



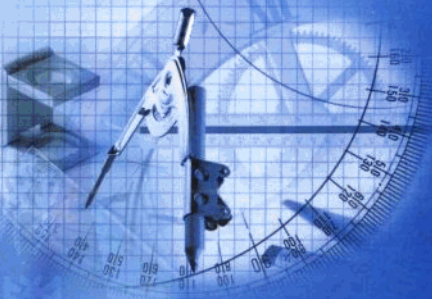
高等院校经济类系列教材

经济数学基础

微积分

王青 主编

上



辽宁大学出版社

PDG

高等院校经济类系列教材

经济数学基础（上）
——微积分

王 青 主编

辽宁大学出版社

©王青 王宏 辛荣环 2003

图书在版编目 (CIP) 数据

经济数学基础/王青、王宏、辛荣环主编. —沈阳: 辽宁大学出版社, 2003. 7

ISBN 7-5610-3560-8

I. 经… II. ①王…②王…③辛 III. 经济数学—高等学校—教材 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 02977 号

责任编辑: 祝恩民

责任校对: 单全宁

封面设计: 刘桂湘

责任校对: 李佳城

辽宁大学出版社出版

地址: 沈阳市皇姑区崇山中路 66 号 邮编: 110036

联系电话: 024-86853301 <http://www.lnupress.com.cn>

Email: mailer@lnupress.com.cn

印刷厂印刷 辽宁大学出版社发行

幅面尺寸: 140mm×203mm

印张: 34

字数: 800 千字

2003 年 8 月第 2 版

2003 年 8 月第 1 次印刷

印数: 3001~6 000

(上、中、下) 全套定价: 60.00 元

目 录

第一章 函数	1
§ 1.1 变量	1
§ 1.2 函数	4
§ 1.3 函数的几种简单性质	9
§ 1.4 反函数 复合函数	14
§ 1.5 初等函数	17
§ 1.6 经济中常用的函数	23
§ 1.7 建立函数关系的例题	27
习题一	29
第二章 极限与连续	38
§ 2.1 极限概念	38
§ 2.2 关于极限性质的几个定理	53
§ 2.3 无穷小量与无穷大量	55
§ 2.4 极限的四则运算	59
§ 2.5 极限存在准则 两个重要的极限	65
§ 2.6 函数的连续性	73
习题二	83
第三章 导数与微分	94
§ 3.1 导数的概念	94
§ 3.2 导数的基本公式与求导法则	101
§ 3.3 高阶导数	118
§ 3.4 微分	120
§ 3.5 边际函数与函数的弹性	126
习题三	132

第四章 中值定理及导数应用	141
§ 4. 1 中值定理.....	141
§ 4. 2 未定式的定值法.....	150
§ 4. 3 函数的增减性.....	158
§ 4. 4 函数的极值.....	161
§ 4. 5 最大值与最小值 极值的应用.....	166
§ 4. 6 曲线的凹向及拐点.....	171
§ 4. 7 函数图形的作法.....	173
习题四.....	178
第五章 不定积分	188
§ 5. 1 不定积分的概念.....	188
§ 5. 2 不定积分的性质及基本积分公式.....	192
§ 5. 3 换元积分法.....	197
§ 5. 4 分部积分法.....	214
习题五.....	221
第六章 定积分	231
§ 6. 1 定积分的概念.....	231
§ 6. 2 定积分的性质.....	235
§ 6. 3 微积分基本定理.....	239
§ 6. 4 定积分的换元法与分部积分法.....	245
§ 6. 5 定积分的应用.....	253
§ 6. 6 广义积分与 Γ 函数.....	268
习题六.....	277
第七章 多元函数	292
§ 7. 1 二元函数的概念.....	292
§ 7. 2 二元函数的极限与连续.....	304
§ 7. 3 偏导数和高阶偏导数.....	307
§ 7. 4 全微分.....	311

