高三数学

思维点拨与能力训练

SIWEI DIANBO YU NENGLI XUNLIAN

宁垂信／编著

高考冲刺训练

辽 宁 大 学 出 版 社
广西师范大学出版社

序　言

《**思维点拨与能力训练**》丛书是《**高考决胜800题**》丛书作者群推出的最新力作。本丛书紧扣教材，以“**教学大纲**”和“**考试说明**”为经线，以课本习题（变式）、高考试题（中档题）、竞赛题（低、中档题）为纬线，用专题讲座形式编织成新的知识网络，以希望升入大学本科的高中生为对象，提供最新的同步教辅读物。本丛书也应是高中教师备课的最佳参考。

为提高学生素质，大多数中学开办各种形式的提高班或培优班，即第二课堂。但第二课堂没有统一的教材，这个缺陷使任课教师不堪重负。另外，在众多的教辅读物中，辅导高考和竞赛的读物往往彼此割裂、脱节，有的面向高考，不涉及竞赛；有的面向竞赛，不涉及高考。这类辅导书大多失之于艰深，不易自学。本丛书期望在高考与竞赛之间构筑通道，使之浑然一体，珠联璧合，这是本丛书的特色之一。缘此，选用本丛书作为第二课堂辅导教材不失为教师的明智选择。

本丛书的作者均为知名度较高的高级或特级教师，既有较高的专业修养，又有丰富的多年中学教育教学实践经验。他们至今仍勤奋地工作在高考复习指导和竞赛辅导的第一线，最了解学生思维的态势和困惑所在，因此最能有针对性地对学生进行全方位的思维点拨和多层次的能力训练指导，进行多侧面的方法启迪和多角度的思维渗透。这是本丛书的又一特色。

本丛书共15册，高中三个年级均分别设有语文、数学、英语、物理、化学5个分册：高一年级分册为“**高考起步训练**”，侧重于知识的拓展和方法的启迪，从高考起跑线开始指导学生如何灵活应变，捷足先行；高二年级分册为“**高考加速训练**”，侧重于思维的点拨和方法的深化，指导学生在高考中期学习

中如何加快复习速度，一路领先；高三年级分册为“**高考冲刺训练**”，侧重于考点的剖析和学科思想的渗透，指导学生在高考最后阶段如何做到增强信心，目标明确，全力冲刺。

各分册按专题编写，每个专题分为导言、范例分析、训练题、训练题参考解答四个栏目。

导言：扼要归纳本专题的知识点、重点、难点、关键点和易混淆点，对与本专题相关的知识做适度拓展，对超出课本范围而对参加竞赛又必须掌握的知识做简明扼要的介绍。

范例分析：精选典型例题，例题紧扣导言，题目新颖，覆盖面广，深度适中，循序渐进。每道例题均由分析、解答、评述三个部分组成。分析精辟透彻，旨在启迪思维、点拨思路。解答详实，解法灵活，既有通法通解，又有奇思妙解，尽量采用学生易于接受的解法。评述部分尽可能揭示蕴藏于解题过程中的思想、方法和规律，以提高学生的思维层次，从而逐步实现由知识到能力的飞跃。此栏目画龙点睛，言简意明，颇富文采。

训练题：精选与本专题相关的各类题目供读者进行自我训练、自我检测，训练题与例题前后呼应，题型全面，编排由浅入深，梯度明显。

训练题参考解答：选择题和填空题均给出答案，其中较难的题还给出提示或略解，计算题和证明题都有详尽且规范的解答过程。

本丛书力求实现科学性、实用性和可读性完美结合，为读者提供一条增识、增智、增能的快捷途径。荀子说过：“君子生非异也，善假于物也。”我们期盼读者“善假于”此丛书，去挖掘潜能，发挥自己的聪明才智，在以提高素质为主的旋律中，奏响高考起步、加速、冲刺的壮丽乐章。

