上海市教委教材资助项目

贺国强 许承德 岳 洪 编著

XIANXING DAISHU JIAOCHENG

线性代数教程

上海大学出版社

上海市教委教材资助项目

线性代数教程

贺国强　许承德　岳　洪　编著

上海大学出版社
·上海·

内 容 提 要

本书在取材上把空间解析几何中的线性部分归并到线性代数，在内容处理上采用以矩阵为代表的代数运算为主，同时辅以线性空间与线性映射的观点的方式，从而形成了独特的新体系。这样安排在内容上更协调，一些重要的概念、方法和结论在不同的层次多次反复，有利于读者理解和掌握。几何观点的尽早引入和适当加强，有利于培养读者的空间想象能力。

全书共分八章，除通常内容外，还包含一些进一步的材料。本书主要是为高等院校理工等科非数学各专业本科生一年级新生编写的教材，也可供其他类型的学生、科技人员和自学者参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数教程/贺国强，许承德，岳红编著.—上海：上海大学出版社，2006.8

ISBN 7-81058-986-5

Ⅰ.线...　Ⅱ.①贺...②许...③岳...　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 089818 号

责任编辑　潘春枝
封面设计　柯国富
技术编辑　章　斐

线性代数教程

贺国强　许承德　岳　洪　编著

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路 99 号　邮政编码 200444)

(http://www.shangdapress.com　发行热线 66135110)

出版人：姚铁军

*

上海财经大学出版社印刷厂印刷　　各地新华书店经销

开本 787×960　1/16　印张 24　字数 430 千

2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷

印数：1～1 100 册

ISBN 7～81058－986－5/O·038　定价：42.00 元

前　言

线性代数是研究有限维线性系统的性质、方法和应用的学科，线性代数课程是高等院校（非数学系）理、工、经、管等各科的一门数学基础课，是进一步学习其他课程或应用数学方法解决实际问题的基石之一. 尤其是在信息化的21世纪，随着计算机的普及和计算方法被普遍接受为第三种基本的科学研究手段，线性代数知识或矩阵理论与方法在应用中显得越来越重要. 另一方面，通过线性代数知识的学习，可以有效培养学生逻辑推理、空间想象和计算的能力，提高学生的数学素养.

目前许多高校有加强线性代数课程教学力度、并把该课程安排在新生第一学期上的趋势，这样能对大学物理等其他课程提供更好的支持. 作为这种趋势的结果之一是把高等数学中的空间解析几何部分归并到线性代数，组合成“线性代数与空间解析几何”课程. 这样的组合有极大的好处：三维几何空间的知识除了它本身的重要意义外，也为进一步学习抽象线性代数的知识提供了方法上的启示和几何上的直观理解.

现有的线性代数教材在内容的安排上有几种类型. 一种是以线性方程组的解为主线，引出有关的概念和方法，例如北京大学出版社蓝以中等编的《线性代数引论》；第二种是由行列式，矩阵，线性方程组解法等为主线，注重代数运算方面，最后给出几何理论，即线性空间与线性变换，例如同济大学出版社和清华大学出版社的《线性代数》；第三种处理方法是以线性空间和线性变换为主线展开教学，把矩阵作为线性变换的工具而引出，例如韦金生等编的《线性代数与空间解析几何》.

现在已经出版了许多优秀的《线性代数》与《线性代数与空间解析几何》教材，它们各有特色和所长. 那么为什么还要出版这本《线性代数教程》呢？下面是本教程的一些主要特色.

1. 首先在取材上与已有的教材都不相同. 前面我们已经指出在学习线性代数之前先学习空间解析中的有关内容是十分必要的，但是我们认为把空间解析几何的全部内容移过来也有不妥. 因为只讲二次曲面，不讲直纹面、旋转面等其他曲面和空间曲线，对空间解析几何的介绍不完整，如果介绍这些内容又与其他“线性”内容不协调. 另一方面，若完整地讲述二次曲面的分类，对本课程而言又过于深入. 我们的处理是把与空间向量、向量运算、坐标系、直线、平面等解析几何中的“线性”部