§ 7. 5	复合函数的微分法	316
§ 7. 6	隐函数及其微分法	323
§ 7. 7	偏导数的应用	326
§ 7. 8	二重积分简介	338
	习题七	362
第八章	无穷级数	376
§ 8. 1	数项级数的概念	376
§ 8. 2	无穷级数的基本性质	381
§ 8. 3	正项级数	385
§ 8. 4	任意项级数 绝对收敛	396
§ 8. 5	幂级数	403
§ 8. 6	泰勒公式与泰勒级数	418
§ 8. 7	某些初等函数的幂级数展开式	423
§ 8. 8	幂级数的应用举例	433
	习题八	441
第九章	微分方程初步	452
§ 9. 1	微分方程的一般概念	452
§ 9. 2	一阶微分方程	454
§ 9. 3	可降阶的高阶微分方程	467
§ 9. 4	二阶常系数线性微分方程	470
	习题九	488
第十章	差分方程初步	497
§ 10. 1	差分与差分方程的一般概念	497
§ 10. 2	一阶常系数线性差分方程	500
§ 10. 3	二阶常系数线性差分方程	507
	习题十	513
	习题参考答案	516
	后 记	558

第一章 函 数

数学是一门研究数量关系与空间形式的科学,函数关系是满足一定条件的一种数量关系,函数是微积分研究的对象,是最重要的基本概念之一。尽管在以前已对它有了一定的认识,但认真学习本章,加深对函数概念及其性质的理解和掌握,为学习本课程打下良好基础仍是不容忽视的。

§ 1.1 变 量

一、变 量

当我们观察和研究某种自然现象和社会现象时,往往会遇到各种不同的量,这些量一般可分为两种:一种是常量,即在某一过程中,数值保持不变的量;另一种是变量,即在某一过程中,数值不断变化的量。例如自由落体的下降速度和与地面的距离就不断改变,而落体的质量在这一过程中则保持不变。再如在生产过程中,产品的产量及原材料的消耗量等都在变化,而机床数及生产工人数目就保持不变。

一个量是常量还是变量,要在具体问题中作具体分析。

以后,我们用字母 x, y, z, \dots 等表示变量,用字母 a, b, c, \dots 等表示常量。

变量一般都具有一定的变化范围,因而变量的取值也往往不同,有些变量的取值可能是离散的,如产品的件数、人数等;有些变

量的取值可能是连续的,如时间、温度等。

初等数学主要研究的是常量,而作为高等数学的重要部分——微积分则主要研究的是变量,它是以极限为基本工具分析研究变量和变量间的依赖关系即函数关系,以及通过这些关系所表现出来的重要性质。学好微积分,掌握其基本思想和方法,对于研究解决经济现象中的一些具体问题是十分重要的。

二、区 间

在一些实际问题中,有些变量的取值常常是一些区间,下面谈谈区间的分类和表示法:

设 a, b 为实数,且 $a < b$

1. 开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$, 图 1-1

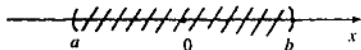


图 1-1

2. 闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$, 图 1-2

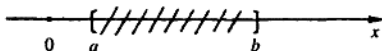


图 1-2

3. 半开区间 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$, 图 1-3

$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$, 图 1-4

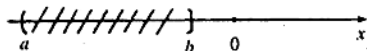


图 1-3

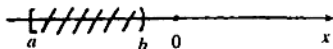


图 1-4

以上三类区间称为有限区间,有限区间右端点 b 与左端点 a 的

差 $b-a$, 称为区间的长。

引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则还有下面几类无限区间:

$$4. (a, +\infty) = \{x \mid a < x\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$$

$$5. (-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$$

$$6. (-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$$

即全体实数的集合。

注意: “ $-\infty$ ” 和 “ $+\infty$ ” 是两个记号而不是数。

三、邻 域

为描述一个变量 x 在一个已知点 x_0 附近变化, 我们给出邻域这一术语:

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域。 x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径。图 1-5

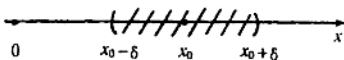


图 1-5

$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ 称为以 x_0 为中心, δ 为半径的空心邻域。图 1-6

