SHUXUE XUEXI ZHIYAO

普通高等学校少数民族预科教育辅导丛书

数学学习指要

杨兆云 主编

云南民族出版社

SHUXUE XUEXI ZHIYAO

普通高等学校少数民族预科教育辅导丛书

数学学习指要

杨兆云 主 编
余 游 郭晓东 孟 伟 副主编

云南民族出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学学习指要／杨兆云主编，余游，郭晓永，孟伟副主编．—昆明：云南民族出版社，2008.8

（普通高等学校少数民族预科教育辅导丛书）

ISBN 978-7-5367-4009-9

Ⅰ．数…　Ⅱ．杨…　Ⅲ．数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．01

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 122882 号

责任编辑	普　艺
责任校对	岳明芬
装帧设计	何志明
出版发行	云南民族出版社
	（昆明市环城西路170号云南民族大厦5楼　邮编：650032）
	http://www.ynbook.com
邮　　箱	ynbook@vip.163.com
印　　制	云南民族印刷厂
开　　本	889 mm × 1194 mm　1/32
总 印 张	43.5
总 字 数	1 320 千
版　　次	2008 年 8 月第 1 版
印　　次	2008 年 8 月第 1 次
印　　数	0001 ~ 2 000 册
总 定 价	120.00 元（共 4 册）
书　　号	ISBN 978-7-5367-4009-9/D·377

前　言

民族预科教育是我国高等教育的重要组成部分，是普通高等教育的特殊层次之一。少数民族地区科技文化水平相对落后，发展经济需要科学技术的进步，而科学技术的进步则需要更多的专业技术人才。我们应该看到：一方面，边疆民族地区经济文化相对落后，少数民族受教育的权利还没有完全得到保证；另一方面，接受良好的教育特别是高等教育已经日益成为边疆民族地区各民族学子最根本的利益需求。因此，在发展民族教育中，加强民族预科教育，培养民族地区特别是高寒山区出得来、回得去的少数民族高层次人才，已经成为一项十分重要的任务。加强民族预科教育，最大限度地满足基础教育相对落后的边疆民族地区各民族学子日益增长的接受高等教育的要求，为边疆民族地区提供平等的教育机会，使各少数民族特别是边疆高寒山区民族接受高等教育的权利得到切实地维护和保障。民族预科教育是贯彻党和国家民族政策和实现教育公平的重要体现。

少数民族预科学生在大学预科阶段的学习中，主要是弥补基础教育的不足，强化基础知识的学习，为升入本专科后的专业学习打下扎实的基础。预科数学的教学目的是在学生原有知识基础上，通过“补”“预”结合，集中力量进行强化训练，进一步巩固和扩展基础知识，提高学生的理解能力、解题能力和逻辑思维能力；提高学生的文化素养，使其养成自学和自觉应用数学知识的良好习惯，为本专科阶段各种专业学习夯实基础。

本书根据教育部普通高等学校少数民族预科教材编写委员会编写的普通高等学校少数民族预科教材(试用)《初等数学》、《高等数学》和教学大纲,结合云南省普通高等学校少数民族预科一年制教学的实际,突出重点、难点,注重基础,强化练习、复习,使学生牢固掌握基本理论、基本知识、基本技能,训练学生逻辑思维能力和解题能力。希望本书对学生平时练习和复习会有较大的帮助。

2008 年 4 月

目　录

初等数学

第一章　预备知识

主要知识点

一、集合的基本概念

集合:把一些确定的对象看成一个整体就形成一个集合,一般用大写字母 A、B、C…… 表示集合.

元素:集合里的每个对象叫做集合的元素,一般用小写字母 a、b、c…… 表示集合的元素.

$a \in A$:表示 a 是集合 A 的元素,读作“a 属于 A”.

$a \notin A$:表示 a 不是集合 A 的元素,读作“a 不属于 A”.

二、集合的表示法

1. 列举法:把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法,如$\{a,b,c,d\}$.

2. 描述法:把集合中的元素的共同属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法,如$\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$,{直角三角形}.

3. 图示法:用圆圈或方框表示集合.

三、集合与集合的关系

1. 子集

如果集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,则称集合 B 是集合 A 的子集,记作 $B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$;如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A = B$.

2. 交集

由集合 A 与集合 B 的所有公共元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$，显然 $A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$.

3. 并集

把集合 A 与集合 B 所有元素并在一起所组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$，显然 $A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$.

4. 补集

全集：在研究集合与集合之间的关系时，如果这些集合都是某一给定集合的子集，则这个给定的集合叫做全集，用符号 U 表示.

