

“十一五”国家重点图书 计算机科学与技术学科前沿丛书
计算机科学与技术学科研究生系列教材（中文版）

统计与决策 常用算法及其实现

宁正元 王李进 编著



清华大学出版社

“十一五”国家重点图书 计算机科学与技术学科

0212.5

2

计算机科学与技术学科研究生系列教材

0212.5
2

统计与决策 常用算法及其实现

宁正元 王李进 编著



清华大学出版社

北京

内 容 简 介

本书以算法原理及其实现步骤为主线,以实际应用为副线,介绍分布检验、均值向量与协方差阵的假设检验、方差分析、回归分析、判别分析、聚类分析、多因子分析、线性规划与整数规划、动态规划、不确定型决策和风险型决策等方面的内容。本书给出了每种算法的编程方法和 Delphi 源代码,还给出了农业、林业等领域的典型实例及程序操作方法。所有的程序均在 Windows XP 和 Delphi 6.0 环境下调试通过。

本书可作为高等学校相关课程的教材或教学参考书,也可作为农业、林业等领域和从事统计与决策的其他领域的工程技术人员的参考用书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

统计与决策常用算法及其实现/宁正元,王李进编著. —北京:清华大学出版社,2009.1
(计算机科学与技术学科研究生系列教材(中文版))

ISBN 978-7-302-18101-9

I. 统… II. ①宁… ②王… III. 算法理论—研究生—教材 IV. TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 101561 号

责任编辑:袁勤勇 赵晓宁

责任校对:李建庄

责任印制:孟凡玉

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京鑫海金澳胶印有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×260 印 张:23

字 数:555 千字

版 次:2009 年 1 月第 1 版

印 次:2009 年 1 月第 1 次印刷

印 数:1~3000

定 价:39.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。
联系电话:010-62770177 转 3103 产品编号:029941-01

序

未来的社会是信息化的社会,计算机科学与技术在其中占据了最重要的地位,这对高素质创新型计算机人才的培养提出了迫切的要求。计算机科学与技术已经成为一门基础技术学科,理论性和技术性都很强。与传统的数学、物理和化学等基础学科相比,该学科的教育工作者既要培养学科理论研究和基本系统的开发人才,还要培养应用系统开发人才,甚至是应用人才。从层次上来讲,则需要培养系统的设计、实现、使用与维护等各个层次的人才。这就要求我国的计算机教育按照定位的需要,从知识、能力、素质三个方面进行人才培养。

硕士研究生的教育须突出“研究”,要加强理论基础的教育和科研能力的训练,使学生能够站在一定的高度去分析研究问题、解决问题。硕士研究生要通过课程的学习,进一步提高理论水平,为今后的研究和发展打下坚实的基础;通过相应的研究及学位论文撰写工作来接受全面的科研训练,了解科学研究的艰辛和科研工作者的奉献精神,培养良好的科研作风,锻炼攻关能力,养成协作精神。

高素质创新型计算机人才应具有较强的实践能力,教学与科研相结合是培养实践能力的有效途径。高水平人才的培养是通过被培养者的高水平学术成果来反映的,而高水平的学术成果主要来源于大量高水平的科研。高水平的科研还为教学活动提供了最先进的高新技术平台和创造性的工作环境,使学生得以接触最先进的计算机理论、技术和环境。高水平的科研也为高水平人才的素质教育提供了良好的物质基础。

为提高高等院校的教学质量,教育部最近实施了精品课程建设工程。由于教材是提高教学质量的关键,必须加快教材建设的步伐。为适应学科的快速发展和培养方案的需要,要采取多种措施鼓励从事前沿研究的学者参与教材的编写和更新,在教材中反映学科前沿的研究成果与发展趋势,以高水平的科研促进教材建设。同时应适当引进国外先进的原版教材,确保所有教学环节充分反映计算机学科与产业的前沿研究水平,并与未来的发展趋势相协调。