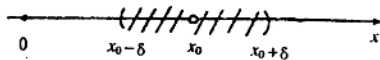


图 1-6

§ 1.2 函 数

一切事物都是在不断地运动变化着,在同一个变化过程中所遇到的各种变量,都不是彼此独立地在那里变化的,一般说来,它们彼此之间总有或多或少的关系,因而其中一个的变化就常常引起另外那些也跟随它有相应的变化。例如,圆半径变大时,其面积也同时变大;增加田里的施肥量,庄稼的收成也随之增多等等。但是,从这两个例子中已经可以看出,在某一个现象里所碰到的各个量之间的关系,就其相互间联系的明确性来说,可以是很不相同的。在第一个例子里,这种联系最明确:只要知道了圆半径 r ,就可以惟一地而且绝对精确地用公式 $s = \pi r^2$ 来确定它的面积。在第二个例子里,虽然施肥的量无疑会影响到收成的多少,但即使精确地知道了田地里面的施肥量,也还是不能完全精确地预料到收成的多少。这种联系就很不精确。变量之间的那种精确的关系,即只要知道了一个变量的值之后,我们就有可能惟一地并且完全精确地决定另外一个变量的值的那种关系的数学表现,就是函数关系的概念。这是本课程中继变量的概念之后的第二个基本概念。

一、函数的定义

在中学里所学的函数定义为:

设在某个变化过程中,有两个变量 x 与 y ,如果对于 x 取值范围内的每一个数值,都有一个确定的 y 值与之对应,则称 y 是 x 的函数。

为了突出这里是集合之间的对应关系,给出如下定义。

定义 1.1 设 D 是一个非空实数集合, f 是一个对应规则,在此规则下,对每一个 $x \in D$,都有惟一确定的实数 y 与之对应,则称此对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系,称变量 y 是变量 x

的函数。记作 $y = f(x), x \in D$ 。

这里称 x 为自变量, 称 y 为因变量。

集合 D 称为该函数的定义域, 可记作 $D(f)$ 。

对于 $x_0 \in D(f)$ 所对应的 y 值记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$, 称为当 $x = x_0$ 时函数 $f(x)$ 的函数值。

全体函数值的集合 $\{y | y = f(x), x \in D(f)\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域, 记作 Z 或 $Z(f)$ 。

在平面直角坐标系中, 取自变量在 x 轴上变化, 因变量在 y 轴上变化, 则平面点集

$$\{(x, y) | y = f(x), x \in D(f)\}$$

便是函数“ $y = f(x), x \in D$ ”的图形。

学习函数概念, 要注意以下几点:

(1) 函数概念反映了自变量 x 与因变量 y 之间的依赖关系, 即集合 D 到集合 Z 之间的对应规律。确定函数的两个要素是定义域和对应规则。如果两个函数的定义域和对应规则都相同, 那么这两个函数是同一函数; 如果两个要素中至少有一个不相同, 那么就确定两个不同的函数。

例 1 $y = x, x \in (-\infty, +\infty)$

与 $y = \frac{x^2}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

是两个不同的函数。这是由于它们的定义域不同。

例 2 $y = x, x \in (-\infty, +\infty)$

与 $y = \sqrt{x^2}, x \in (-\infty, +\infty)$

虽然定义域相同, 但当 $x < 0$ 时, $y = x < 0, y = \sqrt{x^2} > 0$, 可见它们的对应规则不同, 值域不同, 这是两个不同的函数。

(2) 函数记号 $f(x)$ 中的 f 表示 x 与 y 的对应规则, 其意义是对于 D 上的一个确定值 x 通过规则 f 确定出 y 的对应值。也可以用 $g, F, h, \varphi \dots$ 等字母来表示, 相应的函数就记作 $g(x), F(x),$

$h(x), \varphi(x), \dots$ 等, 函数关系也可记作 $y = y(x)$, 等号左边的 y 表示因变量, 等号右边的 y 表示对应规则。

(3) 函数定义中要求对于每一个 $x \in D$, 都有惟一确定的 y 值与之对应, 那么 $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, 对于每一个 $x \in (-1, 1)$, 都有两个 y 值与之对应, 不符合函数的 1.1 定义。像 $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ 这样的对于非空集合 D 中的 x 值有多个 y 值与之对应的情形, 也可以定义为一个函数, 称之为多值函数, 相应地把定义 1.1 中所指的情形称为单值函数。本课程中提到的函数除特别说明外都是指单值函数。

