全国注册土木工程师（岩土）执业资格考试辅导系列

岩土 注册土木工程师

基础考试过关必做1500题

主编：金圣才

支持：中华工程资格考试网

赠 圣才学习卡20元

中华工程资格考试网 www.100gczg.com

圣才学习网 www.100xuexi.com

中国石化出版社

HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

教·育·出·版·中·心

全国注册土木工程师(岩土)执业资格考试辅导系列

注册土木工程师(岩土)
基础考试过关必做1500题

主编：金圣才
支持：中华工程资格考试网

中国石化出版社

内 容 提 要

本书是全国注册土木工程师(岩土)执业资格考试基础考试的一本过关必做习题集，包括上午考试和下午考试，共十八章，根据最新《全国注册土木工程师(岩土)基础考试大纲》和相关考试用书精心编写了约1500道习题，所选习题基本覆盖了考试大纲规定需要掌握的知识内容，并对部分习题进行了详细的分析和解答。

本书特别适用于参加全国注册土木工程师(岩土)执业资格考试基础考试的考生使用。本书配有圣才学习卡，圣才学习网/中华工程资格考试网(www.100gczg.com)为考生提供全国注册土木工程师(岩土)执业资格考试的名师网络课程、历年真题等增值服务。

图书在版编目(CIP)数据

注册土木工程师（岩土）基础考试过关必做1500题/金圣才主编．—北京：中国石化出版社，2009
（全国注册土木工程师（岩土）执业资格考试辅导系列）
ISBN 978-7-80229-942-9

Ⅰ．注… Ⅱ．金… Ⅲ．①土木工程-工程技术人员-资格考核-习题②岩土工程-工程技术人员-资格考核-习题 Ⅳ．TU-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第079747号

中国石化出版社出版发行
地址：北京市东城区安定门外大街58号
邮编：100011 电话：(010)84271850
读者服务部电话：(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com.cn
金圣才文化发展(北京)有限公司排版
北京宏伟双华印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米16开本25.25印张603千字
2009年5月第1版 2009年5月第1次印刷
定价:48.00元

序 言

为了帮助考生顺利通过全国注册土木工程师(岩土)执业资格考试，我们根据最新《全国注册土木工程师(岩土)考试大纲》和相关考试用书编写了注册土木工程师(岩土)执业资格考试辅导系列：

1.《注册土木工程师(岩土)基础考试过关必做1500题》

2.《注册土木工程师(岩土)专业知识考试过关必做1500题(含历年真题)》

3.《注册土木工程师(岩土)专业案例考试过关必做500题(含历年真题)》

本书是全国注册土木工程师(岩土)执业资格考试基础考试的过关必做习题集，包括上午考试和下午考试，共十八章，根据最新《全国注册土木工程师(岩土)基础考试大纲》和相关考试用书精心编写了约1500道习题，所选习题基本覆盖了考试大纲规定需要掌握的知识内容，并对部分习题进行了详细的分析和解答。

需要特别说明的是：如果相关法律法规、考试大纲以及其他考试资料发生变化，我们会及时根据最新法律法规和考试大纲对本书进行修订和说明，读者可以登陆中华工程资格考试网(www.100gczg.com)查看并下载相关修订部分。本书参考了众多的配套资料和相关参考书，书中错误、遗漏不可避免，敬请指正和提出建议。

圣才学习网(www.100xuexi.com)是一家为全国各类考试和专业课学习提供**名师网络课程**、历年真题详解等各类复习资料的综合性大型网站，包括中华工程资格考试网、中华英语学习网、中华管理学习网、中华金融学习网等48个子网站。

其中，中华工程资格考试网(www.100gczg.com)是一家为各类工程资格考试与学习提供最新全套考试资料的专业型网站。工程资格考试包括建筑师、建造师、结构工程师、土木工程师、造价师、监理师、公用设备工程师、电气工程师、设备监理师、安全工程师、安全评价师、房地产估价师、房地产经纪人、土地登记代理人、土地估价师、资产评估师、招标师、拍卖师等，每种考试类型都设置有为考生和学习者提供一条龙服务的资源，包括：网络课程辅导、在线测试、历年真题详解、专项练习、笔记讲义、视频课件、学术论文等。

