21世纪

高等院校工科类数学教材

高等数学

（下册）

陈兆斗　褚宝增　主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪

高等院校工科类数学教材

高 等 数 学

（下册）

陈兆斗　褚宝增　主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·下册/陈兆斗，褚宝增主编. 一北京：北京大学出版社，2008.8
(21 世纪高等院校工科类数学教材)
ISBN 978-7-301-13536-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①陈… ②褚… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 039296 号

书　　名：高等数学(下册)
著作责任者：陈兆斗　褚宝增　主编
责 任 编 辑：曾琬婷
封 面 设 计：林胜利
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-13536-5/O·0748
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　　**电子邮箱：**zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021　出版部 62754962
印 刷 者：北京大学印刷厂
经 销 者：新华书店
787mm×960mm　16 开本　17 印张　361 千字
2008 年 8 月第 1 版　　2008 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：0001—5000 册
定　　价：26.00 元

内 容 简 介

本书是根据教育部《工科高等数学课程教学基本要求》编写的工科类本科高等数学教材，编者全部是具有丰富教学经验的教学一线教师.全书共十二章，分上、下两册出版.上册内容包括：极限，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程等；下册内容包括：空间解析几何与向量代数，多元函数微分法及其应用，重积分，曲面积分与曲线积分，无穷级数及傅里叶级数等.本书按节配置习题，每章有总练习题，书末附有答案与提示，便于读者参考.

本书根据工科学生的实际要求及相关课程的设置次序，对传统的教学内容在结构和内容上作了合理调整，使之更适合新世纪高等数学教学理念和教学内容的改革趋势.其主要特点是：选材取舍精当，行文简约严密，讲解重点突出，服务后续课程，衔接考研思路，注重基础训练和学生综合能力的培养.

本书可作为高等院校工科类各专业本科生高等数学课程的教材，也可作为相关专业的大学生、自学考试学生的教材或教学参考书.

目　录

第七章 空间解析几何与向量代数

解析几何是用代数的方法来研究几何图形．将平面解析几何推广到空间解析几何，使得我们可以用代数的方法来研究空间中的曲面、曲线的性质．向量是人们在对力学的研究中引入的数学概念，它既有图形又有坐标，与空间中的点可互相表示或转化．因此，向量也成为研究几何图形的重要工具．

§7.1　空间直角坐标系与向量

一、空间直角坐标系

在空间选定一点 O 作为**原点**，过点 O 作三条相互垂直的数轴，分别标为 **x 轴**、**y 轴**和 **z 轴**，统称为**坐标轴**．按通常习惯，规定坐标轴的方向满足右手法则：以右手握住 z 轴，当右手四指从 x 轴正向转动 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向（图 1）．

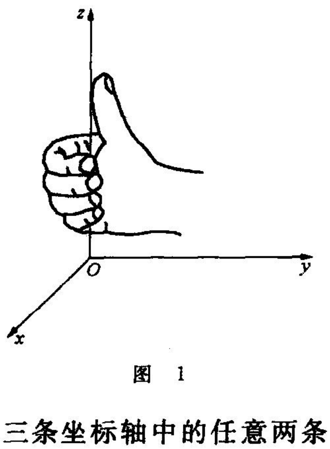

图　1

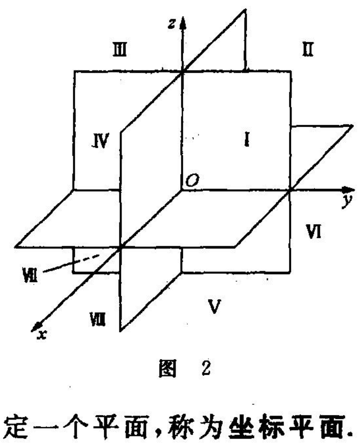

图　2

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，称为**坐标平面**．由 x 轴和 y 轴所确定的平面称为 Oxy **平面**，类似有 Oyz **平面**、Ozx **平面**．这三个相互垂直的坐标平面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个**卦限**．位于 x,y,z 轴的正半轴的卦限称为第一卦限，从第一卦限开始，在

Oxy 平面上方的卦限,按逆时针方向依次称为第二、三、四卦限;第一、二、三、四卦限下方的卦限依次称为第五、六、七、八卦限.这八个卦限分别用字母Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ表示(图 2).