黄文斐

2000年8月

前　　言

为了适应高考改革的需要，更好地发挥中学数学在素质教育中的地位及作用，本书从一种较新的角度进行编写．中学数学在培养学生思维能力方面所起到的作用是中学任何一门学科所不能替代的，而这种思维能力高低的标志在很大程度上是决定于学生在分析和解决问题时（不一定是数学问题），运用科学方法论的意识和能力，本书正是力图站在这个高度对中学数学中的重点问题以及高考的热点问题作出尽可能全面而深刻的诠释．

在中学数学教材内容及解题中，所蕴含的科学方法主要有以下几类：第一类是具体的学科方法，例如换元法、配方法、消元法、数学归纳法等；第二类是思维方法，在思维方法方面，又有逻辑的方法及其非逻辑的方法．逻辑的方法一般遵循形式逻辑的规律进行，而非逻辑的方法又主要有灵感、顿悟、直觉、猜想等形式；第三类是系统科学方法，它既有逻辑的形式又有非逻辑的形式（例如“黑箱”方法）；最后一类是哲学方法，它包括数学思想方法及辩证唯物主义的方法等．本书正是试图结合高中教材及高考的重点内容，揭示这些方法在解题过程中的联系和应用，藉以培养和提高同学们观察问题、分析问题和解决问题的能力．

本书的读者对象是完成了高三第一轮复习的学生及其指导老师和教研员．书中编选问题的难度定位于高考的中高档题及全国高中数学联赛第一试的难度，因此，本书既可作为高考第二轮专题复习的参考用书，亦可作为参加全国高中数学联赛学生的指导性读物．本书除了对“范例分析”中的每一个问题作出尽可能详细的解答及其解题思路分析之外，还对测试题同样给出详细的解答（包括选择题和填空题）．本书的选题新颖，解题方法灵活，具有较高的可读性和指导性，在

阅读本书时,读者可对题目先作出自己的分析与思考,然后再与本书给出的解答与评述对比,或者你会从中多一分收获.

仅以此书献给跨世纪的园丁和孜孜不倦的莘莘学子.

宁垂信

2000年5月

目　　录

第一章　集合与函数

§1.1　集　合

(一)导　　言

集合是现代数学最基本的概念之一，由于集合概念的简单性、普遍性和抽象性，使它渗透到数学的一切领域而具有应用上的广泛性与工具性的特点，又正是这种应用上的广泛性和工具性，使得集合与其它数学知识产生了紧密的联系.

对集合的学习，除了要准确理解有关的概念、集合之间的关系以及交、并、补的运算之外，重要的还要掌握化归与转化、数形结合的数学思想在集合问题上的应用. 事实上，集合语言与一般数学语言的转化；集合知识与一般数学知识之间的转化，是解决集合问题的桥梁. 其次，在处理与交、并、补有关运算及集合的关系的问题中，借助于文氏图或函数、方程的图形来解决，常使隐晦的问题变得明朗、清晰，易于找到问题的思路.

这里还想强调一点的是充要条件与集合问题的关系，即：若 $A\subset B$，则 A 是 B 的充分条件；若 $A\supset B$，则 A 是 B 的必要条件；若 $A=B$，则 A 是 B 的充要条件. 利用这些关系解决充要条件的判定，有时会显得易于理解和简单. 另外，还要注意集合运算和集合关系之间的某些等价性，如 $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$等，利用这些等价性，有利于我们对问题的多角度思考.

（二）范例分析

【例 1】 若集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$，$p=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},\ p\in\mathbf{Z}\right\}$，则 M、N、P 的关系是（　　）.

(A)$M=N\subset P$　　　　(B)$M\subset N\subset P$

(C)$M\subset N=P$　　　　(D)以上结论都不对

【分析】 注意到集合 M、N、P 都是无限集，

$\because$ $M=\left\{x\left|x=\frac{6m+1}{6},m\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，$N=\left\{x\left|x=\frac{3n-2}{6},n\in\mathbf{Z}\right.\right\}=\left\{x\left|x=\frac{3(n-1)+1}{6},n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，$P=\left\{x\left|x=\frac{3p+1}{6},p\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

又$\because$ 当 p、$n\in\mathbf{Z}$ 时，$3p$ 与 $3(n-1)$ 的等价性，进而得出$\frac{3p+1}{6}$与$\frac{3(n-1)+1}{6}$的等价性，据此可判断 $N=P$；进一步分析，因为当 m、$p\in\mathbf{Z}$ 时，显然有 $\{x|x=3p,p\in\mathbf{Z}\}\supset\{x|x=6m,m\in\mathbf{Z}\}$，由此可得 $M\subset P$，从而 $M\subset N=P$. $\therefore$ 选 (C).