中国计算机学会教育专业委员会在清华大学出版社的大力支持下,进行了计算机科学与技术学科硕士研究生培养的系统研究。在此基础上组织来自多所全国重点大学的计算机专家和教授们编写和出版了本系列教材。作者们以自己多年来丰富的教学和科研经验为基础,认真研究和结合我国计算机科学与技术学科硕士研究生教育的特点,力图使本系列教材对我国计算机科学与技术学科硕士研究生的教学方法和教学内容的改革起引导作用。本系列教材的系统性和理论性强,学术水平高,反映科技新发展,具有合适的深度和广度。同时本系列教材两种语种(中文、英文)并存,三种版权(本版、外版、合作出版)形式并存,这在系列教材的出版上走出了一条新路。

相信本系列教材的出版,能够对提高我国计算机硕士研究生教材的整体水平,进而对我国大学的计算机科学与技术硕士研究生教育以及培养高素质创新型计算机人才产生积极的促进作用。

陈永旺

前言

在科学研究、生产实践、社会调查、经济分析等活动中,时时刻刻都会遇到各种类型的数据,数据处理便成了日常工作中不可或缺的重要环节。在数据处理中,统计分析是基础性工作,而决策分析是具有效用性的工作。

计算机的诞生为数据处理的准确性提供了条件,软件开发技术的发展为数据处理的方便性、可操作性提供了保证。本书的宗旨是利用先进的软件开发技术,为统计决策分析中常用的算法,构建方便用户使用的、准确性高的程序模块,以便使专业技术人员从繁重的计算工作中解放出来。

本书的总体编写思路为说清算法的理论和方法、详细介绍算法实现流程,并给出实例应用操作及源码,使读者易看懂、能动手,会应用。基于这一编写思路,本书以算法原理和实现步骤为主线,以实际应用为副线,介绍了分布检验、均值向量与协方差阵的假设检验、方差分析、回归分析、判别分析、聚类分析、多因子分析、线性规划与整数规划、动态规划、不确定型决策和风险型决策等方面的内容。本书给出了每种算法的编程方法和 Delphi 源代码,还给出了农业、林业等领域的典型实例及程序操作方法。所有的程序均在 Windows XP 和 Delphi 6.0 环境下调试通过。

本书内容共 10 章。第 1 章介绍基于卡平方的分布检验。第 2 章针对总体推断中涉及最基本有关分布特征指标的推断,介绍均值向量和协方差的假设检验。第 3 章在介绍方差分析步骤的基础上,重点讲解单因素等次方差分析、单因素不等次方差分析、无交互作用的双因素方差分析、有交互作用的双因素方差分析。第 4 章首先介绍线性回归分析,接着介绍非线性回归分析,最后介绍可化为线性的曲线回归分析。第 5 章介绍距离判别分析、贝叶斯判别分析、费歇判别分析和逐步判别分析。第 6 章根据聚类的方法,介绍在目前实际应用中使用的最多的系统聚类法,同时也介绍了动态聚类、模糊聚类及有序样品聚类。第 7 章主要安排主成分分析、因子分析和对应分析。第 8 章和第 9 章介绍运筹学中的线性规划、整数规划和动态规划相关内容。第 10 章根据决策目标分别介绍单目标风险型决策、单目标不确定型决策、多目标风险型决策和多目标不确定型决策。

本书由宁正元和王李进共同编著,其中第 1、2、3、9、10 章由宁正元执笔,第 4~8 章由王李进执笔。胡欣欣承担了部分文字录入,刘庆连、赵艳萍、陈桢、郑鹏、赖晓燕、王霞等承担了部分算法的上机调试,福建农林大学森林经理学博士生导师陈平留教授及郑德祥博士为本书的编写提出了宝贵的意见,清华大学出版社对本书的出版给予了极大的支持和鼓励,作者在此一并表示真诚的感谢。

鉴于时间仓促和作者水平所限,书中一定还存在着疏漏之处,殷切期待广大读者及同仁对本书的批评与建议,我们将不胜感激。

编 者

2008 年 11 月

目 录

第 1 章 分布的卡平方检验	1
1.1 正态分布检验	1
1.1.1 程序编制原理	1
1.1.2 程序流程图	3
1.1.3 程序应用操作	3
1.1.4 部分程序源代码	4
1.2 韦布分布	5
1.2.1 程序编制原理	5
1.2.2 程序流程图	6
1.2.3 程序应用操作	6
1.2.4 部分程序源代码	7
1.3 对数正态分布	7
1.3.1 程序编制原理	7
1.3.2 程序流程图	8
1.3.3 程序应用操作	8
1.3.4 部分程序源代码	9
1.4 伽玛分布	10
1.4.1 程序编制原理	10
1.4.2 程序流程图	11
1.4.3 程序应用操作	11
1.4.4 部分程序源代码	12
1.5 贝塔分布	12
1.5.1 程序编制原理	13
1.5.2 程序流程图	13
1.5.3 程序应用操作	14
1.5.4 部分程序源代码	14
1.6 泊松分布	15
1.6.1 程序编制原理	15
1.6.2 程序流程图	16
1.6.3 程序应用操作	16