二、函数表示法

1. 三种表示法

函数的表示法常见的有公式法、表格法及图形法。由于在中学数学中都已介绍过, 这里就不再重复了。要注意的是, 并不是给出一个公式都能确定一个函数。例如 $y = \arcsin(2+x^2)$, 虽然给出了一个公式, 但对于任何实数 x 都不可能确定出与之对应的 y 值, 而函数的定义中要求定义域 D 是非空的实数集合, 故它不能确定一个函数。

2. 分段函数

有些函数, 对于其定义域内自变量 x 的不同值, 需要用两个或两个以上的式子来表示其对应规则, 这类函数称为“分段函数”。例如

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{符号函数 } y = \operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

都是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的分段函数, 其图形分别如图 1-7 和

图 1-8 所示

注意：分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数。用这种方法表示的函数在实际问题中也经常使用。

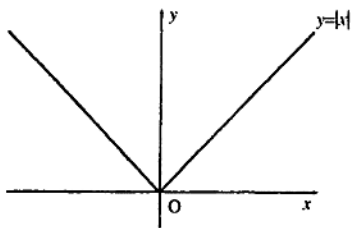


图 1-7

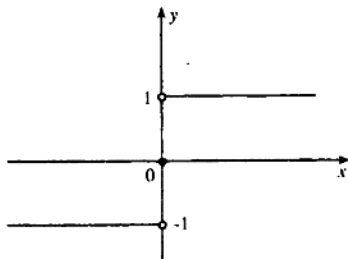


图 1-8

3. 隐函数

对于给定的一个二元方程 $F(x, y) = 0$ ，只要给定 x 的值，就能确定出 y 值与之对应，从而确定一个或几个（自变量 x 的）函数 y 。例如方程 $xy - 2x + 3y - 1 = 0$ 就确定一个函数 $y = \frac{2x+1}{x+3}$ ，而方程 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 则可以确定两个函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 与 $y = -\sqrt{1-x^2}$ 。在很多情形，由给定方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数不可能像所举的两个简单例子那样把 y 解出来。如 $xy - e^y = 0, xe^y +$

$\sin xy = 0$ 等。因此,不管表达式如何,只要在 x 的取值范围内,恒等地满足方程 $F(x, y) = 0$ 的每一个函数 $y = f(x)$ 都称为是由这个方程所确定的隐函数,而把以前提到过的函数表达形式称为显函数。

三、函数定义域的求法

按照定义,所谓给定一个函数,就是给出它的定义域和对应规则,缺一不可。但在许多场合给出函数时往往只给出对应规则而未指出它的定义域。这时,我们就约定它的定义域是指能使对应规则有意义的所有 x 构成的集合。这样也就产生了求该函数定义域的问题。

例 3 确定函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域。

解:要使 $\sqrt{1-x^2}$ 有意义,必须 $1-x^2 \geq 0$, 即 $-1 \leq x \leq 1$ 。因此所求定义域为 $[-1, 1]$ 。

例 4 确定函数 $y = \frac{1}{\lg(2x-1)}$ 的定义域。

解:要使 $\frac{1}{\lg(2x-1)}$ 有意义,必须 $\lg(2x-1)$ 有意义且 $\lg(2x-1) \neq 0$, 这就要求 $2x-1 > 0$ 且 $2x-1 \neq 1$ 即 $x > \frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$ 。因此该函数的定义域是 $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$ 。

例 5 确定函数 $y = \arcsin \frac{x-1}{5} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域。

解:由 $|\frac{x-1}{5}| \leq 1$ 且 $x^2 < 25$

即 $|x-1| \leq 5$ 且 $|x| < 5$

得 $-4 \leq x \leq 6$ 且 $-5 < x < 5$

故所求定义域是 $[-4, 5)$ 。

例6 确定函数 $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & |x| < 1 \\ x^2 - 1 & 1 < |x| \leq 2 \end{cases}$

的定义域。

解:由于此函数可改写成下列形式

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -2 \leq x < -1 \\ \sqrt{1-x^2} & -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