本书特别适用于参加全国注册土木工程师(岩土)执业资格考试基础考试的考生使用。本书配有圣才学习卡，圣才学习网/中华工程资格考试网(www.100gczg.com)为考生提供全国注册土木工程师(岩土)执业资格考试的名师网络课程、历年真题等增值服务。详情请登录网站：

圣才学习网 www.100xuexi.com

中华工程资格考试网 www.100gczg.com

金圣才

目　录

第一章　高等数学 ………………………………………………………… (1)
第二章　普通物理 ………………………………………………………… (69)
第三章　普通化学 ………………………………………………………… (90)
第四章　理论力学 ………………………………………………………… (113)
第五章　材料力学 ………………………………………………………… (149)
第六章　流体力学 ………………………………………………………… (190)
第七章　计算机应用基础 ………………………………………………… (210)
第八章　电工电子技术 …………………………………………………… (233)
第九章　工程经济 ………………………………………………………… (257)
第十章　土木工程材料 …………………………………………………… (271)
第十一章　工程测量 ……………………………………………………… (285)
第十二章　职业法规 ……………………………………………………… (297)
第十三章　土木工程施工与管理 ………………………………………… (304)
第十四章　结构力学 ……………………………………………………… (314)
第十五章　结构设计 ……………………………………………………… (332)
第十六章　岩体力学与土力学 …………………………………………… (344)
第十七章　工程地质 ……………………………………………………… (360)
第十八章　岩体工程与基础工程 ………………………………………… (375)

第一章　高等数学

单项选择题(下列选项中，只有一项符合题意)

1.1　空间解析几何

1. 已知$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$均为非零向量，而$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则(　　)。

A. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$　　B. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$　　C. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$　　D. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$

【答案】C

【解析】由$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$及$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$知

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

即$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

2. 设三向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$满足关系式$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$则(　　)。

A. 必有$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$　　B. 必有$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$

C. 当$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$时必有$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$　　D. 必有$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$

【答案】D

【解析】因$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，故$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，即$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$。

3. 向量(　　)是单位向量。

A. $(1, 1, -1)$　　B. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

C. $(-1, 0, 0)$　　D. $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

【答案】C

【解析】单位向量的条件是向量的模为1，用向量模的计算公式

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

分别验证，知C正确。

4. 与向量(1，3，1)和(1，0，2)同时垂直的向量是(　　)。

A. $(3, -1, 0)$　　B. $(6, -1, -3)$

C. $(4, 0, -2)$　　D. $(1, 0, 1)$

【答案】B

【解析】同垂直于向量(1，3，1)和(1，0，2)的向量应为$(1, 3, 1)\times(1, 0, 2)$，即

$$(1, 3, 1)\times(1, 0, 2)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}-1\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}=(6, -1, -3)$$

5. 设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$为非零向量，则与$\boldsymbol{a}$不垂直的向量是(　　)。

A. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$　　B. $\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$

C. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}$

【答案】D

【解析】由两向量垂直的充要条件：两向量的数量积为零，以及由向量的运算法则有

对于 A，$\boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}]=0$；

对于 B，$\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}]=0$；

对于 C，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$；

对于 D，$\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}]=|\boldsymbol{a}|^2\neq0$。

6. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且满足 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=($　　$)$。

A. 0　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}\pi$

【答案】C

【解析】由两向量垂直的充要条件得：

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0\\(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0 & (1)\\7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0 & (2)\end{cases}$$

(1)－(2)得：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{|\boldsymbol{b}|^2}{2}$。

(1)×8＋(2)×15 得：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|^2}{2}$。

由上两式得：$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$。

从而 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{2}}{|\boldsymbol{b}|^2}=\dfrac{1}{2}$。

因此 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，所以选 C。

7. 向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=($　　$)$。

A. $|\boldsymbol{a}|\,\mathbf{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{a}\cdot|\boldsymbol{b}|\,\mathbf{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{b}\cdot|\boldsymbol{a}|\,\mathbf{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$　　D. $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\mathbf{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$