1.6.4	部分程序源代码	17
第2章	均值向量与协方差阵的假设检验	36
2.1	均值向量 $\mu = \mu_0$ 的假设检验	36
2.1.1	程序编制原理	36
2.1.2	程序流程图	37
2.1.3	程序应用操作	37
2.1.4	部分程序源代码	39
2.2	均值向量 $\mu_1 = \mu_2$ 的假设检验	52
2.2.1	程序编制原理	52
2.2.2	程序流程图	55
2.2.3	程序应用操作	55
2.2.4	部分程序源代码	58
2.3	协方差阵与均值向量的检验	65
2.3.1	程序编制原理	65
2.3.2	程序流程图	69
2.3.3	程序应用操作	69
2.3.4	部分程序源代码	73
第3章	方差分析	87
3.1	单因素等次方差分析	87
3.1.1	程序编制原理	87
3.1.2	程序流程图	88
3.1.3	程序应用操作	88
3.1.4	部分程序源代码	89
3.2	单因素不等次方差分析	95
3.2.1	程序编制原理	95
3.2.2	程序流程图	95
3.2.3	程序应用操作	95
3.2.4	部分程序源代码	96
3.3	无交互作用的双因素方差分析	97
3.3.1	程序编制原理	97
3.3.2	程序流程图	98
3.3.3	程序应用操作	98
3.3.4	部分程序源代码	99
3.4	有交互作用的双因素方差分析	100
3.4.1	程序编制原理	100
3.4.2	程序流程图	101
3.4.3	程序应用操作	102

3.4.4	部分程序源代码	103
第4章	回归分析	106
4.1	一元线性回归	106
4.1.1	程序编制原理	107
4.1.2	程序流程图	107
4.1.3	程序应用操作	108
4.1.4	部分程序源代码	108
4.2	一对多线性回归	109
4.2.1	程序编制原理	110
4.2.2	程序流程图	111
4.2.3	程序应用操作	111
4.2.4	部分程序源代码	111
4.3	多对多线性回归	116
4.3.1	程序编制原理	116
4.3.2	程序流程图	117
4.3.3	程序应用操作	117
4.3.4	部分程序源代码	118
4.4	多项式回归	122
4.4.1	程序编制原理	122
4.4.2	程序流程图	122
4.4.3	程序应用操作	122
4.4.4	部分程序源代码	123
4.5	逐步回归	125
4.5.1	程序编制原理	125
4.5.2	程序流程图	126
4.5.3	程序应用操作	127
4.5.4	部分程序源代码	128
4.6	双重筛选逐步回归	135
4.6.1	程序编制原理	135
4.6.2	程序流程图	136
4.6.3	程序应用操作	137
4.6.4	部分程序源代码	138
4.7	可化为线性回归的曲线回归	150
4.7.1	指数回归	150
4.7.2	一元幂曲线	153
4.7.3	二元幂曲线	156
4.7.4	单分子生长曲线	160
4.7.5	修正指数曲线	163