【例 2】 已知 $M=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$N=\{0,|x|,y\}$，且 M、N 均为三元素集合，试求集合 $P=\{x+y|M=N\}$.

【解】 显然 x，xy 均不为零，否则 $\lg(xy)$ 无意义，$\therefore$ 只能 $\lg(xy)=0$，故 $xy=1$，由 $M=N$ 有 $|x|=1$ 或 $y=1$，若 $y=1$，则集合 M 中出现重复元素：$x=xy$，与集合元素的互异性矛盾，因此只能 $|x|=1$，即 $x=\pm1$，但当 $x=1$时，M 中仍出现重复元素，(即：$x=xy=1$)，只能 $x=-1$，$y=-1$，有 $x+y=-2$，$\therefore P=\{-2\}$.

【评述】 本例首先要明确所求集合 P 的元素所具有的性质是：使集合 $M=N$时的 x、y 值，将 x 与 y 相加所得出的和为元素而构成的集合. 然后再根据集合相等的条件，分析 x、y 的可能情况，这里的突破口是常数零. 在解题的过程中，多次用到分类讨论的思想.

【例 3】 数集合 A 满足条件：若 $a\in A$，$a\neq1$，则$\frac{1}{1-a}\in A$.

(1)［证明］若 $2\in A$，则在 A 中必还有另外两个数，求出这两个数；

(2) 若 A 为单元素集，求 a 及A.

【解】 (1) $\because$ $2\in A$，则$\frac{1}{1-2}\in A$，即 $-1\in A$，

又$\because$ $-1\in A$，则还有$\frac{1}{1-(-1)}\in A$，$-\frac{1}{2}\in A$，

$\therefore$ 当 $2\in A$ 时，还有 -1 及$\frac{1}{2}\in A$.

(2) $\because$ A 是单元素集 $\therefore$ $a=\frac{1}{1-a}$，　所得 $a=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

从而 $A=\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$或 $A=\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

【例 4】 设 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|2x^2-ax+2=0\}$，若 $A\cup B=A$，求 a 的值组成的集合.

【解】 $\because$ $A\cup B=A$，得 $B\subseteq A$，而 $A=\{1, 2\}$，此时，集合 B 有如下四种情况：$B=\{1\}$，$B=\{2\}$，$B=\{1, 2\}$，$B=\varnothing$.

由 $B=\{1\}$，$\{2\}$ 是单元素集，得 $\Delta=a^2-16=0$ 得 $a=\pm4$.
而 $a=4$ 时，$B=\{1\}$，符合要求；当 $a=-4$ 时，$B=\{-1\}$ 不符合；当 $B=\{1, 2\}$ 时，则韦达定理 $1\times2=\frac{2}{2}$，显然不合；当 $B=\varnothing$时，由 $\Delta=a^2-16<0$ 得 $-4<a<4$.

综上，满足条件的 a 的集合为 $\{a|-4<a\leqslant4\}$.

【评述】 在本例的解决过程中，我们利用了 $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$ 的等价性，这样对集合 B 的情况有着清楚的了解，问题就化为一元二次方程根的性质去解决. 这里，在考虑 B 的可能情况时，$B=\varnothing$是易于忽视的，请注意：空集$\varnothing$是任何一个集合的子集的性质.

【例 5】 已知 $A=\{y|y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}$，
$B=\left\{y\middle|y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}, 0\leqslant x\leqslant3\right\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的范围.

【解】 由 A 可得$[y-(a^2+1)(y-a)]>0$，注意到 $a^2-a+1>0$，必有 $a^2+1>a$，从而上述不等式的解为 $y>a^2+1$，或 $y<a$

$\therefore$ $A=\{y|y>a^2+1$，或 $y<a\}$.