分划出归并到“线性代数”课程，而把与空间曲线和曲面有关的部分留在“高等数学”课程，放在多元微积分前介绍. 这样处理是新的，我们认为是更合理的方式. 一方面，本课程学习的三维空间中坐标、向量及向量运算等知识，正是接下来“大学物理”课程所需要的. 另一方面，三维几何空间及其中的向量、向量的线性运算等等概念为介绍 n 维向量空间 R^n 类似概念提供了几何直观的理解，这对于学生的理解至关重要.（实际上，我们在第一章“三维几何空间”的叙述方式的选择上多处考虑了后面推广的需要.）

2. 如此安排后，一些重要概念和性质在三个不同的层次出现：三维几何空间→n 维向量空间 R^n→一般线性空间. 通过多次反复和逐步提升，使学生易于理解和掌握. 另一方面，为了避免重复，在第六章§1 直接引入线性空间的基本概念与性质，不再加以证明. 由于有了前面两个层次的反复，学生是能够理解和接受的.

3. 线性空间与线性映射（变换）是线性代数的中心内容，这些内容对培养学生的空间想象能力、提高数学素养是很重要的. 现在由于教学时数的限制，不少学校在教学中对于线性空间特别是线性映射的内容授课不多，又往往在课程结束前才提及，因此很难形成有效的知识. 另一方面，以线性空间与线性映射为主线安排教学显然对非数学系学生是不合适的. 在本教程中我们的处理基本上仍以矩阵、矩阵的性质与应用为代表的代数运算为主的线索，同时，尽早地引入和适当加强线性空间和线性映射的概念，使学生多次接触这些概念后能逐步理解和掌握. 例如我们在第三章第一节引入 n 元向量空间 R^n（或 C^n）后立即引入子空间的概念，第二节为多元向量空间之间的线性映射，矩阵则作为线性映射的一种表示形式而引入（第三节）. 矩阵的运算作为线性映射的对应运算来定义，这就早早地把矩阵与线性映射对应起来，研究矩阵就是研究线性映射. 由于有了线性映射和线性空间的概念，许多问题就有了更直观的几何解释. 例如为了解决子空间的维数问题，自然地引入向量组的线性相关性概念.

4. 对所讨论的课题在可能的范围内尽量做到完整，书中的定理基本上都给出证明（有些标注 * 号，学时不足时可以略去），还包括一些一般教材中没有的材料（这些内容供学时较充足时选讲），例如

1）最小二乘法与广义逆矩阵（第五章第三节）；

2）矩阵的若当标准形（第七章第四节，其中对 3 阶矩阵的若当标准化进行了简洁而完整的讨论）；

3）n 维点空间与几何向量空间（第五章的阅读材料 3，它完成了从三维点空间→三维几何向量空间→R^3→R^n→n 维点空间与几何向量空间的一个上升式的循环）.

5. 我们的愿望是要编一本既适于教，又适于自学的教科书. 在每个重要概念和课题引入时尽量讲清来龙去脉，注重启发式. 在保证所述内容的严密性和简洁性的同时，注重叙述的可读性和亲和性. 教材还包含四个“阅读材料”，供学生参考自学. 它们是重要的基础知识但又不能在课堂上讲授(阅读材料 2：等价关系；阅读材料 4：多项式的基本知识)，或者是基本知识的扩充(阅读材料 3：n 维点空间与几何向量空间)，或起到承上启下的作用(阅读材料 1：三元一次方程组).

综上所述，本教程是一本有着自己鲜明特色的教材. 教学对象是非数学类的理、工等专业的大学一年级学生，作适当删减，可适用 50～70 学时的线性代数课程. 若除去约 10 学时属于原空间解析几何内容的三维几何向量空间，线性代数内容约 40～60 学时，这样的安排与当前“线性代数”课程处理的总趋势相符合. 若教学时数为 50，建议删去标注 * 号的章节(第六章的 §1 与 §3.3 保留)以及部分标注 * 号的定理证明. 这也正是几年来我们在上海大学为基础教学强化班实施的方案.

下面是关于本教程的其他一些说明.

1. 本书中定义、定理、例题等按章分别编号. 引用规则举例如下：若在同一章(现如为第一章)引用定理 2.1，为“由定理 2.1……”，若在其他一章中引用，则为“由第一章的定理 2.1……”或“由定理 1.2.1……”. 公式编号的引用规则类似.

