文科·经济类

21世纪高等学校数学系列教材

高等数学同步习题解答

■ 刘金舜　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

WJB 文科 · 经济类

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

高等数学同步习题解答

■ 刘金舜　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步习题解答/刘金舜编著.—武汉:武汉大学出版社,2009.1
21世纪高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-06691-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.高等数学—高等学校—解题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第180741号

责任编辑:李汉保　　责任校对:王　建　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)
印刷:通山金地印务有限公司
开本:787×1092　1/16　印张:21　字数:508千字　插页:1
版次:2009年1月第1版　2009年1月第1次印刷
ISBN 978-7-307-06691-5/O·398　定价:35.00元

21 世纪高等学校数学系列教材

编 委 会

内容简介

本书内容涉及一元函数的极限、连续、导数、不定积分、定积分、广义积分、导数在经济学中的应用、定积分的应用、空间解析几何、二元(多元)函数的微积分学、无穷级数、常微分方程及差分方程等.

本书适合作高等学校文科与经济类专业本科生数学课程的教辅教材,也可以供相关教师参阅.

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学.长期以来,人们在认识世界和改造世界的过程中,数学作为一种精确的语言和一个有力的工具,在人类文明的进步和发展中,甚至在文化的层面上,一直发挥着重要的作用.作为各门科学的重要基础,作为人类文明的重要支柱,数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用.数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的.发展数学科学,是推进我国科学研究和技术发展,保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要.高等学校作为人才培养的摇篮和基地,对大学生的数学教育,是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面,而教材建设是课程建设的重要内容,是教学思想与教学内容的重要载体,因此显得尤为重要.

为了提高高等学校数学课程教材建设水平,由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议、策划,组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会,在一定范围内,联合多所高校合作编写数学课程系列教材,为高等学校从事数学教学和科研的教师,特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台.通过该平台,联合编写教材,交流教学经验,确保教材的编写质量,同时提高教材的编写与出版速度,有利于教材的不断更新,极力打造精品教材.

本着上述指导思想,我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材.旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平.

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有:武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学(福建泉州)、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校.

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广,为了便于区分,我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别,如:数学类本科生教材,注明:SB;理工类本科生教材,注明:LGB;文科与经济类教材,注明:WJ;理工类硕士生教材,注明:LGS,如此等等,以便于读者区分.

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出

版社之一，在国内有较高的知名度和社会影响力. 武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务. 我们愿与各位朋友真诚合作，力争使该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21 世纪高等学校数学系列教材编委会

2007 年 7 月

前　言

文科、经济类《高等数学》(上、下册）是作者为高等学校文科与经济类本科生撰写的一套数学课程教材，这套教材于2004年在武汉大学出版社正式出版，在广泛征求广大授课教师意见的基础上于2007年修订出版了第二版．为配合教学，方便教师教、学生学，努力提高教学质量，针对这套教材，我们编撰出版了这本《高等数学同步习题解答》（以下简称《习题解答》)．这套教材共十四章．每一章除配备了大量的基本练习题外，还配有一套近年来题型较为流行的综合练习题．此外，针对全书，还编写了两套略有难度的总复习题．应该说，对于文科及经济类专业的学生，能将全书的练习题及综合练习题熟练地做一遍，对于高等数学（四)、高等数学（三）乃至于高等数学（二）的内容也就基本掌握了．

这套教材的练习题的难度大致分为三个层次：大量的是基本练习题，适量的难度适中的练习题，少量的难度较大的练习题．相信这些练习题能够高度地浓缩出教材所讲授的基本内容．

编写这套教材的《习题解答》，目的非常明确：即给同学们在学习高等数学过程中提供学习辅导及参考．需要说明的是，练习中的每道题，一般都是用一种方法求解的．对于那些一题能有多种解法的，则请同学们在学习过程中自己加以补充．《习题解答》只能起辅助的作用．正确地使用《习题解答》是至关重要的．若将《习题解答》当做完成作业时照抄的工具，那就非作者本意了．

编写《习题解答》，工作量是繁重的，过程是枯燥的．若《习题解答》能对同学们的学习起到积极的作用，那么作者的辛苦也就值了．

限于水平，错误在所难免．恳请同行及同学们指正．

作　者

2008年9月

目　录

习 题 1

1. 用集合符号写出下列集合

(1) 大于 30 的所有实数的集合；

(2) 圆 $x^2+y^2=25$ 上所有的点组成的集合；

(3) 椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 外部一切点的集合.

解：(1) $D=\{x \mid x>30, x\in \mathbf{R}\}$，

(2) $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2=25\}$，

(3) $D=\left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}>1\right\}$.