又由 $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ 知，当 $0\leqslant x\leqslant3$ 时，
$y_{min}=f(1)=2$，$y_{max}=f(3)=4$ $\therefore$ $B=\{y|2\leqslant y\leqslant4\}$.
若 $A\cap B=\varnothing$，

则 $\begin{cases}a\leqslant2.\\a^2+1\geqslant4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a\leqslant2\\a\geqslant\sqrt{3}\text{或 }a\leqslant-\sqrt{3}.\end{cases}$

$\therefore$ 满足条件的实数 a 的取值范围是：$a\leqslant-\sqrt{3}$或$\sqrt{3}\leqslant a\leqslant2$.

【评述】 本题应注意的是对集合 A、B 中元素性质的理解：A 中的元素是不等式的解；集合 B 的元素是函数在闭区间上的值域，于是问题就转化为不等式组的解为空集时，字母 a 的取值范围.

【例 6】 命题甲：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两相异负根；命题乙：方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$无实根. 这两个命题有且只有一个成立，求 m 的取值集合.

【解】 满足甲的条件是$\begin{cases}\Delta_1=m^2-4>0,\\ -m<0.\end{cases}\Rightarrow m>2$，记为集合 A；满足乙的条件是 $\Delta_2=16(m-2)^2-16<0\Rightarrow 1<m<3$，记为集合 B. 这两个命题有且只有一个成立的条件，从集合的语言来理解即是求 $A\cap\overline{B}$ 与 $\overline{A}\cap B$ 的并集.

易知，$A\cap\overline{B}=\{m\mid m\geqslant 3\}$，$\overline{A}\cap B=\{m\mid 1<m\leqslant 2\}$，进而求得并集为 $\{m\mid m\geqslant 3$，或 $1<m\leqslant 2\}$ 即为所求.

【评述】 本例关键是对由一般的数学语言到集合语言的转化的理解，解决起来就不困难了.

【例 7】 若集合 $A=\{x\mid -2<x<-1$，或 $x>1\}$，$B=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，$B=\{x\mid x>-2\}$，$A\cap B=\{x\mid 1<x<3\}$，求实数 a，b 的值.

【分析】 这里既知道两集合的并集，又知道两集合的交集，要求出 a，b 的值，应先从两集合的交集着手，再结合两集合的并集求出实数 a，b.

【解】 $\because$ $A=\{x\mid -2<x<-1$，或 $x>1\}$，$A\cap B=\{y\mid 1<x<3\}$，因而 B 可能是 $\{x\mid x\leqslant -2$，或 $-1\leqslant x\leqslant 3\}$.

但又$\because$ $A\cup B=\{x\mid x>-2\}$ $\therefore$ $B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，
结合题设 B 的特点知 $a=-1$，$b=3$.

【例 8】 设 $A=\left\{(x,y)\mid y=\sqrt{2a^2-x^2},a>0\right\}$，$B=\left\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=a^2,a>0\right\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，求 a 的最大值与最小值.

【解】 $\because$ 集合 A 中元素构成的图形是以原点 O 为圆心，$\sqrt{2}a$ 为半径的半圆；集合 B 中元素构成的图形是以点 $O'(1,\sqrt{3})$ 为圆心，a 为半径的圆（如图 1－1）

$\because$ $A\cap B\neq\varnothing$ $\therefore$ 半圆 O 和圆 O' 有公共点，显然，当半圆 O 和圆 O' 外切时，a 最小；内切时，a 最大. 此时 $\sqrt{2}a_{小}+a_{小}=|OO'|=2$

$\therefore$ $a_{小}=2\sqrt{2}-2$.

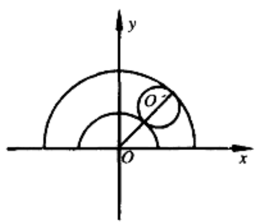

图 1－1

又 $\sqrt{2}a_{大}-a_{大}=|OO'|=2$，$\therefore$ $a_{大}=2\sqrt{2}+2$.

【评述】 本例用数形结合的思想，根据集合 A、B 中元素的几何意义，作出图形，然后利用 $A\cap B\neq\varnothing$ 时，图形的几何性质易于得出 a 的最大值和最小值.