过空间任意一点 M 作三个平面分别垂直于 x,y,z 轴,并设依次交这三条坐标轴于 P,Q,R 三点.设 P,Q,R 在坐标轴上的坐标分别是 x,y 和 z,那么空间一点 M 就唯一地确定了一个三元有序实数组(x,y,z).反之,任给一个三元有序实数组(x,y,z),可依次在 x,y,z 轴上取坐标为 x,y,z 的点 P,Q,R,过 P,Q,R 三点各作一个平面,使其分别垂直于 x,y,z 轴,这三个平面的交点就是有序三元实数组(x,y,z)所确定的唯一的一点(图 3).于是,空间中的点便与三元有序实数组建立了一一对应关系,(x,y,z)被称为点 M 的**坐标**,其中 x,y,z 分别称为横坐标、纵坐标和竖坐标.这样确定的坐标系称为**空间直角坐标系**.

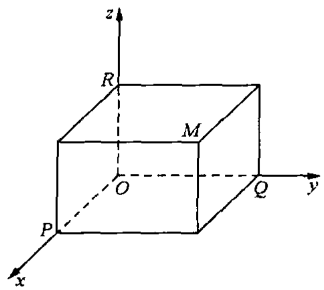

图 3

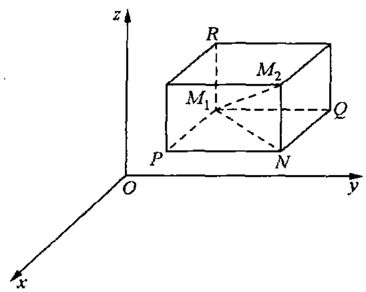

图 4

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点,过 M_1,M_2 分别作平行于坐标平面的平面,形成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 4).在直角三角形 M_1NM_2 及直角三角形 M_1PN 中,使用勾股定理知

$$|M_1M_2| = \sqrt{|M_1N|^2 + |NM_2|^2} = \sqrt{|M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2},$$

而

$$|M_1P| = |x_2 - x_1|, \quad |PN| = |y_2 - y_1|, \quad |NM_2| = |z_2 - z_1|,$$

由此可得空间任意两点的距离公式:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特别地,点 $M(x,y,z)$到原点 $O(0,0,0)$的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1 在 y 轴上求一点 M,使点 M 到 $A(1,0,2)$,$B(3,1,1)$两点的距离相等.

解 可设点 M 的坐标为$(0,y,0)$.根据题意,有 $|MA|=|MB|$,即

$$\sqrt{(1-0)^2+(0-y)^2+(2-0)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(1-y)^2+(1-0)^2}.$$

两边去根号,解得 $y=3$. 故所求的点为 $M(0,3,0)$.

二、向量及其运算

向量(**矢量**)是既有大小又有方向的量,例如:位移、速度、加速度、力、力矩等. 可以用一条有向线段表示向量,其中线段的长度表示向量的大小,线段的方向表示向量的方向. 若有向线段的起点为 $A(x_0,y_0,z_0)$,终点为 $B(x_0+x,y_0+y,z_0+z)$,则向量就被唯一确定了,用符号 $\boldsymbol{a}$,$\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$ 表示(图 5).

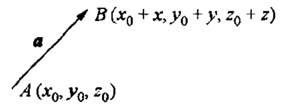

图 5

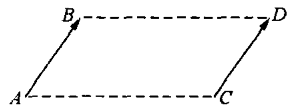

图 6

我们规定长度相等且方向相同的有向线段表示同一向量,并把这种向量称为**自由向量**. 例如:若向量 $\overrightarrow{AB}$ 经过平移得到向量 $\overrightarrow{CD}$,则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$(图 6). 显然,将向量平移后,向量的起点和终点的坐标虽然改变了,但两点的坐标之差不变. 一般地,向量可以用终点与起点坐标之差表示,从而将向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 移到原点,则可以用坐标 (x,y,z) 来表示向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$.