【答案】A

【解析】$\mathbf{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,\mathbf{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$。

8. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=($　　$)$。

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

【答案】A

【解析】由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，得 $\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因此有

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=2\sqrt{2}\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=2$$

9. 设向量 $\boldsymbol{x}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,\ 3,\ -1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,\ -2,\ 3)$，且与 $\boldsymbol{c}=(2,\ -1,\ 1)$ 的数量积为 -6，则向量 $\boldsymbol{x}=($　　$)$。

A. $(-3,\ 3,\ 3)$　　B. $(-3,\ 1,\ 1)$

C. $(0,\ 6,\ 0)$　　D. $(0,\ 3,\ -3)$

【答案】A

【解析】由题意可得，$\boldsymbol{x}\parallel\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，而 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(2,\ 3,\ -1)\times(1,\ -2,\ 3)=(7,\ -7,\ -7)=7(1,\ -1,\ -1)$

所以 $\boldsymbol{x}=(x,\ -x,\ -x)$。再由 $-6=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c}=(x,\ -x,\ -x)\cdot(2,\ -1,\ 1)=2x$ 得 $x=-3$，所以 $\boldsymbol{x}=(-3,\ 3,\ 3)$，故应选 A。

10. 直线 L_1: $\begin{cases}x+2y-z=7\\-2x+y+z=7\end{cases}$ 与 L_2: $\begin{cases}3x+6y-3z=8\\2x-y-z=0\end{cases}$ 之间的关系是(　　)。

A. $L_1\parallel L_2$　　B. L_1，L_2 相交但不垂直

C. $L_1\perp L_2$ 但不相交　　D. L_1，L_2 是异面直线

【答案】A

【解析】由于 $\boldsymbol{l}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & 2 & -1\\-2 & 1 & 1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，

$\boldsymbol{l}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\3 & 6 & -3\\2 & -1 & -1\end{vmatrix}=-9\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-15\boldsymbol{k}$，

因 $\dfrac{3}{-9}=\dfrac{1}{-3}=\dfrac{5}{-15}$，故 $\boldsymbol{l}_1\parallel\boldsymbol{l}_2$，即 $\boldsymbol{L}_1\parallel\boldsymbol{L}_2$ 故选 A。

11. 已知直线方程 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 中所有系数都不等于 0，且 $\dfrac{A_1}{D_1}=\dfrac{A_2}{D_2}$，则该直线(　　)。

A. 平行于 x 轴　B. 与 x 轴相交　C. 通过原点　D. 与 x 轴重合

【答案】B

【解析】因 $\dfrac{A_1}{D_1}=\dfrac{A_2}{D_2}$，故在直线的方程中可消去 x 及 D，故得直线方程为 $\begin{cases}By+Cz=0\\x=0\end{cases}$，它在 yOz 平面上的投影过原点，故直线必与 x 轴相交，选 B。

12. 点 $(1,\ 1,\ 1)$ 到平面 $2x+y+2z+5=0$ 的距离 $d=($　　$)$。

A. $\dfrac{10}{3}$　B. $\dfrac{3}{10}$　C. 3　D. 10

【答案】A

【解析】$d=\dfrac{|2\times1+1+2\times1+5|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{10}{3}$。

13. 已知直线 L_1 过点 $M_1(0,\ 0,\ -1)$ 且平行于 x 轴，L_2 过点 $M_2(0,\ 0,\ 1)$ 且垂直于 xOz 平面，则到两直线等距离点的轨迹方程为(　　)。

A. $x^2+y^2=4z$　　B. $x^2-y^2=2z$

C. $x^2-y^2=z$　　D. $x^2-y^2=4z$

【答案】D

【解析】两直线的方程为

$$L_1:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{0}\quad L_2:\ \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$$