【例 9】 已知 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2,a_5^2\}$，

$a_i \in \mathbf{N}$ ($i=1,2,3,4,5$)，设 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，且 $A\cap B=\{a_1, a_4\}$，$a_1+a_4=10$，又 $A\cup B$ 元素之和为 224．求

(1) a_1，a_4；(2) $a_2+a_3+a_5+a_2^2+a_3^2+a_5^2$；(3) a_5；(4) A

【解】 (1) $\because$ $A\cap B=\{a_1, a_4\}$，且 $a_1+a_4=10$，即两个自然数的平方和为 10，$\therefore$ 这两个数只能是 1，9，而 $a_1<a_4$，得 $a_1=1$，$a_4=9$.

(2) $\because$ $A\cup B$ 的元素之和为 224，即

$a_2+a_3+a_5+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=224$，且 $a_1^2+a_4^2=1^2+9^2=82$.

$\therefore$ $a_2+a_3+a_5+a_2^2+a_3^2+a_5^2=142$.

(3) $\because$ $a_4=9$，$a_4<a_5$，若 $a_5=11$，则 $a_2+a_3+a_2^2+a_3^2=10$，这不可能，$\therefore$ $a_5=10$.

(4) 逐一检验 a_2，a_3，易得 $A=\{1, 3, 4, 9, 10\}$.

【例 10】 在某次数学竞赛中共有甲、乙、丙三题，在所有 25 个参赛的学生中，每个学生至少解一题；在所有没有解出甲题的那些学生中，解出乙题的人数是解出丙题人数的 2 倍；只解出甲题的学生比余下的学生中解出甲题的人数多 1；只解出一题的学生中，有一半没有解出甲题，问共有多少个学生只解出乙题?

【分析】 设解出甲、乙、丙各题学生的集合分别是 A、B、C，并用三个圆表示，则重叠部分表示同时解出两题或三题的学生的集合，这样得到七个部分，其人数分别用 a，b，c，d，e，f，g 加以表示（如图 1－2）.

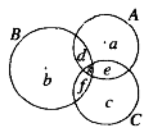

图 1－2

由于每个学生至少解出一题，得

$$a+b+c+d+e+f+g=25. \quad ①$$

由于没有解出甲题的学生中解出乙题的人数是解出丙题人数的 2 倍，得

$$b+f=2(e+f). \quad ②$$

又因只解出甲题人数比余下学生中解出甲题人数多 1，得

$$a=d+e+g+1. \quad ③$$

又只解出一题的学生中，有一半没有解出甲题，得

$$a=b+c. \quad ④$$

由②，得 $f=b-2c$. ⑤

⑤代入①，得 $a+2b-c+d+e+g=25$. ⑥

③、④代入⑥，得

$$2b-c+2d+2e+2g=24, \quad ⑦$$

$$3b+d+e+g=26. \quad ⑧$$

⑧×2－⑦，得　$4b+c=26$. ⑨

∵ $c\geqslant 0$ 得　$4b\leqslant 2b$，即 $b\leqslant 6\frac{1}{2}$.

利用⑤⑨消去 c 得　$f=b-2(2b-4b)=9b-52$.

又∵　$f\geqslant 0$，得 $9b\leqslant 52$，即 $b\geqslant 5\frac{7}{9}$，且 $b\in\mathbf{Z}$.

∴　$b=6$，即只解出乙题的学生有 6 人.

【评述】 本题利用文氏图，使一个表述颇为复杂的问题得到直观的显示.进而根据图逐一把用文字陈述的语句"翻译"为数学符号语言，通过解方程和限制条件的运用，解决问题.

【例 11】 设 $A=\{t|0<t<2\pi\}$，$B=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，定义 A 到 B 的映射 f：$t\to(\sin t,\sin 2t)$，又设 $C=\{f(t)\mid t\in A\}$，$D(r)=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant r^2,r>0\}$. 若 $C\subseteq D(r)$ 恒成立，求 r 的最小值.