向量的大小也称为向量的**模**. 向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 的模记做 $|\boldsymbol{a}|$,$|\vec{a}|$,即

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

它的方向由

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}$$

确定,其中 α,β,γ 分别为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x,y,z 轴正半轴的夹角. 称 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 显然有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

模为零的向量称为**零向量**,记做 $\mathbf{0}$. 零向量的方向可以看做是任意的.

模为 1 的向量称为**单位向量**. 与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记做 $\boldsymbol{a}^0$.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等且方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**反向量**,记做 $-\boldsymbol{a}$.

对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,如果它们的方向相同或者相反,就称这两个向量**平行**,也称两向**量共线**,记做 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 规定零向量与任何向量都平行.

下面我们讨论向量在数轴上的投影.

设有空间一点 M 及一数轴 u，过点 M 作与数轴 u 垂直的平面，平面与数轴 u 的交点 M' 称为点 M 在数轴 u 上的**投影点**(图 7).

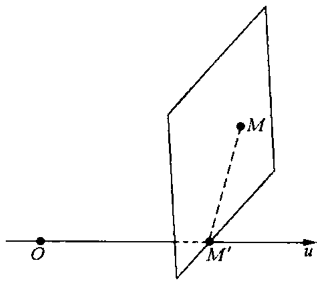

图 7

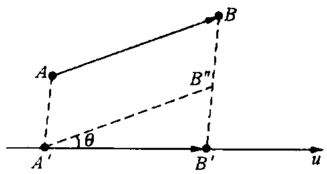

图 8

定义 1 设向量$\overrightarrow{AB}$的起点 A 和终点 B 在数轴 u 上的投影点分别为 A' 和 B'，那么数轴 u 上的有向线段$\overrightarrow{A'B'}$称为向量$\overrightarrow{AB}$在数轴 u 上的**投影向量**(图 8). 分别记 A', B' 在数轴 u 上的坐标为 u_A, u_B，称 u_B-u_A 为向量$\overrightarrow{AB}$在数轴 u 上的**投影**，记做 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$ 或 $(\overrightarrow{AB})_u$，其中数轴 u 称为**投影轴**.

值得注意的是，投影是数量而不是向量，当$\overrightarrow{A'B'}$的方向和数轴 u 的正向一致时，投影为正；当$\overrightarrow{A'B'}$的方向和数轴 u 的正向相反时，投影为负. 设$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A'B''}$，记$\angle B''A'B'=\theta$，如图 8 所示，易得

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$

按定义 1，向量 $\boldsymbol{a}$ 在空间直角坐标系中的坐标 x, y, z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影，即

$$x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},\quad y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},\quad z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}.$$

给定非零向量 $\boldsymbol{b}$，作与 $\boldsymbol{b}$ 同向的数轴 u. 称向量 $\boldsymbol{a}$ 在数轴 u 上的投影为 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，记做 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

(一) 向量的加减法

定义 2 设两向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，称向量$(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记做 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2).$$

当向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线时，作有向线段$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$分别表示向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$，再以 OA, OB 为边作平行四边形 $OACB$，则对角线$\overrightarrow{OC}$就表示 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这一确定向量之和的法则称为**平行四边形法则**(图 9). 物理学中力的合成、速度的合成都是利用这种加法. 也可以作有向线段$\overrightarrow{AB}$表示向量 $\boldsymbol{a}$，作$\overrightarrow{BC}$表示 $\boldsymbol{b}$，此时 $\boldsymbol{a}$ 的终点与 $\boldsymbol{b}$ 的起点相接，则有向线段$\overrightarrow{AC}$就表示 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 10). 这一确定向量之和的法则称为**三角形法则**.

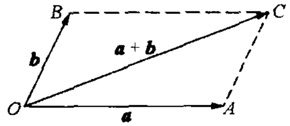

图 9

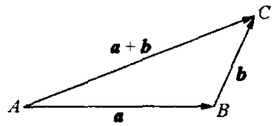

图 10

我们规定两向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}),$$

即看做是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $-\boldsymbol{a}$ 的和(图 11). 从图形上看,$\boldsymbol{a}$ 的终点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

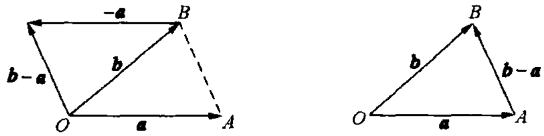

图 11

显然,任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O,有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$$