补集：已知全集 U，集合 $A \subseteq U$，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 U 中的补集，记作 $C_U A$，显然 $C_U A = \{x \in U \mid x \notin A\}$.

四、实数集与复数集

有理数与无理数统称为实数，实数和虚数称为复数，复数 $z = a + bi$ 可按下面分类：

$$\text{复数 } a+bi(a,b\in R)\begin{cases}\begin{array}{l}\text{实数}\\(b=0)\end{array}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正有理数}\\\text{零}\\\text{负有理数}\end{array}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\ \text{无理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}\\ \begin{array}{l}\text{虚数}\\(b\neq 0)\end{array}\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\\text{非纯虚数}(a\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

五、恒等变形与待定系数法

恒等变形：将一个代数式变换成另一个和它恒等的代数式，叫做恒等变形.

待定系数法：主要思想是从一个含有待定系数的恒等式出发，根据恒等式的性质列出几个方程，从而求出各个待定系数的值.

六、四种命题以及它们之间的关系，反证法的基本思想

七、数学归纳法

用数学归纳法证明与自然数 n 有关的数学命题的步骤是:

1. 证明当 n 取第一个值 n_0 时结论成立;(递推的基础)

2. 假设当 $n = k(k \in N^+, k \geqslant n_0)$ 时,命题成立(递推的根据),证明当 $n = k + 1$ 时命题也成立.

八、二项式定理及二项展开式的性质

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n (n \in N^+)$.

例题

1. 已知全集 $\cup = R, A = \{y \mid y = x^2 + 2x + 2\}, B = \{x \mid x^2 + 2x - 8 \geqslant 0\}$,

求(1)$A \cap B$;(2)$A \cup C_\cup B$;(3)$C_\cup A \cap C_\cup B$.

分析:先求出集合 A, B.

解:$A = \{y \mid y = x^2 + 2x + 2\} = \{y \mid y = (x+1)^2 + 1 \geqslant 1\}$
$= \{y \mid y \geqslant 1\}$

$B = \{x \mid x^2 + 2x - 8 \geqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant -4$ 或 $x \geqslant 2\}$

(1)$A \cap B = \{x \mid x \geqslant 2\}$;

(2)$A \cup C_\cup B = \{x \mid x \geqslant 1\} \cup \{x \mid -4 < x < 2\} = \{x \mid x > -4\}$;

(3)$C_\cup A \cap C_\cup B = \{x \mid x < 1\} \cap \{x \mid -4 < x < 2\} = \{x \mid -4 < x < 1\}$,

或 $C_\cup A \cap C_\cup B = C_\cup (A \cup B) = \{x \mid -4 < x < 1\}$.

2. 已知 $A = \{x \mid |2x - 1| \geqslant 1\}, B = \{x \mid x^2 - (2a+1)x + a(a+1) < 0\}$,若 $B \subseteq A$,求实数 a 的取值范围.

分析:需熟练掌握含绝对值不等式及一元二次不等式的解法.

解:$A = \{x \mid |2x - 1| \geqslant 1\} = \{x \mid x \leqslant 0$ 或 $x \geqslant 1\}$

$B = \{x \mid x^2 - (2a+1)x + a(a+1) < 0\}$
$= \{x \mid a < x < a + 1\}$

由 $B \subseteq A$,得 $a+1 \leqslant 0$ 或 $a \geqslant 1$,即 $a \leqslant -1$ 或 $a \geqslant 1$.

3. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$,$B = \{x \mid x^2 - ax + 3a - 5 = 0\}$,若 $A \cap B = B$,求实数 a 的值.

分析:由 $A \cap B = B$ 得 $B \subseteq A$,需讨论 B 的各种情况.

解:$A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1,2\}$

由 $x^2 - ax + 3a - 5 = 0$ 知,$\triangle = a^2 - 4(3a-5) = (a-2)(a-10)$

① 当 $2 < a < 10$ 时,$\triangle < 0$,则 $B = \phi \subseteq A$;

② 当 $a \leqslant 2$ 或 $a \geqslant 10$ 时,$\triangle \geqslant 0$,$B \neq \phi$.

若 $x = 1$,由 $1 - a + 3a - 5 = 0$,即 $a = 2$,此时 $B = \{1\} \subseteq A$;

若 $x = 2$,由 $4 - 2a + 3a - 5 = 0$,即 $a = 1$,此时 $B = \{-1,2\} \not\subseteq A$.

综上,当 $2 \leqslant a < 10$ 时,均有 $A \cap B = B$.

4. 证明:$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2$

分析:证明恒等式需将一边作恒等变形.