【分析】 本题集合关系较为复杂，题意较为晦涩，因此首先应由集合与映射的有关知识，准确地把握好所出现的几个集合和映射符号的意义，把结论的陈述方式改为：已知 $f(t)=(\sin t,\sin 2t)$，且 $f(t)$ 恒为集合 $D(r)$ 的元素，求 r 的最小值.

【解】 依题意，对 $t\in(0.2\pi)$，不等式 $r^2\geqslant\sin^2t+\sin^2t$ 恒成立. 从而应有 $r^2\geqslant(\sin^2t+\sin^22t)\max$，$t\in(0,2\pi)$.

而 $\sin^2+\sin^22t=-(\cos 2t+\frac{1}{4})^2+\frac{25}{26}$　∴　$r^2\geqslant\frac{25}{16}$，且 $r>0$.

∴　$r_{\min}=\frac{5}{4}$.

【评述】 在准确理解题意的基础上，将抽象的问题转化为一个具体熟悉的问题来解决：即求 $f(t)=\sin^2t+\sin^22t$ 的最大值，这已是一个常规的问题了.

（三）训练题

1. 选择题

(1) 已知 $A=\{(x,y)|x>0$ 且 $y<0\}$，$B=\{*x,y)|x-y>0$，且 $xy<0\}$ 则下列关系不正确的是（　　）.

(A) $A\subset B$　(B) $A\supset B$　(C) $A=B$　(D) 以上关系都不对.

(2) 已知 $M=\{x|x^2-5x-14\geqslant 0\}$，$N=\{x|\frac{x}{x+2}\geqslant 1\}$，则 M 是 N 的（　　）.

(A) 必要但非充分条件　　　(B) 充分但非必要条件

(C) 充分且必要条件　　　(D) 既非充分又非必要条件

(3) 已知集合 $A=\{x|x=\cos\frac{n\pi}{3},\ n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=\sin\frac{(2m-3)\pi}{6},\ m\in\mathbf{Z}\}$，则 A、B 的关系是（　　）.

(A) $A\supseteq B$　(B) $A\subseteq B$　(C) $A=B$　(D) 不确定

(4) 同时满足：①$M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，②若 $a\in M$，则 $6-a\in M$ 的非空集合 M 有（　　）.

(A) 16 个　　(B) 15 个　　(C) 7 个　　(D) 6 个

2. 填空题

(5) 设 $I=\{2,4,1-a\}$，$A=\{2,a^2-a+2\}$，若 $\bar{A}=\{-1\}$，则 $a=$ ________.

(6) 已知集合 $A=\{x|x^2+ax+1=0,\ x\in R\}$，$B=\{1,2\}$，且 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围是________.

(7) 若已知 $B=\{a,b,c,d,e\}$，$c=\{a,c,e,f\}$，且集合 A 满足 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，则集合 A 的个数是________.

(8) 已知 A、B、C 都是 R 的子集，若 $A=\bar{B}$，$B=\bar{C}$，则 A 与 C 之间的关系是________.

3. 解答题

(9) 设集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-mx+2=0\}$，且 $A\cap B=B$，求 m 的值.

(10)已知 $p=\{(x,y)|(x+2)^2+(y-3)^2\leqslant 4\}$. $Q=\{(x,y)|(x+1)^2+(y-m)^2<\frac{1}{4}\}$,且 $P\cap Q=Q$,求 m 的取值范围.

(11)已知 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$,$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$,$c=\{x|x^2+2x-8=0\}$,若$\varnothing\subset A\cap B$,$A\cap C=\varnothing$,求实数 a 的值和集合 A.

(12)集合 A 与 B 各有 12 个元素,集合 $A\cap B$ 有 4 个元素,集合 C 满足条件:(1)$C\subset(A\cup B)$;(2)C 中含有 3 个元素;(3)$C\cap A\neq\varnothing$.这样的集合 C 共有多少个?

