高校经典教材同步辅导

九章丛书

线性代数

同济四版

辅导及习题全解

主编／孙怀东　唐明星

编写／九章系列课题组

■知识点窍■逻辑推理

■习题全解■全真考题

■名师执笔■题型归类

新版

人民日报出版社

高校经典教材同步辅导

线性代数

（同济四版）

辅导及习题全解

主编 [illegible]怀东　唐明星

主审 杨[illegible]云

编写 九章系列课题组

尹宝岩　朱东梅

陈春先　郭维林

G6?

?5

图书在版编目(CIP)数据

高校经典教材同步辅导·线性代数(同济四版)/孙怀东,唐明星主编. --北京:人民日报出版社,2004.9

ISBN 7-80153-967-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①孙…②唐… Ⅲ.高校 教学参考资料

Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 099676 号

高校经典教材同步辅导·线性代数(同济四版)

主　　编:孙怀东　唐明星
责任编辑:曲　易
封面设计:伍克润

出版发行:人民日报出版社(北京金台西路 2 号/邮编:100733)
经　　销:新华书店
印　　刷:北京顺天意印刷有限公司

字　　数:212 千字
开　　本:850×1168　1/32
印　　张:9.75
印　　数:3000
版　　次:2005 年 8 月第 1 次印刷

书　　号:ISBN 7-80153-967-2/G·550
定　　价:11.00 元(全五册·128.00 元)

前　言

线性代数是大学数学课程中的一门重要的必修课程，是理工科学生学习其他课程的基础和工具，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。然而由于线性代数自身的抽象性以及特有的语言符号系统，引入了许多新的概念和思维方式，且解题方法灵活多变，使得线性代数成为众多学习者的一大难关。

为了帮助广大读者学好线性代数，我们根据原国家教委审定的普通高等学校线性代数课程教学基本要求(教学大纲)和研究生入学考试教学大纲编写了这本具有工具书性质的《线性代数辅导及习题全解》。本书按照《线性代数》(同济大学编，第四版，高等教育出版社)的章节顺序，分为六章。

各章具体体系及特点如下：

◆ **知识结构网络图**：以图表的形式概括各章知识点及其之间的联系，使读者对全章内容有一个清晰的脉络。

◆**基本内容诠释及重要结论归纳**：阐述每一章中重要的性质定理、公式和结论，并对一些难于理解但又是大纲所要求的考研经常涉及到的内容进行了详细的归纳和解释。目的是使读者站在一个更高的角度去分析问题、解决问题。

◆ **典型例题的解题方法及技巧**：本书尽可能归纳了这门课程所涉及的重要题型，这些题型都是在对历年考试和考研所涉及的题型进行深入分析后总结出来的，具有一定的代表性。读者通过对典型题型的"思路点拨"和例题的"逻辑推理"的理解，可以更好的掌握和理解此类题型的解法，从而达到举一反三、触类旁通的效果。

◆ **课后习题全解**：本书对所有课后习题均给出了详细的解答，为了使读者在解题之前能够对题型所涉及知识点和解题方法有一个把握，我们还对大部分习题编写了"知识点窍"和"逻辑推理"。前者给出了习题所涉及的知识点，后者给出了此题的解题思路和方法。目的是提高读者的综合解题能力。