2. 指出下列集合哪个是空集

$A=\{x \mid x+5=5\}$，$B=\{x \mid x\in \mathbf{R}$ 且 $x^2+5=0\}$，$C=\{x \mid x<5$，且 $x>f^5\}$.

解：集合 B 和集合 C 为空集.

3. 证明：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

证：如果 $x\in A\cup(B\cap C)$，则 $x\in A$ 或 $x\in(B\cap C)$.

于是 $x\in A$ 或 $x\in B$ 且 $x\in C$，所以 $x\in(A\cup B)$ 且 $x\in(A\cup C)$.

故 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

同理，若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则 $x\in(A\cup B)$ 且 $x\in(A\cup C)$.

于是有 $x\in A$ 或 $x\in B$ 且 $x\in A$ 或 $x\in C$，所以 $x\in A\cup(B\cap C)$，

所以 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

4. 证明：(1) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},n\right)=(0,+\infty)$；(2) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)=\varnothing$.

证：(1) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},n\right)=(1,1)+\left(\frac{1}{2},2\right)+\left(\frac{1}{3},3\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n},n\right)+\cdots$

$=(0,+\infty)$.

(2) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)=(0,1)\cap\left(0,\frac{1}{2}\right)\cap\left(0,\frac{1}{3}\right)\cap\cdots\cap\left(0,\frac{1}{n}\right)\cap\cdots=\varnothing$.

（注：从极限的观点看，虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，然而不论 n 取多大，$\frac{1}{n}$ 永远不可能取到 0）.

5. 下面的对应关系是否为映射？

$$X=\{\text{平面上全体三角形}\},Y=\{\text{平面上全体点}\}$$

X,Y之间的对应是:每个三角形与其重心对应.

解:构成对应关系.

设a为X中任一元素,因a对应着唯一的一个重心b,这个重心b为集合Y的一个元素,亦即集合Z中任一元素,对应着集合Y中的唯一的一个元素.

6. 设X是所有同心圆的集合,Y为实数集合,若把同心圆与其直径建立对应关系,试验证这种对应关系构成从X到Y的映射.

证:设A,B是集合Z中两个直径为$R\in Y$的圆。由于同心的原因,故$A=B$. 于是集合Z中的任一圆,一定有唯一的一个直径$R\in Y$与之对应. 故从上述对应关系构成从X到Y的映射.

7. 下列各组函数是否相同:

(1)$f(x)=\lg x^2,g(x)=2\lg x$;

(2)$f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}},g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$;

(3)$f(x)=x,g(x)=x(\sin^2x+\cos^2x)$;

(4)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3},g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

答:(1)不相同. $D(f)=\{x\mid x\neq0\}$,而$D(g)=\{x\mid x>0\}$.

(2)不相同. $D(f)=\{x\mid x>2\}$,

$D(g)=\{x\mid x>2$ 或 $x<2\}$.

(3) $\forall x\in\mathbf{R},\ f(x)=g(x)$.

(4) $\forall x\in\mathbf{R},\ f(x)=g(x)$.

8. 求下列函数的定义域

(1)$y=\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{1-|x-1|}$;　(2)$y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$.

解:(1)$\begin{cases}4x-x^2\geqslant0\\ |x-1|\neq1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(4-x)\geqslant0\\ |x-1|\neq1\end{cases}$

于是有$\begin{cases}x\geqslant0\\ 4-x\geqslant0\\ |x-1|\neq1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant0\\ 4-x\leqslant0\\ |x-1|\neq1\end{cases}$

解之得$0<x<2$　或$2<x\leqslant4$.　故　$D(y)=\{x\mid 0<x<2\cup2<x\leqslant4\}$.

(2)$\begin{cases}16-x^2\geqslant0\\ \sin x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant4\\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi\end{cases}$.

显然,$k=0$,于是有

$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant4\\ 0<x<\pi\end{cases}$,　故$0<x<\pi$,　即　$D(y)=\{x\mid 0<x<\pi\}$.

9. 设函数 $y=f(3x-2)$ 的定义域为 $[1,4]$，试求函数 $y=f(3x+1)$ 的定义域.

解：依题意有 $1\leqslant 3x-2\leqslant 4$，　则 $3\leqslant 3x\leqslant 6, 4\leqslant 3x+1\leqslant 7$.

故 $y=f(3x+1)$ 的定义域为 $[4,7]$.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\ln x$，试求 $f[g(x)]$.