2. 本书每节后编有习题，一章后编有补充题. 节后的习题在内容和难度上与正文内容紧密结合，而章后的补充题在难度上有所提高，有的是无法在课堂内讲解的内容，可供学有余力的读者思考.

3. 我们同时编写了一本《线性代数学习辅导》与本教程相配套，该辅导书分基本部分和提高部分，可供不同程度读者参考.

虽然我们主观上想编一本有特色、高质量的教材，但由于作者水平和时间的限制，书中难免有许多不当和错误之处，诚恳希望读者批评指正.

编　者

2006 年 7 月 1 日

目　录

第一章　三维几何空间

在中学里我们已经学了平面解析几何，在平面上建立了直角坐标系后就可以用代数方法研究平面几何图形的性质. 本章将把此坐标法推广到三维空间，从而提供了用代数方法研究空间几何图形的途径.

本章另一个重要内容是要引入空间中向量的概念，并且详细研究空间向量的各种性质. 我们将看到向量法和坐标法的结合为研究空间几何问题提供了强有力的工具.

本章的内容除了它本身的意义外，也为后面各章提供了概念、结论和方法上的启示以及几何上的直观理解.

§1　几何向量及其线性运算

1.1　向量的概念及其几何表示

在力学中有些量，例如质点的位移、速度和所受的作用力等，不但有大小，而且有方向. 我们把既有大小又有方向的量称为**向量**或**矢量**. 在空间中一个向量可以用一个**有向线段**来表示，例如图 1.1 中的有向线段$\overrightarrow{AB}$表示一个向量，$\overrightarrow{AB}$的长度表示向量的大小，$\overrightarrow{AB}$的指向表示向量的方向，上述方法称向量的**几何表示**. 几何表示方法对向量性质的研究有很大帮助.

用有向线段表示的向量也称为**几何向量**. 图 1.1 中的点 A 称为$\overrightarrow{AB}$的**始点**或**起点**，点 B 称为**终点**. 这里定义的向量只考虑它的大小和方向，不计较它的具体位置. 因此如果两向量有相同的大小和方向，即经平移后起点和终点可以分别重合，则认为它们**相等**，例如图 1.1 中的向量 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. 除了用起点、终点表示外，向量也常用小写黑体 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 或加箭头的英文字母$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$或希腊字母 α, β, γ 等来表示.

向量$\overrightarrow{AB}$的大小也称为它的**长度**或**模**，记作 $\|\overrightarrow{AB}\|$. 规定长度等于零的向量为**零向量**，记作 θ. 零向量在几何上用一个点来表示，它是唯一一个没有方向的向量.

与向量$\overrightarrow{AB}$大小相同、方向相反的向量称为$\overrightarrow{AB}$的**反向量**或**负向量**，记作$-\overrightarrow{AB}$. 显然有 $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

空间中全体几何向量构成的集合称为**(三维)几何向量空间**，记作 G^3. 为了消除几何向量位置的不确定性，读者可以想象 G^3 中的向量具有一个公共的起始点.

我们把 G^3 中位于同一条直线 l 上的几何向量的全体组成的集合称为 G^3 的一个**一维子空间**，记作 $G_l = G_l^1$；把 G^3 中位于同一个平面 π 上的几何向量的全体组成的集合称为 G^3 的一个**二维子空间**，记作 G_π^2. 显然 G^3 中有无穷多个不同的一维子空间和二维子空间.

如果直线 l 与 l' 平行，那么一维子空间 $G_{l'}$ 与 G_l 含有相同的几何向量(注意：平行移动不改变一个几何向量，参见图 1.2)，称这两个子空间相等，记作

$$G_{l'} = G_l.$$

类似地，如果平面 π' 与 π 平行，那么二维子空间 $G_{\pi'}^2$ 与 G_π^2 相等，记作

$$G_{\pi'}^2 = G_\pi^2.$$

当不需要强调一维(或二维)子空间中向量所在的直线 l(或平面 π)时，我们将省略足标 l(或 π)，把 G_l(或 G_π^2)记作 G(或 G^2).