设动点为 $M(x,\ y,\ z)$，则由点到直线的距离的公式知：$d_i=\frac{|\overline{M_iM}\times \boldsymbol{l}_i|}{|\boldsymbol{l}_i|}$，其中 $\boldsymbol{l}_i$ 分别是直线 L_i 的方向向量。

$$d_1=\frac{\sqrt{[-(z+1)]^2+(-y)^2}}{1}\qquad d_2=\frac{\sqrt{[-(z-11)]^2+x^2}}{1}$$

由 $d_1=d_2$ 得 $d_1^2=d_2^2$，故

$$(z+1)^2+y^2=(z-1)^2+x^2$$

即

$$x^2-y^2=4z$$

14\. 螺旋线 p：$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=bt\end{cases}$（$a$，$b$ 为正常数）上任一点处的切线（　　）。

A. 与 z 轴成定角　　B. 与 x 轴成定角

C. 与 yOz 平面成定角　　D. 与 zOx 平面成定角

【答案】A

【解析】设 $M(x,\ y,\ z)$ 为曲线 p 上任一点，则点 M 处的切向量为 $\boldsymbol{l}=(-a\sin t,\ a\cos t,\ b)$，而 z 轴的方向向量为 $\boldsymbol{k}=(0,\ 0,\ 1)$，于是 $\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 的夹角为

$$\theta=\arccos\frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{l}|\ |\boldsymbol{k}|}=\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

故该曲线上任一点处的切线与 z 轴成定角 θ。

15\. 在曲线 $x=t$，$y=-t^2$，$z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线（　　）。

A. 只有 1 条　　B. 只有 2 条　　C. 至少有 3 条　　D. 不存在

【答案】B

【解析】求曲线上的点，使该点处的切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 与平面 $x+2y+z=4$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,\ 2,\ 1)$垂直．曲线在切点处的切向量

$$\boldsymbol{\tau}=(x'(t),\ y'(t),\ z'(t))=(1,\ -2t,\ 3t^2)$$

$$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{\tau}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\tau}=0$$

即 $1-4t+3t^2=0$，

解得 $t=1$，$t=\frac{1}{3}$。（对应于曲线上的点均不在给定的平面上）

因此，只有两条这种切线，应选 B。

16\. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则点 P 的坐标是（　　）。

A. $(1,\ -1,\ 2)$　　B. $(-1,\ 1,\ 2)$

C. $(1,\ 1,\ 2)$　　D. $(-1,\ -1,\ 2)$

【答案】C

【解析】即求曲面 S：$F(x,\ y,\ z)=0$，其中 $F(x,\ y,\ z)=z+x^2+y^2-4$ 上点 P 使 S 在该

点处的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与平面 π：$2x+2y+z-1=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_0=(2,2,1)$ 平行。

S 在 $P(x,y,z)$ 处的法向量 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)=(2x,2y,1)$。$\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{n}_0 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{n}_0$，$\lambda$ 为常数，即 $2x=2\lambda$，$2y=2\lambda$，$1=\lambda$。即 $x=1$，$y=1$，又点 $P(x,y,z)\in S\Rightarrow z=4-x^2-y^2\mid_{(x,y)=(1,1)}=2$，求得 $P(1,1,2)$（P 不在给定的平面上）。因此，应选 C。

17. 设平面 α 平行于两直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{-2}=z$ 及 $2x=y=z$，且与曲面 $z=x^2+y^2+1$ 相切，则 α 的方程为(　　)。

A. $4x+2y-z=0$　　B. $4x-2y+z+3=0$

C. $16x+8y-16z+11=0$　　D. $16x-8y+8z-1=0$

【答案】 C

【解析】 由平面 α 平行于两已知直线，知平面 α 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(2,-2,1)\times(1,2,2)=-3(2,1,-2)$$

设切点为 (x_0,y_0,z_0)，则切点处曲面的法向量为 $(2x_0,2y_0,-1)$，故

$$\frac{2}{2x_0}=\frac{1}{2y_0}=\frac{-2}{-1}$$

由此解得

$$x_0=\frac{1}{2},\ y_0=\frac{1}{4}$$

从而

$$z_0=x_0^2+y_0^2+1=\frac{21}{16}$$

因此 α 的方程为

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(y-\frac{1}{4}\right)-2\left(z-\frac{21}{16}\right)=0$$