解：$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x\in(e^{-1},e)\\ 0, & x=e^{-1} \text{ 或 } x=e\\ -1, & x\in(0,e^{-1})\cup(e,+\infty).\end{cases}$

11. 判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$；　(2) $f(x)=x\cdot\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$；

(3) $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & 0<x<+\infty\\ x^2-1, & -\infty<x<0\end{cases}$；　(4) $f(x)=(x+1)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

解：(1) $f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=-\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=-f(x)$.

故 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 为奇函数.

(2) $f(-x)=(-x)\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=-x\dfrac{1-2^x}{1+2^x}=x\cdot\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=f(x)$，

故 $f(x)=x\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 为偶函数.

(3) $f(-x)=\begin{cases}-x^2+1, & -\infty<x<0\\ x^2-1, & 0<x<+\infty\end{cases}=-\begin{cases}x^2-1, & 0<x<+\infty\\ -x^2+1, & -\infty<x<0\end{cases}$

$=-\begin{cases}-x^2+1, & -\infty<x<0\\ x^2-1, & 0<x<+\infty\end{cases}=-f(x)$.

故 $f(x)$ 为奇函数.

(4) $f(-x)=(-x+1)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\sqrt{(1-x)(1+x)}=(1+x)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=f(x)$

故 $f(x)$ 为偶函数.

12. 证明：函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-\infty,-1)$ 与 $(-1,+\infty)$ 上分别是单调递增的，并由此推出不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

证：(1) $\forall x_1,x_2\in(-\infty,-1)$，$x_1<x_2$. 故 $1+x_1<0$，$1+x_2<0$，$(1+x_1)(1+x_2)>0$. 于是

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1+x_2}-\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1+x_1)(1+x_2)}>0$$

(2) $\forall x_1,x_2\in(1,\infty)$,同理可证:当 $x_2>x_1$ 时有 $f(x_2)-f(x_1)>0$.

(3) $\forall a,b\in\mathbf{R}$,不妨设 $|a|>|b|$. 由 $y=\frac{x}{1+x}$ 的单调递增性,有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|}$$

$$=\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|a|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

13. 判断下列函数的周期性,并求其周期

(1) $y=\sin^2 x$; (2) $y=\sin\frac{x}{2}$; (3) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$.

解:(1) $y=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, 是周期为 π 的周期函数.

(2) $y=\sin\frac{x}{2}$ 是周期为 4π 的周期函数.

(3) 因 $y(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+\frac{1}{2}\sin(2x+4\pi)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x=y(x)$

故 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$ 的周期为 2π.

注:定理:设 $y=a_1\sin(\omega_1 x+\varphi_1)+a_2\sin(\omega_2 x+\varphi_2)$

若 $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ 为有理数,则函数 $y(x)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\omega_1},\frac{2\pi}{\omega_2}$ 两数的最小公倍数.)

14. 判断下列函数的单调增减性

(1) $y=2x+1$; (2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; (3) $y=\log_a x$;

(4) $y=1-3x^2$; (5) $y=x+\lg x$.

解:(1) $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,并设 $x_2>x_1$

$$f(x_2)-f(x_1)=2x_2+1-(2x_1+1)=2(x_2-x_1)>0,$$

故 $y=2x+1$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增函数.

(2) $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,并设 $x_2>x_1$,则

$$f(x_2)-f(x_1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x_2}{x_1}}-1\right]$$

因 $x_2>x_1$,故 $\frac{x_2}{x_1}>1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x_2}{x_1}}-1<0$,故 $f(x_2)-f(x_1)<0$

故 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的单调减函数.

注:在上式证明中,若 $x_1=0,\frac{x_2}{x_1}\to+\infty,\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x_2}{x_1}}\to 0,\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x_2}{x_1}}-1<0$,命题仍正确.

(3) (i)$a>1$. $x>0$. $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$,并设 $x_2>x_1$

$$f(x_2)-f(x_1)=\log_a x_2-\log_a x_1=\log_a\frac{x_2}{x_1}>0,$$

故 $f(x)=\log_a x$ 为 $(0,+\infty)$ 内的单调增函数.

(ii)$0<a<1$, $x>0$. $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$,并设 $x_2>x_1$,有

$$f(x_2)-f(x_1)=\log_a x_2-\log_a x_1=\log_a\frac{x_2}{x_1}<0,$$

故 $f(x)=\log_a x$ 为 $(0,+\infty)$ 内的单调减函数.