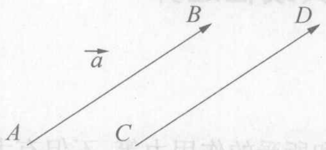

图 1.1

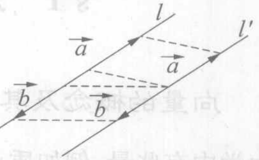

图 1.2

1.2 向量的加法

力学中用**平行四边形法则**定义两个向量的和，这个法则也适用于一般的几何向量.

定义 1.1 设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$，则称以 AB, AD 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量 $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 1.3)，记作

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},$$

求两向量和的运算称为**向量的加法**.

因为图 1.3 中 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$，因此也可用下面的方法求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和：作 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，以 B 为起点作 $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$，则向量 $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$ 就是 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$(图 1.4)，上述方法称为求向量和的**三角形法则**.

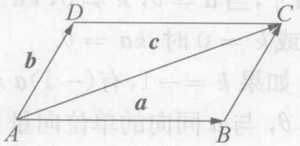

图 1.3

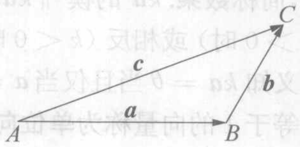

图 1.4

由定义不难证明向量的加法具有下面的基本性质：

1° $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；(交换律)

2° $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；(结合律)(参见图 1.5)

3° $\boldsymbol{a}+\theta=\boldsymbol{a}$；

4° $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\theta$.

由于向量加法满足交换律和结合律，三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的和可记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，而不必计及它们运算的先后次序.

由三角形三条边的数量关系，可得向量加法的**三角不等式**

$$\|\boldsymbol{a}\|-\|\boldsymbol{b}\|\leqslant\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\leqslant\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|. \tag{1.1}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的反向量 $-\boldsymbol{b}$ 的和称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

求差的运算称为**向量的减法**，向量减法的几何表示见图 1.6. 如果三个向量满足

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c},$$

两端同时减去 $\boldsymbol{b}$，得

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b},$$

因此移项运算是允许的.

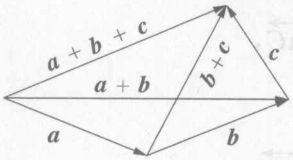

图 1.5

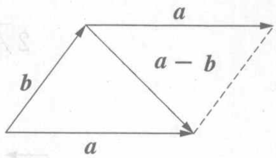

图 1.6

1.3　向量的数乘

定义 1.2　实数 k 与一个向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $k\boldsymbol{a}$ 或 $k\cdot\boldsymbol{a}$ 是一个向量，称为 k 与 $\boldsymbol{a}$ 的

数量乘积，简称数乘. ka 的模 $\|ka\| = |k|\,\|a\|$，当 $a\neq\theta$, $k\neq 0$, ka 的方向与 a 相同 ($k>0$ 时) 或相反 ($k<0$ 时)，当 $a=\theta$ 或 $k=0$ 时，$ka=\theta$.

由定义知 $ka=\theta$ 当且仅当 $a=\theta$ 或 $k=0$. 如果 $k=-1$，有 $(-1)a=-a$.

长度等于 1 的向量称为**单位向量**. 如果 $a\neq\theta$，与 a 同向的单位向量为

$$a^0=\frac{a}{\|a\|},$$

此时有 $a=\|a\|\cdot a^0$.

向量的数乘有下面的基本性质(其中 k, l 为任意实数)：

1° $1\cdot a=a$；

2° $k(la)=(kl)a$；

3° $(k+l)a=ka+la$；(关于数的分配律)

4° $k(a+b)=ka+kb$.(关于向量的分配律)

这些性质可用几何作图法证之，具体证明留给读者. 向量的加法和数乘统称为向量的**线性运算**.

例 1.1 设 D 是三角形 ABC 中 BC 边的中点，证明 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ (图 1.7).

证 在三角形 ABD 中，

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}.$$

在三角形 ADC 中，

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}.$$

因为 D 是 BC 的中点，故 $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{BD}$，所以上面两式相加得

$$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},$$

即

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$ □

例 1.2 证明平行四边形对角线互相平分.

证 设 $ABCD$ 是一个平行四边形(图 1.8)，对角线 AC, BD 的中点分别为 E, F，则

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}).$$

另一方面，由例 1.1 有

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}).$$

所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}$，即 E，F 两点重合. 这表明对角线互相平分. □

上述用向量及其性质进行分析推导的方法称为**向量法**.

