4) \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b; \quad (\text{对于向量加法的分配律})$$

$$(5) (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a. \quad (\text{对于数量加法的分配律})$$

由于向量的加法符合交换律和结合律,所以 n 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 3)$ 相加可写成

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

按向量相加的三角形法则,可得 n 个向量相加的法则:以前一个向量的终点作为后一个向量的起点,依次作向量 a_1, a_2, \dots, a_n ,则以第一个向量的起点为起点,最后一个向量的终点为终点的向量即为所求的和向量.例如,图 13 所示的以点 A 为起点,点 B 为终点的向量 \overrightarrow{AB} 即为和向量 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

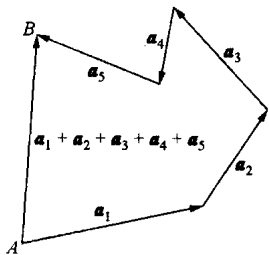


图 13

另外,由向量数乘的定义,可得到如下的性质:

性质 1 设向量 $a \neq 0$, 那么向量 b 与 a 平行的充分必要条件是: 存在唯一的实数 λ , 使得 $a = \lambda b$.

性质 2 取方向与三个坐标轴正向相同的单位向量 $i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)$ (称为基本单位向量), 则任意向量 $a = (x, y, z)$ 可分解为

$$a = xi + yj + zk.$$

例 2 已知 $a = (1, 2, 3), b = (2, -1, 0)$, 求 $2a - b$.

解 由向量的线性运算性质可得

$$2a - b = 2(1, 2, 3) - (2, -1, 0) = (0, 5, 6).$$

例 3 证明: 连接三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

证 如图 14 所示, M, N 分别是 AB, AC 的中点. 因为

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}, \end{aligned}$$

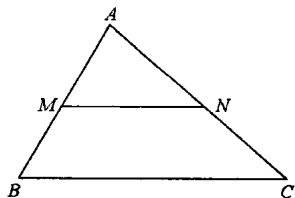


图 14

所以

$$\overrightarrow{MN} // \overrightarrow{BC}, \quad \text{且} \quad |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}|,$$

即命题得证.

例 4 已知两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$, 在直线 M_1M_2 上求点 M , 使 $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}$.

解 如图 15 所示, 由于

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1}, \quad \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM},$$

所以需要 M 点满足

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \lambda(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM}),$$

即

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OM_1} + \lambda \overrightarrow{OM_2}).$$

将点 M_1, M_2 的坐标代入, 即得

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right).$$

这就是点 M 的坐标. 与平面解析几何中类似, 这样的点 M 称为有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的 λ 分点. 特别地, 当 $\lambda=1$ 时, 得到线段 M_1M_2 的中点坐标为

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

(三) 向量的数量积

定义 4 两向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ 的数量积记做 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 或 ab , 规定为一个实数:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

显然由定义 4 有 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$.

对任意的向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 及实数 λ , 向量的数量积满足如下运算法则:

- (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$; (交换律)
- (2) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$; (分配律)
- (3) $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$. (结合律)

给定两非零向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} , 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 规定 OA 与 OB 所夹的不超过 π 的角 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 为向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的夹角, 记做 $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (图 16).

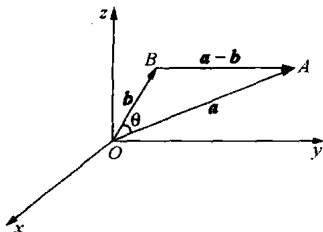


图 16



图 17