(四)训练题参考解答

1. 选择题

(1) $\because x>0$ 且 $y<0$，则点 (x,y) 表示第四象限内的点，即 A 是第四象

限内的点集；$xy<0$ 表示 x，y 异号，又 $x-y>0$，只能是 $x>0$ 且 $y<0$，B 也是第四象限的点集．$\therefore A=B$．答案应选（C）．

（2）此题的实质是确定集合 M、N 的关系，若 $M\subset N$，则 M 是 N 的充分但非必要条件；若 $M\supset N$，则 M 是 N 的必要但非充分条件；若 $M=N$ 则 M 是 N 的充要条件．

$\because\ M=\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 7\}$，$N=\{x\mid x\leqslant -2\}$

$\therefore\ M\supset N\quad\therefore\ M$ 是 N 的必要但非充分条件．

故答案应选（A）．

（3）这是判断集合间关系的题，规律是弄清两休合中的元素到底是什么．

$\because\ B$ 中 $x=\sin(\frac{m}{3}\pi-\frac{\pi}{2})=-\cos\frac{m\pi}{3}$，$A$ 中 $x=\cos\frac{n\pi}{3}$，$\therefore A=B$，应选(C)；若将 m,n 按被 3 除所得余数讨论求得 $A=B=\{1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\}$，则小题大做；另外，这里需要把握三角函数值，只需将 m，n 代以 1，2，3，4，5，6，即可算出 A、B．

（4）答案：选（C）．

2．填空题

（5）$\because\ \bar{A}=\{-1\}\quad\therefore\ 1-a=-1$，$a=2$．

若按下面的解法，a 有两个值．

$\because\ \bar{A}=\{-1\}$ 得 $a^2-a+2=4$，即 $a=2$ 或 $a=-1$．考虑集合中元素的互异性，a 不可能为 -1，故 $a=2$，应填 2．

（6）由 $A\subseteq B$ 知，A 中的元素必在 B 中，即方程 $x^2+ax+1=0$ 的实根只能是 1 或 2，故有，（1）将 $x=1$ 代入 $x^2+ax+1=0$，得 $a=-2$；（2）将 $x=2$ 代和得 $a=-\frac{5}{2}$．经时 $A=\{2,\ \frac{1}{2}\}$，不满足 $A\subseteq B$，应舍去；（3）当 $\Delta=a^2-4<0$，即 $-2<a<2$ 时，$A=\varnothing$，亦符合 $A\subseteq B$，应填 $-2\leqslant a<2$．

（7）$\because$ 集合 B 与集合 C 的公共元素有 a,c,e，故集合 $\{a,c,e\}$ 以及它的所有子集均可作集合 A，所以 C 的个数是 $2^3=8$．故应填 8．

（8）$\because\ B\cup\bar{B}=A$，$B=\bar{C}$，$\therefore\ A\cup\bar{C}=I$，

又 $\because\ C\cup\bar{C}=I\quad\therefore\ A=C$．　答案：$A=C$．

（9）$\because\ A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$，又 $\because\ A\cap B=B\Rightarrow B\subseteq A$．

$\therefore$ 集合 B 有三种情况：

①$B=A$ 时，则 $m=3$；

②B 为单元素集时，由 $\Delta=M^2-8=0$，得 $m=\pm 2\sqrt{2}$，但此时的根为

$\pm\sqrt{2}$,不合题意，故 $m=\pm2\sqrt{2}$应舍去；

③$B=\varnothing$时，由 $\Delta=m^2-8<0$，得 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$

综上，m 的值为 $m=3$ 或 $m\in(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$.

(10) ∵点集 P 表示平面上以 $(-2,\ 3)$ 为圆心，2 为半径的圆所围成的区域（含圆周），点集 Q 表示平面上以 $(-1,\ m)$ 为圆心，$\frac{1}{2}$ 为半径的圆的内部. 要使 $P\cap Q=Q$，应$\odot O_2$ 内含于$\odot O_1$，故有 $|O_1O_2|^2\leqslant(R_1-R_2)^2$，即 $(-1+2)^2+(m-3)^2\leqslant\left(2-\frac{1}{2}\right)^2$，由此解得 $3-\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant3+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(11) 将$\varnothing\subset A\cap B$ 转化为$A\cap B\neq\varnothing$，

$\therefore\quad B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}=\{2,\ 3\}$，

$C=\{x|x^2+2x-8=0\}=\{-4,\ 2\}$.

$\because\quad A\cap C=\varnothing,\qquad\therefore\quad -4\notin A,\ 2\notin A$.