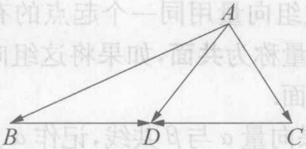

图 1.7

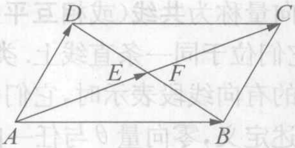

图 1.8

习　题　1

1. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，判断下列等式何时成立：

1) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}$；　2) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}=-\dfrac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}$；

3) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$.

2. 设 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 是一个正六边形，

1) 判断向量组 $\overrightarrow{A_1A_2}$，$\overrightarrow{A_2A_3}$，$\overrightarrow{A_3A_4}$，$\overrightarrow{A_4A_5}$，$\overrightarrow{A_5A_6}$，$\overrightarrow{A_6A_1}$ 中哪些向量互为反向量；

2) 求 $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_5A_6}$；

3) 设 $\overrightarrow{A_1A_2}=\alpha$，$\overrightarrow{A_1A_6}=\beta$，用 α，β 表示 $\overrightarrow{A_2A_3}$，$\overrightarrow{A_1A_4}$ 和 $\overrightarrow{A_1A_5}$.

3. 设 P 是线段 AB 上一点，并且 $AP:PB=1:2$，O 是空间中任意一点，证明：

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

4. 设 M 是三角形 ABC 的重心，O 是空间中任意一点，证明：

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

5. 设 $ABCD$ 是任意一个空间四边形，E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD 和 DA 边的中点，用向量法证明 $EFGH$ 是平行四边形.

§2 基与空间坐标系

2.1 共线、共面向量的判定

一组向量称为**共线**（或**相互平行**），如果将这组向量用同一个起点的有向线段表示时，它们位于同一条直线上. 类似地，一组向量称为**共面**，如果将这组向量用同一个起点的有向线段表示时，它们位于同一个平面.

由上述定义，零向量 θ 与任一向量共线. 如果向量 α 与 β 共线，记作 $\alpha /\!/ \beta$.

判断一组向量是否共线或共面，在许多问题的研究中有重要意义，下面先给出两向量共线的条件.

定理 2.1 设向量 $\alpha \neq \theta$，则向量 β 与 α 共线的充要条件是存在唯一一个实数 k，使得

$$\beta = k\alpha. \tag{2.1}$$

证 充分性. 若 β 有表示式(2.1)，则由数乘以向量的定义，β 与 α 同向（$k>0$ 时）或反向（$k<0$ 时）或 $\beta=\theta$（$k=0$ 时），从而 β 与 α 共线.

必要性. 设 β 与 α 共线，由 $\alpha \neq \theta$，知 $\|\alpha\| \neq 0$. 令

$$l = \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \geqslant 0.$$

当 β 与 α 同向或为零向量时，取 $k=l$，当 β 与 α 反向时，取 $k=-l$，从而都有表达式 $\beta = k\alpha$.

下面证表示式(2.1)的唯一性. 假设还有另一表示式

$$\beta = k'\alpha,$$

结合(2.1)式，有 $k\alpha = k'\alpha$，可得 $(k-k')\alpha = \theta$，因为 $\alpha \neq \theta$，所以 $k-k'=0$，即 $k=k'$，这表明表示式是唯一的. □

下面的推论给出了两个向量共线的一般情形.

推论 2.1a 两个向量 α_1，α_2 共线的充要条件是存在不全为零的实数 k_1，k_2，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = \theta. \tag{2.2}$$

证　如果有一个向量为零向量，例如 $\alpha_1 = \theta$，则 α_1，α_2 共线，取 $k_1 = 1$，$k_2 = 0$，结论成立. 下面设 α_1，α_2 均不为零向量.

若(2.2)式成立，其中 k_1，k_2 不全为零. 不妨设 $k_2 \neq 0$，由(2.2)式推得

$$\alpha_2 = k\alpha_1, \ k = -\frac{k_1}{k_2},$$

所以由定理 2.1，α_1，α_2 共线.