在成书过程中，编者参考了众多优秀的著作和教材，由于篇幅所限未能一一列出，在此谨向有关作者表示衷心感谢。

由于时间仓促和编者水平有限，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评，指正。

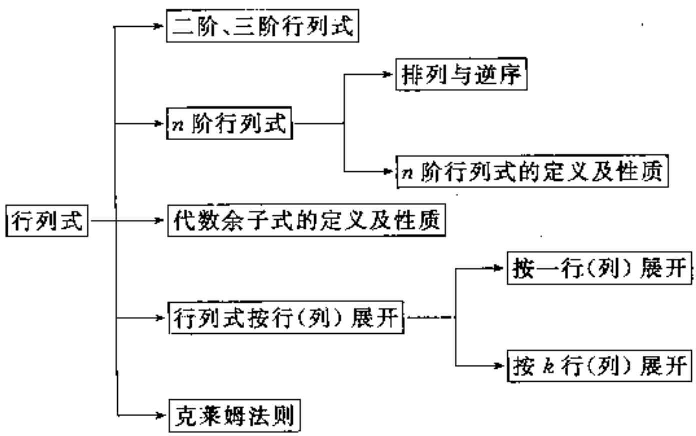
编者

2005年6月

目　录

第一章　行列式

【知识结构网络图】



§1.1 【知识要点诠释与重要结论归纳】

1.(全)排列和逆序数

(1)(全)排列

由 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列(简称排列).n 个不同元素的所有排列的种类 $P_n=n!$.

(2)逆序和逆序数

在 n 个元素的任一排列$(i_1, i_2, \cdots, i_t, \cdots, i_s, \cdots, i_n)$中,若某两个元素的先后次序与标准次序不同,如若 $i_t>i_s$, 则称这两个

数组成一个逆序.

一个排列中所有逆序的总数称为此排列的逆序数,记作$\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$.若$\tau$为奇数,则称$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$为奇排列;若$\tau$为偶数,则称此排列为偶排列.

(3)对换

排列$(i_1, i_2, \cdots, i_t, \cdots, i_s, \cdots i_n)$中,交换任意两数$i_t$和$i_s$的位置,称为一次对换.对换改变排列的奇偶数.

任意一个n元排列$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$经过若干次对换可变为$(1, 2, \cdots, n)$样的标准排列,且所作的对换次数与排列$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$有相同的奇偶性.即奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

2. 行列式的定义

(1)n阶行列式的归纳定义

对由n^2个数组成的n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当$n=1$时,$|a_{11}| = a_{11}$

当$n \geqslant 2$时,

$$D = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(1+j)} a_{1j} M_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}$$

其中$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$为$a_{1j}$的余子式,

$A_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j}$为$a_{1j}$的代数余子式.

(2)n阶行列式的"排列逆序"定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和，故 n 级行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和，每一项的符号取决于组成该项的 n 个元素的列下标排列的逆序数（行下标按自然顺序排列），即当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时取正号，当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇数排列时取负号.

应该指出的是，行列式采用上述两种方式的定义是等价的. 通常如果用“排列逆序”定义行列式，则归纳定义就成为行列式按一行展开的性质.

3. 行列式的性质

(1)行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

(2)互换两行(列)后的行列式是原行列式的相反数.

(3)行列式某一行(列)的各元素都乘以同一数 k，等于 k 乘此行列式.

推论　行列式某一行(列)各元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(4)两行(列)元素对应成比例的行列式为零.

推论　两行(列)元素完全相同的行列式为零.

(5)若行列式某一行(列)的各元素都是两数之和，则该行列式等于两个行列之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 把行列式某一行(列)的各元素都乘以同一数，然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式的值不变.

(6)行列式按行(列)展开定理：行列式等于其任一行(列)的各元素与其代数余子式乘积之和.

推论 行列式中某行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零.

(7)拉普拉斯展开定理：行列式等于其中任意 k 行(列)的所有 k 阶子式与其代数余子式乘积之和(显见(6)是(7)的特例).

4. 行列式按行(列)展开

(1)展开法则 行列式按任一行(列)展开

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

或 $D_n = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{1j}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$

其中，A_{ij} 的代数余子式.

(2)推论

行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余

子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$$

或 $$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j)$$

(3)代数余子式的性质

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D & 当\ i=j\\ 0 & 当\ i\neq j\end{cases}$$

或 $$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D & 当\ i=j\\ 0 & 当\ i\neq j\end{cases}$$

其中, $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & 当\ i=j\\ 0 & 当\ i\neq j\end{cases}$

(4)拉普拉斯定理　行列式按某 k 行(列)$(1<k\leqslant n-1)$展开

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=N_1A_1+N_2A_2+\cdots+N_tA_t$$

其中 $t=C_n^k$, 而 $N_i(i=1,2,\cdots,t)$为取定的某 k 行(列)所得到的 k 阶子式; A_i 为 N_i 的对应代数余子式.