即

$$16x+8y-16z+11=0$$

18. 三个平面 $x=cy+bz$，$y=az+cx$，$z=bx+ay$ 过同一直线的充要条件是(　　)。

A. $a+b+c+2abc=0$　　B. $a+b+c+2abc=1$

C. $a^2+b^2+c^2+2abc=0$　　D. $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

【答案】 D

【解析】 由于三个平面过同一直线 $\Leftrightarrow$ 线性齐次方程组 $\begin{cases}x-cy-bz=0\\cx-y+az=0\\bx+ay-z=0\end{cases}$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ 行列式

$$\begin{vmatrix}1&-c&-b\\c&-1&a\\b&a&-1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2abc=1。$$

19. 在平面 $x+y+z-2=0$ 和平面 $x+2y-z-1=0$ 的交线上有一点 M，它与平面 $x+2y+z+1=0$ 和 $x+2y+z-3=0$ 等距离，则 M 点的坐标为(　　)。

A. $(2,0,0)$　　B. $(0,0,-1)$　　C. $(3,-1,0)$　　D. $(0,1,1)$

【答案】 C

【解析】 排除 A：点 $(2,0,0)$ 不在平面 $x+2y-z-1=0$ 上；

排除 B：点 $(0,0,-1)$ 不在平面 $x+y+z-2=0$ 上；

排除 D：点(0，1，1)与两平面不等距离，故选 C。

20. 通过直线$\begin{cases}x=2t-1\\y=3t+2\\z=2t-3\end{cases}$和直线$\begin{cases}x=2t+3\\y=3t-1\\z=2t+1\end{cases}$的平面方程为(　　)。

A. $x-z-2=0$　　B. $x+z=0$

C. $x-2y+z=0$　　D. $x+y+z=1$

【答案】A

【解析】因点$(-1,2,-3)$不在平面$x+z=0$上，故可排除 B；因点$(3,-1,1)$不在$x-2y+z=0$和$x+y+z=1$这两个平面上，故可排除 C、D，选 A。

21. 母线平行于 Ox 轴且通过曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$的柱面方程为(　　)。

A. $3x^2+2z^2=16$　　B. $x^2+2y^2=16$

C. $3y^2-z^2=16$　　D. $3y^2-z=16$

【答案】C

【解析】因柱面的母线平行于 x 轴，故其准线在 yOz 平面上，且为曲线在 yOz 平面上的投影，在方程组$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$中消去 x 得$\begin{cases}3y^2-z^2=16\\x=0\end{cases}$，此即为柱面的准线，故柱面的方程为：$3y^2-z^2=16$。

22. 曲线 L：$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1 & (1)\\x-2z+3=0 & (2)\end{cases}$在 xOy 面上的投影柱面方程是(　　)。

A. $x^2+20y^2-24x-116=0$　　B. $4y^2+4z^2-12z-7=0$

C. $\begin{cases}x^2+20y^2-24x-116=0\\z=0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}4y^2+4z^2-12z-7=0\\x=0\end{cases}$

【答案】A

【解析 1】投影柱面方程是一个三元方程，C、D 表示的是曲线。而 B 中的方程中含 z，不可能是 L 在 xOy 面上的投影柱面方程，因此选 A。

【解析 2】由(2)得$z=\dfrac{x+3}{2}$，代入(1)化简得

$$x^2+20y^2-24x-116=0$$

为 L 在 xOy 面上的投影柱面方程。

23. 方程$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{z^2}{3}=0$是一旋转曲面方程，它的旋转轴是(　　)。

A. x 轴　　B. y 轴　　C. z 轴　　D. 直线 $x=y=z$

【答案】C

【解析】由$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{z^2}{3}$，所以$z=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2}$。故曲面是由直线$z=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}x$或$z=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}y$绕 z 轴旋转而成。

24. 直线 L 为$\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$，平面 π 为 $4x-2y+z-2=0$，则(　　)。