4.7.6	理查德曲线·····	167
4.7.7	逻辑斯蒂曲线·····	170
4.7.8	苏玛克曲线·····	174
第5章	判别分析·····	178
5.1	距离判别·····	178
5.1.1	程序编制原理·····	178
5.1.2	程序流程图·····	179
5.1.3	程序应用操作·····	179
5.1.4	部分程序源代码·····	180
5.2	贝叶斯判别·····	185
5.2.1	程序编制原理·····	186
5.2.2	程序流程图·····	187
5.2.3	程序应用操作·····	187
5.2.4	部分程序源代码·····	188
5.3	费歇判别·····	194
5.3.1	程序编制原理·····	194
5.3.2	程序流程图·····	196
5.3.3	程序应用操作·····	196
5.3.4	部分程序源代码·····	199
5.4	逐步判别·····	199
5.4.1	程序编制原理·····	200
5.4.2	程序流程图·····	201
5.4.3	程序应用操作·····	201
5.4.4	部分程序源代码·····	204
第6章	聚类分析·····	205
6.1	系统聚类法·····	205
6.1.1	程序编制原理·····	205
6.1.2	程序流程图·····	206
6.1.3	程序应用操作·····	206
6.1.4	部分程序源代码·····	207
6.2	动态聚类法·····	210
6.2.1	程序编制原理·····	211
6.2.2	程序流程图·····	213
6.2.3	程序应用操作·····	213
6.2.4	部分程序源代码·····	213
6.3	模糊聚类法·····	216
6.3.1	程序编制原理·····	216

6.3.2	程序流程图	217
6.3.3	程序应用操作	217
6.3.4	部分程序源代码	218
6.4	有序样品聚类	219
6.4.1	程序编制原理	220
6.4.2	程序流程图	221
6.4.3	程序应用操作	221
6.4.4	部分程序源代码	221
第7章	多因子分析	226
7.1	主成分分析	226
7.1.1	程序编制原理	226
7.1.2	程序流程图	227
7.1.3	程序应用操作	227
7.1.4	部分程序源代码	228
7.2	因子分析	235
7.2.1	程序编制原理	235
7.2.2	程序流程图	239
7.2.3	程序应用操作	239
7.2.4	部分程序源代码	241
7.3	对应分析	245
7.3.1	程序编制原理	246
7.3.2	程序流程图	249
7.3.3	程序应用操作	249
7.3.4	部分程序源代码	250
第8章	线性规划与整数规划	252
8.1	单纯形法	252
8.1.1	程序编制原理	252
8.1.2	程序流程图	253
8.1.3	程序应用操作	253
8.1.4	部分程序源代码	255
8.2	高莫雷割平面法	259
8.2.1	程序编制原理	259
8.2.2	程序流程图	260
8.2.3	程序应用操作	260
8.2.4	部分程序源代码	262
8.3	隐枚举法	266
8.3.1	程序编制原理	267

8.3.2	程序流程图	267
8.3.3	程序应用操作	267
8.3.4	部分程序源代码	268
8.4	匈牙利法	270
8.4.1	程序编制原理	270
8.4.2	程序流程图	272
8.4.3	程序应用操作	272
8.4.4	部分程序源代码	273
第9章	动态规划	283
9.1	最优路径问题	283
9.1.1	程序编制原理	283
9.1.2	程序流程图	283
9.1.3	程序应用操作	284
9.1.4	部分程序源代码	285
9.2	资源分配或投资问题	289
9.2.1	程序编制原理	289
9.2.2	程序流程图	290
9.2.3	程序应用操作	290
9.2.4	部分程序源代码	290
9.3	生产与存储问题	292
9.3.1	程序编制原理	292
9.3.2	程序流程图	293
9.3.3	程序应用操作	293
9.3.4	部分程序源代码	294
9.4	设备更新问题	297
9.4.1	程序编制原理	297
9.4.2	程序流程图	298
9.4.3	程序应用操作	299
9.4.4	部分程序源代码	299
第10章	不确定型决策和风险型决策	302
10.1	单目标不确定型决策	302
10.1.1	程序编制原理	302
10.1.2	程序流程图	306
10.1.3	程序应用操作	306
10.1.4	部分程序源代码	308
10.2	单目标风险型决策	314
10.2.1	程序编制原理	315

10.2.2	程序流程图	315
10.2.3	程序应用操作	316
10.2.4	部分程序源代码	316
10.3	多目标不确定型决策	323
10.3.1	程序编制原理	323
10.3.2	程序流程图	324
10.3.3	程序应用操作	325
10.3.4	部分程序源代码	326
10.4	多目标风险型决策	339
10.4.1	程序编制原理	339
10.4.2	程序流程图	340
10.4.3	程序应用操作	340
10.4.4	部分程序源代码	342
参考文献		350