5. 重要公式

(1)上(下)三角行列式及对角行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(2)范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1{}^2 & x_2{}^2 & \cdots & x_n{}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1{}^{n-1} & x_2{}^{n-1} & \cdots & x_n{}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\geqslant j\geqslant i\geqslant n}(x_i - x_j)$$

(3)克莱姆法则

n 元 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

当行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

§1.2 【典型题型的解题方法及技巧】

题型Ⅰ 计算排列的逆序数

【思路点拨】 在求排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的逆序数时，可以从第2个数开始，依次统计 $j_i(i=2,3,\cdots,n)$ 与其前面的数构成的逆序个数（即前面比 j_i 大的数的个数）τ_i，则排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 $\tau_2+\tau_3+\cdots+\tau_n$.

【例 1.1】 求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性.

(1)6 3 2 1 4；

(2)1 3 5 $\cdots(2n-1)$ 2 4 $6\cdots(2n)$.

【解】 (1)$\tau(6\ 3\ 2\ 1\ 4)=1+2+3+1=7$，为奇排列.

(2)该排列的前 n 个数 1 3 5 $\cdots$ $(2n-1)$之间不构成逆序，后 n 个数 2 4 $6\cdots(2n)$之间也不构成逆序，只有前后 n 个数之间才构成逆序，因此排列的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau&=\tau_2+\tau_3+\cdots+\tau_n+\tau_{n+1}+\tau_{n+2}+\cdots+\tau_{2n}\\&=0+0+\cdots+0+0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

对于$\frac{n(n-1)}{2}$的奇偶性讨论如下：

当 $n=4k$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$为偶数；

当 $n=4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$为偶数；

当 $n=4k+2$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 为奇数；

当 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 为奇数.

综上所述，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，此排列为奇排列，其中 k 为任意非负整数.

题型Ⅱ　低阶(3—5 阶)行列式的计算

【思路点拨】 可采用两种方法：

方法一：根据行(或列)元素的特点，利用行列式的性质化为上(或下)三角形行列式

方法二：根据行列式按一行(或列)展开公式降价求解.

【例 1.2】 计算下列行列式

(1) $D=\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$

(2) $D=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & -12 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

【逻辑推理】 数字型行列式的计算一般采用把某行(或列)元素中除去某一元素外的其它元素，用行列式的性质都化为零，再利用按行(或列)展开的性质，降低行列式的阶数进行计算.

【解】 (1)

$$D=\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix}3 & 1 & 4\\ -1 & 2 & -5\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}3 & -8 & 4\\ -1 & 5 & -5\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix}-8 & 4\\ 5 & -5\end{vmatrix}=2000.$$

(2)因为该行列式的第 4 列含有 0 元素，且 $a_{24}=1$，所以，可用行列式的性质把第 4 列的元素 a_{14}、a_{44} 化为 0，再按第 4 列展开

$$D=\begin{vmatrix}5 & -14 & -2 & 0\\ 1 & -6 & -2 & 1\\ -3 & 5 & 2 & 0\\ 1 & 6 & 6 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}5 & -14 & -2\\ -3 & 5 & 2\\ 1 & 6 & 6\end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix}5 & -14 & 2\\ 2 & -9 & 0\\ 16 & -36 & 0\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -9\\ 16 & -16\end{vmatrix}$$

$$=144.$$

题型Ⅲ　n 阶行列式的计算

【思路点拨】 n 阶行列式的计算方法主要有以下几种：

1. 直接按定义计算，特别是对于非零元素特别少（一般小于 $2n$ 个）的题适用.

2. 利用行列式的性质或重要公式定理化为三角行列式.

3. 利用行列式按行（列）展开定理进行降阶.

4. 升降法. 为了对要计算的行列式进行化简. 根据行列式的特征，有时可把原行列式在保值的情况下加上一行一列再进行计算. 常见的加边法如下