A. L 平行于 π　B. L 在 π 上　C. L 垂直于 π　D. L 与 π 斜交

【答案】C

【解析】直线 L 的方向向量

$$s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{vmatrix}=-7(4i-2j+k)$$

平面 π 的法向量 $n=4i-2j+k$，

所以 $s//n$，即直线 L 垂直于平面 π。

25. 已知两直线 $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-1}$ 和 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{n}=\frac{z-1}{-2}$ 相互平行，则 $n=$(　　)。

A. 2　B. 5　C. -2　D. -4

【答案】D

【解析】两直线平行即两直线的方向向量平行，其对应坐标成比例，即

$$\frac{4}{2}=\frac{n}{-2}=\frac{-2}{-1}$$

由此得：$n=-4$。

26. 设有直线 L_1：$x=-1+t$，$y=5-2t$，$z=-8+t$，L_2：$\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$，则两线的夹角为(　　)。

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{4}$　C. $\frac{\pi}{3}$　D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】C

【解析】两直线的夹角即为两直线的方向向量的夹角，而 L_1 的方向向量为 $s_1=(1,\ -2,\ 1)$，L_2 的方向向量为 $s_2=(1,\ -1,\ 0)\times(0,\ 2,\ 1)=(-1,\ -1,\ 2)$。$s_1$，$s_2$ 夹角 α 的余弦为

$$\cos\alpha=\frac{s_1\cdot s_2}{|s_1|\ |s_2|}=\frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$。

27. 过点$(-1,\ 2,\ 3)$垂直于直线 $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$ 且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线是(　　)。

A. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$　B. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}$

C. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$　D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$

【答案】A

【解析】直线 $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$ 的方向向量为 $s=(4,\ 5,\ 6)$，平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的法向量为 $n=(7,\ 8,\ 9)$。显然 A、B、C 中的直线均过点$(-1,\ 2,\ 3)$。对于 A 中直线的方向向量为 $s_1=(1,\ -2,\ 1)$，有 $s_1\perp s$，$s_1\perp n$，可见 A 中直线与已知直线 $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$ 垂直，

与平面 $7x+8y+9z+10=0$ 平行，故应选 A。

28. 若直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$与$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$相交，则必有(　　)。

A. $\lambda=1$　　B. $\lambda=\frac{3}{2}$　　C. $\lambda=-\frac{4}{5}$　　D. $\lambda=\frac{5}{4}$

【答案】D

【解析】如果两直线相交，则这两条直线的方向向量与这两条直线上两点连线构成的向量应在同一平面上，由此来确定 λ。

点 $A(1,\ -1,\ 1)$，$B(-1,\ 1,\ 0)$ 分别为两条直线上的一点，则$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 2,\ -1)$，两条直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(1,\ 2,\ \lambda)$，$\boldsymbol{s}_2=(1,\ 1,\ 1)$，这三个向量应在同一个平面上，即$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4\lambda+5=0$，解得：$\lambda=\frac{5}{4}$。

29. 设$f(x)$在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则$f(x)$在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是(　　)。

A. $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在　　B. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在　　D. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

【答案】D

【解析】本题可用排除法，也可由直接分析得正确选项。

方法一：

对于 A，令 $t=\frac{1}{h}$，则

$$\lim_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=f'_+(a)$$

这表明右导数$f'_+(a)$存在；

对于 B，例如$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+2h)-f(0+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

但显然$f(x)$在 $x=0$ 处不可导。

对于 C，只需取$f(x)$为偶函数，如$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\frac{1}{h}-\cos\frac{1}{h}}{2h}=0$$

但$f(x)$在 $x=0$ 不连续，当然更不可导。

只有 D 为充分条件，故选 D。

方法二：

由条件 D，

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\xlongequal{-h=t}\lim_{t\to0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}$$

存在，所以由导数的定义，知$f(x)$在$x=a$可导，且上述极限即为$f'(a)$。故选 D。

30. 过点$P(1,0,1)$且与两条直线L_1：$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{0}$和$L_2$：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{1}$都相交的直线的方向向量可取为(　　)。