故所求函数的定义域是 $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$ 。

例7 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & 2 < x \leq 4 \end{cases}$, 求 $f(x-1)$

$$\text{解: } f(x-1) = \begin{cases} (x-1)+2 & 0 \leq x-1 \leq 2 \\ (x-1)^2 & 2 < x-1 \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{即 } f(x-1) = \begin{cases} x+1 & 1 \leq x \leq 3 \\ (x-1)^2 & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

例8 已知 $f(e^x - 1) = x^2 + 1$, 求 $f(x)$ 的定义域

解:求函数定义域时,一般先求出 $f(x)$ 的解析式。为此,令 $t = e^x - 1$ 则 $x = \ln(1+t)$ 可得

$$f(x) = \ln^2(x+1) + 1, \text{ 于是}$$

$f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$ 。

§ 1.3 函数的几种简单性质

对于给定的函数要研究它具有的特性,本课程要逐步揭示函数的性态。在中学数学中,已用初等方法对函数的几种简单性质进行过研究,即如下四种性质。

一、函数的奇偶性

定义 1.2 给定函数 $y = f(x), x \in D(f)$

如果对所有的 $x \in D(f)$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数;

如果对所有的 $x \in D(f)$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数;

由定义知, 一个函数 $f(x)$ 能成为奇函数或偶函数的必要条件是它的定义域为关于原点对称的集合。

奇、偶函数的图形具有如下特征:

对于偶函数 $f(x)$, 由于 $f(-x) = f(x)$, 则点 $P(x, f(x))$ 与点 $P'(-x, f(x))$ 都在图形上, 而这样的点 P 与 P' 对称于 y 轴, 所以偶函数的图形关于 y 轴对称, 如图 1-9

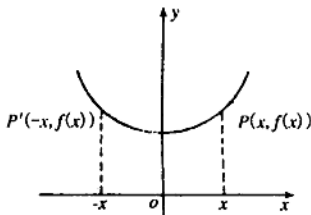


图 1-9

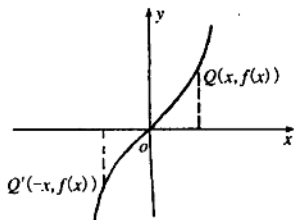


图 1-10

对于奇函数 $f(x)$, 由于 $f(-x) = -f(x)$, 则点 $Q(x, f(x))$ 与 $Q'(-x, -f(x))$ 都在图形上且对称于原点, 所以奇函数的图形关于原点对称。如图 1-10

例 1 判断 $y = \cos x(e^{-x} + e^x)$ 的奇偶性。

解: 因为 $y = \cos x(e^{-x} + e^x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 关于原点对称的, 并且

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x)(e^x + e^{-x}) \\ &= \cos x(e^{-x} + e^x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

所以该函数为偶函数。

例 2 判断 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性。

解: 因为 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 关于原点对称的, 并且

$$\begin{aligned} & f(-x) + f(x) \\ &= \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\ &= \ln(1+x^2-x^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{即 } f(-x) = -f(x)$$

所以该函数为奇函数。

例 3 判断 $y = x^3 + 4$ 的奇偶性。

解: $y = x^3 + 4$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 关于原点对称的, 但是

$$f(-x) = (-x)^3 + 4 = -x^3 + 4$$

$$f(-x) \neq x^3 + 4 = f(x)$$

$$f(-x) \neq -x^3 - 4 = -f(x)$$

因此 $y = x^3 + 4$ 既非奇函数也非偶函数。

例 4 判断 $y = x^2, x \in [-1, 4]$ 的奇偶性。

解: 由于函数 $y = x^2$ 的定义域 $[-1, 4]$ 关于原点对称, 因此它是非奇、非偶的函数。

二、函数的周期性

定义 1.3 给定函数 $y = f(x), x \in D$, 如果存在非零常数 a , 使得 $f(x) = f(x+a)$ 恒成立, 则称此函数为周期函数。所有这些常数中的最小正数称为此函数的周期。

例如 $y = \sin x, y = \cos x$ 是周期函数, 周期皆为 2π 。 $y = \tan x, y = \cot x$ 也是周期函数, 周期皆为 π 。

由定义知, 一个函数能成为周期函数的必要条件是它的定义域为在原点两侧都能无限延伸的集合。另外, 并不是周期函数都有周期, 例如 $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, 对于任意实数 a 都有 $f(x+a)$