证明:$\because$ 左边 $= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - (a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2)$

$= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd$

右边 $= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd$

$\therefore (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2$.

5. 将 $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ 因式分解.

分析:这是一个三次齐次对称多项式,且 $x = -y$ 时,原式为零,同理 $x = -z$ 或 $y = -z$ 时,原式为零,则原式 $= a(x+y)(y+z)(z+x)$.

解:方法(1) 设原式 $= a(x+y)(y+z)(z+x)$

令 $x = 1, y = 1, z = 1$ 得 $a = 3$

因此:$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x)$

方法(2) 原式 $= [(x+y+z)^3 - x^3] - (y^3 + z^3)$

$= (y+z)[(x+y+z)^2 + x(x+y+z) + x^2] - (y+z)(y^2 - yz + z^2)$

$= (y+z)[(x+y+z)^2 + x(x+y+z) + x^2 - (y^2 - yz + z^2)]$

$= (y+z)(3x^2 + 3xy + 3xz + 3yz)$

$$= 3(x+y)(y+z)(z+x).$$

6. 已知$(a-2)x^2+bx+c=x^2-5$,求a,b,c.

分析:利用同次多项式相等的条件:同次项的系数都相等.

解:方法(1) 比较两多项式各项的系数得:

$$\begin{cases} a-2=1 \\ b=0 \\ c=-5 \end{cases}$$

因此,$a=3,b=0,c=-5$.

方法(2) 由于两多项式相等,对x的任意数值等式都成立.

令$x=-1$,则有 $a-2-b+c=-4$ ①

令$x=0$,则有 $c=-5$ ②

令$x=1$,则有 $a-2+b+c=-4$ ③

由①,②,③可得$a=3,b=0,c=-5$.

7. 将$2x^2+3x-6$表示为$(x-1)$的多项式.

分析:同例6的解法:比较系数或赋值.

解:方法(1) 设$2x^2+3x-6=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

将右边展开,得

$$2x^2+3x-6=ax^2+(b-2a)x+(a-b+c)$$

比较恒等式两端x的同次项系数,得

$$\begin{cases} a=2 \\ b-2a=3 \\ a-b+c=-6 \end{cases}$$

解得:$a=2,b=7,c=-1$.

因此,$2x^2+3x-6=2(x-1)^2+7(x-1)-1$.

方法(2) 设$2x^2+3x-6=a(x-1)^2+b(x-1)+c$,再分别令$x=-1,0,1$.

8. 求$\left(2\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$的展开式中的常数项.

分析:利用通项$T_{r+1}=C_n^r a^{n-r}b^r$求解.

解:由 $T_{r+1}=C_{10}^{r}(2\sqrt{x})^{10-r}\cdot(\frac{1}{3\sqrt{x}})^{r}$

$=C_{10}^{r}\cdot 2^{10-r}\cdot x^{5-\frac{r}{2}}\cdot x^{-\frac{x}{3}}$

$=C_{10}^{r}\cdot 2^{10-r}\cdot x^{5-\frac{5}{6}r}$

令 $5-\frac{5}{6}r=0$,得 $r=6$.

故常数项为 $T_7=2^{10-6}C_{10}^{6}=2^4C_{10}^{6}=3360$.

9. 已知$(\frac{1}{2}-2x)^n$的展开式的第5项、第6项与第7项的二项式系数成等差数列,求展开式中二项式系数最大的项.

分析:需区分二项式系数与项的系数.

解:由题意得 $2C_n^5=C_n^4+C_n^6$,即 $n^2-21n+98=0$

解得 $n=7$ 或 $n=14$.

当 $n=14$ 时,二项式系数最大的项为第8项 $T_8=C_{14}^{7}\cdot(\frac{1}{2})^7\cdot(-2x)^7=-3432x^7$;

当 $n=7$ 时,二项式系数最大的项为第4项或第5项,

$T_4=C_7^3\cdot(-2x)^3\cdot(\frac{1}{2})^4=-\frac{35}{2}x^3$,

$T_5=C_7^4(-2x)^4\cdot(\frac{1}{2})^3=70x^4$.

练习题

一、选择题

1. 下列命题中,正确的是(　　).

A. $Z\subsetneqq\{x\mid x\leqslant 2\}$　　　B. $\{x\mid x>1$ 且 $x<0\}\subseteq\phi$

C. $\{x\mid x=4k\pm1,k\in Z\}\neq\{x\mid x=2k+1,k\in Z\}$

D. $\{x\mid x=3k\pm1,k\in Z\}=\{x\mid x=3k-1,k\in Z\}$