第 1 章

分布的卡平方检验

假设检验分为参数假设检验和非参数假设检验两类。参数假设检验都是以总体服从某分布为前提的。但在现实生活中,往往不能确认研究对象总体的分布情况,这就要求利用所获得的样本对总体的分布作假设检验,这类检验属于非参数检验。所谓非参数检验,是数理统计中对未知分布函数形式的统计假设检验的总称。

1.1 正态分布检验

正态分布是一种连续型随机变量的理论分布。它的状态是多数变量都围绕在平均值左右,由平均值到分布的两侧,变量数逐步减少,正态分布是一种在统计理论和应用上最重要的分布,许多生物现象的计算统计资料均近似服从这种分布。例如,在自然状态下,林分直径大多为正态分布。

正态分布的概率函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.1)$$

其中, μ 、 σ 是两个不确定常数,是正态分布的参数,不同的 μ 、不同的 σ 对应不同的正态分布。

1.1.1 程序编制原理

绝大部分统计分析和统计检验都是在正态分布的总体假定下进行的,因此,检验总体是否正态分布,是首要的大问题。其中一个常用的方法是皮尔逊(Karl Pearson)提出的 χ^2 拟合优度检验法,其原理如下。

将实数轴分成 m 个不相交的区间: $-\infty = t_0 < t_1 < \dots < t_m = +\infty$, 设 $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 为总体 x 的一个样本,落入区间 $[t_{i-1}, t_i)$ 的样本个数为 μ_i ; μ_i/n 即为 x 落入区间 $[t_{i-1}, t_i)$ 的频率。用 p_i 表示 x 落入区间 $[t_{i-1}, t_i)$ 内的概率, p_i 应按正态分布函数计算。先计算样本的均值和方差

$$x_a = \sum_{j=1}^n x_j / n, \quad s = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - x_a)^2 / (n-1)} \quad (1.2)$$

x_a, s 就是总体期望值和方差的估计值,用它们可以计算出与 t_i 相应的标准化值 y_i

$$y_i = (t_i - x_a) / s, \quad i = 0, \dots, m \quad (1.3)$$

于是可以得出 p_i 值

$$p_i = F(y_i) - F(y_{i-1}), \quad i = 0, \dots, m \quad (1.4)$$

其中, $F(y)$ 是标准正态分布函数。

如果总体正态分布的假定为真,当 n 较大时,频率 μ_i/n 应当与 p_i 接近, $(\mu_i/n - p_i)^2$ 应

该比较小,小到何种程度才可以接受呢?其可信程度又如何呢?皮尔逊解决了这个问题。作一个如下统计量 χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m (\mu_i/n - p_i)^2 \cdot \frac{n}{p_i} \quad (1.5)$$

皮尔逊证明, χ^2 的极限分布为 $\chi^2(m-1)$ 分布。因此,当 n 较大时, χ^2 值的概率分布可知。

由于总体 χ 的期望值和方差未知,从样本求出了这两个参数的估计值,用于计算 t_i 的标准化值 y_i ,于是 χ^2 的极限分布的自由度不再是 $(m-1)$,而是 $(m-3)$ 。设定检验水平 α 后 (α 是一个小概率值,例如 0.05),查 $\chi^2(m-3)$ 分布表,得出临界值 χ_a^2 ,即

$$P(\chi^2 < \chi_a^2) = 1 - \alpha, \quad P(\chi^2 \geq \chi_a^2) = \alpha$$

这表明 $\chi^2 < \chi_a^2$, 是大概率事件(概率是 $1-\alpha$, 例如 $1-0.05=0.95$), 如果从样本算出的 χ^2 确实小于 χ_a^2 , 是合理的, 就应当接受总体 x 为正态分布的假定(如前所述, χ^2 值小, 表明频率接近概率, 是合理的)。($1-\alpha$)是置信水平, 即接受总体 x 为正态分布的可信程度。反之, $\chi^2 \geq \chi_a^2$ 是小概率事件, 如果一次抽样出现这种情况, 视为不合理, 应当否定总体 x 为正态分布的假定。