(4) $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,并设 $x_2>x_1$,有

$$f(x_2)-f(x_1)=(1-3x_2^2)-(1-3x_1^2)=3(x_1^2-x_2^2)$$

(i)当 $x_2>x_1>0$ 时,因 $x_1^2-x_2^2<0$,故 $f(x_2)-f(x_1)<0$;

(ii)当 $x_1<x_2<0$ 时,因 $x_1^2-x_2^2>0$,于是 $f(x_2)-f(x_1)>0$.

综上,有 当 $x>0$ 时,$f(x)=1-3x^2$ 为单调减函数;当 $x<0$ 时,$f(x)=1-3x^2$ 为单调增函数.

(5) $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$,并设 $x_2>x_1$,有

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2+\lg x_2)-(x_1+\lg x_1)=(x_2-x_1)+\lg\frac{x_2}{x_1}>0$$

故当 $x>0$ 时,$y=x+\lg x$ 为单调递增函数.

注:应用导数的方法可以更方便地判断函数的单调性.

15. 试证两个偶函数的乘积是偶函数;两个奇函数的乘积是偶函数;一个偶函数与一个奇函数的乘积是奇函数.

证:我们只就第三种情形加以证明.

设 $f(x)$ 为某一对称区间上的奇函数,$g(x)$ 为同一区间上的偶函数,令 $\Phi(x)=f(x)\cdot g(x)$,

于是,$\Phi(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)\cdot g(x)=-\Phi(x)$,即

函数 $\Phi(x)=f(x)\cdot g(x)$ 为上述区间上的奇函数.

16. 求下列函数的反函数

(1) $y=1-\sqrt{1-x^2}$, $(-1\leqslant x<0)$; (2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$, $(x\geqslant 1)$;

(3) $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$.

解:(1)容易求得 $x=\pm\sqrt{1-(1-y)^2}$,因 $-1\leqslant x\leqslant 0$,故反函数为

$$f^{-1}(x)=-\sqrt{1-(1-x)^2},x\in[0,1].$$

(2)由 $x+\sqrt{x^2-1}=e^y$，于是有 $x=\dfrac{1+e^{2y}}{2e^y}$，从而反函数为

$$y=\frac{1+e^{2x}}{2e^x},x\in[0,+\infty).$$

(3)令 $u=\sqrt{1+4x}$，则 $y=\dfrac{1-u}{1+u}$，于是

$$u=\frac{1-y}{1+y}\text{即}\sqrt{1+4x}=\frac{1-y}{1+y},x=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2-1\right]=-\frac{y}{(1+y)^2}$$

故反函数为 $y=-\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

17. 下列函数可以由哪些简单函数复合而成？

(1)$y=\sqrt{3x-1}$； (2)$y=a\sqrt[3]{1+x}$； (3)$y=(1+\ln x)^5$；

(4)$y=e^{e^{-x^2}}$； (5)$y=\sqrt{\lg\sqrt{x}}$； (6)$y=\lg^2\arccos x^3$.

解：(1)$y=\sqrt{u},u=3x-1$；

(2)$y=a\sqrt[3]{u},u=1+x$；

(3)$y=(1+u)^5,u=\ln x$；

(4)$y=e^u,u=e^v,v=-x^2$；

(5)$y=\sqrt{u},u=\lg v,v=\sqrt{x}$；

(6)$y=u^2,u=\lg v,v=\arccos t,t=x^3$.

18. 设 $f(x)$ 为定义在 $[-1,1]$ 上的任一函数，证明 $f(x)$ 可以表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证：构造函数. 令

$$\Phi(x)=f(x)+f(-x),\quad \psi(x)=f(x)-f(-x).$$

不难检验，$\Phi(x)$ 为 $[-1,1]$ 上的偶函数，$\psi(x)$ 为 $[-1,1]$ 上的奇函数. 于是

$$f(x)=\frac{1}{2}[\Phi(x)+\psi(x)].$$

19. 作函数 $y=\begin{cases}x^2+1, & x>1\\ 0, & x=1\\ x^2-1, & x<1\end{cases}$ 的图像并讨论其单调性.

解：如图 1-1 所示.

当 $x\leqslant 0$ 时函数 y 单调减，当 $x>0$ 时函数 y 单调增.

20. 某企业每天的总成本 K 是该企业的日产量 Q 的函数，$K=150+7Q$，该企业每天生产的最大能力是 100 个单位产品，试求成本函数的定义域与值域.

解：成本函数 $K=150+7Q$，定义域：$Q\in[0,100]$，值域 $K\in[150,850]$.

21. 已知产品价格 P 和需求量 Q 有关系式 $3P+Q=60$，试求：

(1)需求曲线 $Q(P)$ 并作图；