A. $(-1,1,2)$　　　　B. $(-1,1,-2)$

C. $(1,1,-2)$　　　　D. $(1,1,2)$

【答案】D

【解析】设过点$P(1,0,1)$的直线L分别与直线L_1与L_2交于点A和点B，由L_1和L_2的方程知，存在常数λ使点A的坐标为$(\lambda,\lambda-1,-1)$，存在常数μ使点B的坐标为$(1+\mu,2,3+\mu)$，且$\overrightarrow{PA}/\!/\overrightarrow{PB}$，即：

$$\frac{\lambda-1}{\mu}=\frac{\lambda-1}{2}=\frac{-2}{2+\mu}$$

由此可求得$\lambda=0$，$\mu=2$，即点A为$(0,-1,-1)$，点B为$(3,2,5)$。从而，直线L的方向向量可取任一平行于$\overrightarrow{AB}=(3,3,6)$的非零向量。在该题的四个选项中仅 D 符合要求。

1.2　微分学

1. 设$f(x)=2^x+3^x-2$，则当$x\to0$时(　　)。

A. $f(x)$是x等价无穷小　　　　B. $f(x)$与x是同阶但非等价无穷小

C. $f(x)$是比x高阶的无穷小　　　　D. $f(x)$是比x低阶的无穷小

【答案】B

【解析 1】利用等价无穷小代换与极限四则运算法则求解。

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}\right)$$

由当$x\to0$时，$a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq1)$可知

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln2}{x}=\ln2,\ \lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln3}{x}=\ln3$$

再由极限的四则运算法则，得$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\ln2+\ln3=\ln6$。

根据无穷小的阶的定义，可知 B 正确。

【解析 2】利用洛必达法则求解。

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x\ln2+3^x\ln3}{1}=\ln2+\ln3=\ln6$$

2. 设$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=-1$，当$x\to0$时，$\ln\cos x^2$是比$x^nf(x)$高阶的无穷小，而$x^nf(x)$是比$e^{\sin^2x}-1$高阶的无穷小，则正整数$n$等于(　　)。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】A

【解析】由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=-1$知，当$x\to 0$时，$f(x)\sim -x^2$，于是$x^nf(x)\sim -x^{n+2}$。

又当$x\to 0$时，$\ln\cos x^2=\ln[1+(\cos x^2-1)]\sim\cos x^2-1\sim -\dfrac{1}{2}x^4$。

$$e^{\sin^2x}-1\sim\sin^2x\sim x^2。$$

再根据题设有$2<n+2<4$，可见$n=1$。

3. 二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数$f'_x(x_0,y_0)$、$f'_y(x_0,y_0)$存在是$f(x,y)$在该点连续的(　　)。

A. 充分条件而非必要条件　　B. 必要条件而非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分条件又非必要条件

【答案】D

【解析】用反例进行说明：例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases},\ g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

可以验证：

$f(x,y)$在点$(0,0)$连续，但$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$均不存在；

$g(x,y)$在点$(0,0)$处$g'_x(0,0)$，$g'_y(0,0)$均存在，但不连续。

因此是既非充分条件又非必要条件，故应选D。

4. 下列函数中，在点(0，0)处连续的函数是(　　)。

A. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$

B. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2-xy}{x^2+y^2+1}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

C. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

D. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x}, & (x,y)\neq(0,0),\ x\neq 0\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

【答案】D

【解析】选项A不对：因A中函数在点(0，0)处没定义，故函数在点(0，0)处不连续。

选项B不对：因$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=2\neq f(0,0)=0$。

选项C不对：令$y=kx(k\neq -1)$，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{(x,kx)\to(0,0)}\frac{x-kx}{x+kx}=\frac{1-k}{1+k}$$

故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x-y}{x+y}$不存在。

选项D正确：当$x\neq 0$，$\left|\dfrac{\sin(xy)}{x}-0\right|\leqslant\dfrac{|xy|}{|x|}=|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$，于是$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，当

$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$，$x\neq0$，有 $\left|\dfrac{\sin(xy)}{x}-0\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$。

因此，D 中函数在点(0，0)处连续。

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内连续，在 $x=x_0$ 处可导，则函数 $f(x)|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处(　　)。