由此可得到三角形的两边之和大于等于第三边的向量表示形式:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad 及 \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

(二) 向量与数的乘法

定义 3 设向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$,λ 为任一实数,向量 $(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的乘积**,简称**数乘**,记做 $\lambda\boldsymbol{a}$,即

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z).$$

显然,当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,且均有 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$(图 12). 如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,可验证 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

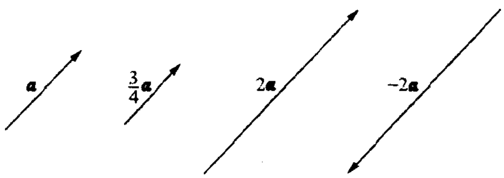

图 12

以上讨论的向量的加减运算和数乘运算统称为向量的**线性运算**. 对任意的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 及实数 λ,μ,向量的线性运算满足如下运算法则:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$; (交换律)

(2) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$; (结合律)

(3) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$; (数乘结合律)

(4) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；　　　(对于向量加法的分配律)

(5) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.　　　(对于数量加法的分配律)

由于向量的加法符合交换律和结合律，所以 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则：以前一个向量的终点作为后一个向量的起点，依次作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，则以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点的向量即为所求的和向量. 例如，图 13 所示的以点 A 为起点，点 B 为终点的向量 $\overrightarrow{AB}$ 即为和向量 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5$.

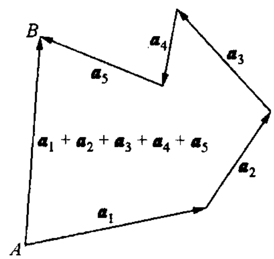

图　13

另外，由向量数乘的定义，可得到如下的性质：

性质 1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

性质 2　取方向与三个坐标轴正向相同的单位向量 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$（称为**基本单位向量**），则任意向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 可分解为

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

例 2　已知 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1,0)$，求 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

解　由向量的线性运算性质可得

$$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2(1,2,3)-(2,-1,0)=(0,5,6).$$

例 3　证明：连接三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

证　如图 14 所示，M,N 分别是 AB,AC 的中点. 因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\end{aligned}$$

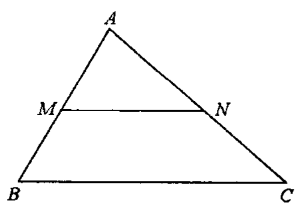

图　14

所以

$$\overrightarrow{MN}//\overrightarrow{BC},\quad 且\quad |\overrightarrow{MN}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|,$$

即命题得证.

例 4 已知两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 M_1M_2 上求点 M，使 $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$.

解 如图 15 所示，由于

$$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1},\quad \overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM},$$

所以需要 M 点满足

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=\lambda(\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}),$$

即

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OM_1}+\lambda\overrightarrow{OM_2}).$$

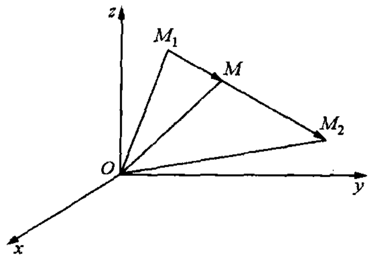

图 15

将点 M_1，M_2 的坐标代入，即得

$$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right).$$

这就是点 M 的坐标. 与平面解析几何中类似，这样的点 M 称为有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的 **λ 分点**. 特别地，当 $\lambda=1$ 时，得到线段 M_1M_2 的中点坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

(三) 向量的数量积

定义 4 两向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ 的**数量积**记做 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{ab}$，规定为一个实数：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

显然由定义 4 有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

对任意的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 及实数 λ，向量的数量积满足如下运算法则：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$； (交换律)

(2) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$； (分配律)

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$. (结合律)

给定两非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，规定 OA 与 OB 所夹的不超过 π 的角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**，记做 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ (图 16).

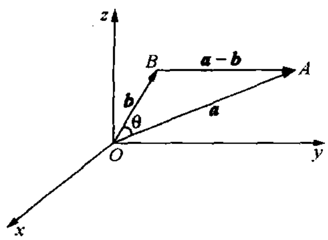

图 16

图 17