1. 样本频数分布计算

频数分布 μ_i 的计算步骤如下。

(1) 求出样本 $(x_1 \cdots x_n)$ 中的最小值 $x_{\min}$ 和最大值 $x_{\max}$ 。

(2) 设定小区间样本个数 m (一般 $-5 \leq m < 20$), 计算各小区间分界点 t_i 值。

$$t_i = x_{\min} + i(x_{\max} - x_{\min})/m, \quad i = 1, \cdots, m-1$$

给 t_0 赋一个小于 $x_{\min}$ 的值, 给 t_m 赋一个大于 $x_{\max}$ 的值。

(3) 令各 $\mu_i (i=1, \cdots, m)$ 初值为 0。对各 $x_j (j=1, \cdots, n)$ 进行判断, 当 $t_{i-1} \leq x_j < t_i$ 时, μ_i 值增加 1。这样就可求出频数分布。

2. 概率分布值计算

标准正态分布函数值 $F(y)$ 为

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu \quad (1.6)$$

上式第一项 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu = 0.5$, 第二项计算如下。

由于

$$e^{-\frac{\mu^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(\mu^2)^k}{2^k \cdot k!}, \quad k = 0 \text{ 时, } k! = 1$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} E(y, k)$$

其中

$$\begin{aligned} E(y, k) &= (-1)^k \frac{(y/\sqrt{2})^{2k+1}}{(2k+1) \cdot k!} \\ E(y, k+1) &= -E(y, k) \frac{(2k+1)}{(2k+3)} \frac{(y/\sqrt{2})^2}{k+1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

于是式(1.6)可转化为

$$F(y) = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_0^{\infty} E(y, k) \tag{1.8}$$

运用式(1.7)、式(1.8)两式,就可获得正态分布函数值,同时根据式(1.4),求得 p_i 。

3. 合并小频数区间

做总体分布检验,当然样本容量大一些好,但是获得大样本往往不是很容易的事。在样本不十分大时,有可能出现少数区间的频数不超过 5,这会影响检验的可靠性,因此必须将频数不超过 5 的区间与相邻区间合并。

1.1.2 程序流程图

根据原理,可得算法程序流程图如图 1-1 所示。

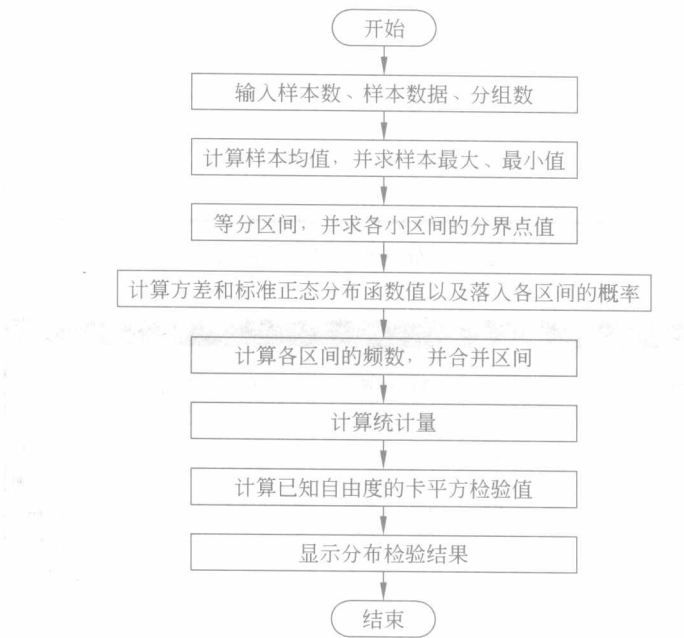


图 1-1 正态分布下的程序流程图

1.1.3 程序应用操作

【实例 1-1】 已知某一块林地上的林分的直径分布如表 1-1 所示。试问该林分直径是否服从正态分布($\alpha=0.05$)?

表 1-1 林分直径分布

15.0	15.8	15.2	15.1	15.9	14.7	14.8	15.5	15.6	15.3
15.1	15.3	15.0	15.6	15.7	14.8	14.5	14.2	14.9	14.9
15.2	15.0	15.3	15.6	15.1	14.9	14.2	14.6	15.8	15.2
15.9	15.2	15.0	14.9	14.8	14.5	15.1	15.5	15.5	15.1
15.1	15.0	15.3	14.7	14.5	15.5	15.0	14.7	14.6	14.2