A. 可导，且导数为 $2f(x_0)f'(x_0)$　　B. 可导，且导数为 $2f(x_0)|f'(x_0)|$

C. 可导，且导数为 $2|f(x_0)|f'(x_0)$　　D. 不可导

【答案】C

【解析】令 $g(x)=f(x)|f(x)|$。

当 $f(x_0)=0$ 时，$g'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)|f(x)|}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}|f(x)|=0$；

当 $f(x_0)>0$ 时，因为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内连续，所以，存在 x_0 的一个邻域，当 x 在该邻域内时，$f(x)>0$，有

$$g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0}=2f(x_0)f'(x_0)$$

同理可得，当 $f(x_0)<0$ 时，$g'(x_0)=-\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0}=-2f(x_0)f'(x_0)$，

所以，函数 $f(x)|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处可导，且导数为 $2|f(x_0)|f'(x_0)$。

6. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{\sin x}, & x\neq0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$ 则(　　)。

A. $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$ 且 $g'(0)$ 不存在　　B. $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$ 且 $g'(0)=0$

C. $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$ 且 $g'(0)=1$　　D. $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$ 且 $g'(0)=2$

【答案】D

【解析】由题设，知 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=2$，即有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{\sin x}=f(0)=2$。于是

$$\lim_{x\to0}g(x)=g(0)=0,\quad g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=2$$

7. 设函数 $f(t)$ 连续，$t\in[-a,a]$，$f(t)>0$，且 $g(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)\,dt$，则在 $[-a,a]$ 内必有(　　)。

A. $g'(x)=C$(常数)　　B. $g'(x)$ 是单调增加的

C. $g'(x)$ 是单调减少的　　D. $g'(x)$ 是函数，但不单调

【答案】B

【解析】当 $-a<x<a$ 时，有

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_{-a}^{x}(x-t)f(t)\,dt-\int_{x}^{a}(x-t)f(t)\,dt\\&=x\int_{-a}^{x}f(t)\,dt-\int_{-a}^{x}tf(t)\,dt-x\int_{x}^{a}f(t)\,dt+\int_{x}^{a}tf(t)\,dt\end{aligned}$$

于是　$g'(x)=\int_{-a}^{x}f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)-\int_{x}^{a}f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)$

$$= \int_{-a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t 。$$

又 $g''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x) > 0$，

故 $g'(x)$ 在 $(-a, a)$ 内是单调增加的。

8. 设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导，则(　　)。

A. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

B. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

C. 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 0$

D. 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 0$

【答案】B

【解析】本题考查函数的有界性与函数的极限、导函数的极限之间的关系，可通过反例用排除法找到答案，也可用中值定理直接证明。

方法一：

设 $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界，由于

$$f'(x) = \frac{2x^2\cos x^2 - \sin x^2}{x^2} = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$$

可见 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导。但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 1 \neq 0$，排除 A、D。

又设 $f(x) = \sin x$，则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导，$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$，

但 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \cos x = 1 \neq 0$，进一步排除 C。故应选 B。

方法二：

直接证明 B 正确。用反证法，由题设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在，设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = A \neq 0$，不妨设 $A > 0$，则对于 $\varepsilon = \dfrac{A}{2} > 0$，存在 $X > 0$，当 $x > X$ 时，有

$$|f'(x) - A| < \varepsilon = \frac{A}{2}$$

即

$$\frac{A}{2} = A - \frac{A}{2} < f'(x) < A + \frac{A}{2}$$

可见 $f'(x) > \dfrac{A}{2}$。在区间 $[X, x]$ 上应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x) = f(X) + f'(\xi)(x - X) > f(X) + \frac{A}{2}(x - X)$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$，与题设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界矛盾，故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$。

【评注】一般来说，涉及到函数 $f(x)$ 与其导数 $f'(x)$ 的关系时，可联想到用拉格朗日中值定理或微积分基本公式 $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ 进行分析讨论。

9. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ x^2 g(x), & x \leqslant 0 \end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处(　　)。

A. 极限不存在　　　　　　　　　　B. 极限存在，但不连续