反之，若 α_1，α_2 共线，则由定理 2.1，存在实数 k，使得

$$\alpha_2 = k\alpha_1.$$

取 $k_1 = k$，$k_2 = -1$，它们不为零，并且(2.2)式成立. □

推论 2.1a 的一个等价说法(逆否命题)是：两个向量 α_1，α_2 不共线的充要条件是不存在不全为零的实数 k_1，k_2，使得(2.2)式成立.

下面是三个向量共面的条件.

定理 2.2　设向量 α，β 不共线，则向量 γ 与 α，β 共面的充要条件是存在唯一的二元有序实数组 k，l，使得

$$\gamma = k\alpha + l\beta. \tag{2.3}$$

证　充分性. 设有表示式(2.3)，若 k，l 有一个为零，则 γ 与 α 或 β 共线，易知 γ，α，β 共面，下设 k，$l \neq 0$. 由题设 α，β 不共线，故它们均不为零向量，γ 是以 $k\alpha$ 和 $l\beta$ 为邻边的平行四边形的对角线向量，于是 γ 与 $k\alpha$，$l\beta$ 共面，也即 γ 与 α，β 共面.

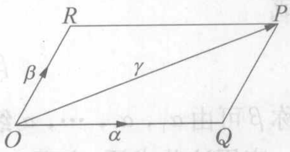

图 2.1

必要性. 现设 α，β，γ 共面. 把这三个向量的起点放在同一个点 O，则它们在同一个平面上(图 2.1).

过 $\gamma = \overrightarrow{OP}$ 的终点 P 分别作平行于 β 和 α 的直线. 分别交 α 和 β 所在的直线于 Q 和 R 点. 由定理 2.1，存在两个实数 k 和 l，使得 $\overrightarrow{OQ} = k\alpha$，$\overrightarrow{OR} = l\beta$. 于是由平行四边形法则，有 $\gamma = k\alpha + l\beta$.

最后证明表示式的唯一性. 假设 γ 还有另一表示式 $\gamma = k'\alpha + l'\beta$，结合(2.3)式可得

$$(k-k')\alpha + (l-l')\beta = \theta,$$

因为 α，β 不共线，所以由推论 2.1a，$k-k'=0$，$l-l'=0$，即 $k=k'$，$l=l'$，这说

明表示式(2.3)是唯一的. □

类似于推论 2.1a,我们有

推论 2.2a 三个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共面的充要条件是存在不全为零的实数 k_1, k_2, k_3,使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \theta.$$

例 2.1 证明空间中三点 P_1, P_2 和 P_3 共线的充要条件是:对于空间中任意一点 O,都存在不全为零的实数 k_1, k_2 和 k_3,使得

$$k_1\overrightarrow{OP_1} + k_2\overrightarrow{OP_2} + k_3\overrightarrow{OP_3} = \theta. \tag{2.4}$$

证明 必要性. 设 P_1, P_2, P_3 三点共线,则易知三个向量 $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ 共面,于是由推论 2.2a,存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3,使得(2.4)式成立.

下面用反证法证明充分性. 假设 P_1, P_2, P_3 不共线,则通过这三点可唯一确定一个平面. 任取不在这个平面上的一点 O,则三个向量 $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ 不共面. 于是由推论 2.2a,不存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3,使得(2.4)式成立,这与题设的条件矛盾. 此矛盾表明当题设条件满足时,P_1, P_2, P_3 三点共线. □

2.2 基与向量的坐标

定义 2.1 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 s 个向量,$k_1, k_2, \cdots, k_s$ 是 s 个实数,称向量 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$ 是向量(组)$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个**线性组合**. 如果向量 β 可表示成

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s,$$

则称 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ **线性表示**,$k_1, k_2, \cdots, k_s$ 称为**表示系数**.

应用这些术语,定理 2.1 表明一维子空间 G_l 中任意一个向量可由 G_l 中的一个非零向量唯一线性表示,定理 2.2 表明二维子空间 G_π^2 中任意一个向量可由 G_π^2 中的两个不共线的向量唯一线性表示. 下面的定理表明在几何向量空间 G^3 中有类似的性质.

定理 2.3 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是空间中的任意三个不共面的向量,那么对空间中的任一向量 α,都存在唯一的三元有序实数组 x, y, z,使得

$$\alpha = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3. \tag{2.5}$$

证 先证明存在表示式(2.5). 任取一点 O,以 O 为起点作向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$,过 O