又$\because\quad A\cap B\neq\varnothing$，

$\therefore\quad 3\in A$，有 $9-3a+a^2-19=0$，得 $a=5$ 或 $a=-2$.

当 $a=5$ 时，$A=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,\ 3\}$，与 $A\cap C=\varnothing$矛盾.

$\therefore\quad a=-2$，此时 $A=\{-5,\ 3\}$.

(12) $\because C\subset(A\cup B)$，

$\therefore C$ 中的元素是 $A\cup B$ 中的元素，$A\cup B$ 中元素不全是C 中的元素，如图 1－3.

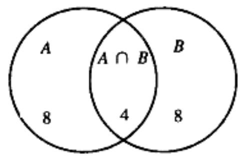

图 1－3

又$\because\quad C\cap A\neq\varnothing$，即 C 中至少含A 中一个元素，

$\therefore$ 满足上述条件的集合 C 共有：$C_{12}^1C_8^2+C_{12}^2C_8^1+C_{12}^3=1084$ 个.

另解　本题亦可用 $C_{20}^3-C_8^3=1084$ 个.

§1.2　函数的定义域与值域

（一）导　　言

函数是高中阶段的重要内容，它贯串于高中教材的始终。掌握函数的知识，应该深刻理解它的定义（解析式、定义域、值域）和有关性质（单调性、奇偶性、生以及最大值、最小值等）。研究函数的方法主要是数形结合，因为函数的

概念及其性质都可能在其图象上得到直观的反映。从而熟练而准确地掌握函数图象的几种作法，自觉地动用数形结合的思想去处理与函数有关的问题，是数学能力的重要体现。在处理函数的问题时，忽略定义域而造成的错误，时有发生，因此，应充分注意定义域对函数的概念与性质的制约作用。

本节主要解决与定义域、值域有关的问题。

（二）范例分析

【例 1】 (1) 已知 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,2]$，则 $g(x)=\dfrac{f(x^2)}{1+\lg(x+1)}$ 的定义域是________.

【解】 由 $\begin{cases}0\leqslant x^2\leqslant 2,\\ x+1>0,\\ 1+\lg(x+1)\neq 0\end{cases}\Rightarrow -1<x\leqslant\sqrt{2}$，且 $x\neq-\dfrac{9}{10}$.

$\therefore$ $g(x)$ 的定义域为 $x\in\left\{x\,\middle|\,-1<x<-\dfrac{9}{10}，或 -\dfrac{9}{10}<x\leqslant\sqrt{2}\right\}$.

【评述】 求函数定义域的本质就是解不等式或不等式组．因此，先找出使解析式有意义的不等式（组）是关键，进而解此不等式，得出定义域.

(2) 已知 $f(x^2-3)=\lg\dfrac{x^2}{x^2-6}$，则 $f(x)$ 的定义域是________.

【解】 令 $u=x^2-3$，则 $f(x)$ 的定义域就是 u 的值域，要使 $\lg\dfrac{x^2}{x^2-6}$ 有意义，须且只须 $x^2>6$，即 $x^2-3>3$. $\therefore$ $u>3$.

【评述】 这是一个复合函数的定义域问题，它的一般形式是设 $f[g(x)]=h(x)$，则 $f(x)$ 的定义域应由 $g(x)$ 的取值范围决定，而在 $g(x)$ 的取值范围确定时，$g(x)$ 的 x 的值有意义，而又必须由 $h(x)$ 的定义域所决定.

(3) 已知 $y=f(2^x)$ 的定义域 $[-1,1]$ 则 $y=f(\log_2 x)$ 的定义域是________.

【解】 令 $u=2^x$，$t=\log_2 x$，那么中间变量 u，t 的值域都相同（都等于原函数的定义域）．由 $u=2^x$ 的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$，得 $2^{-1}\leqslant 2^x\leqslant 2$，则 $\dfrac{1}{2}\leqslant\log_2 x\leqslant 2$，即 $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4$. ，

$\therefore$ 定义域为 $x\in\{x\mid\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4\}$.

【评述】 请注意此小题与 (2) 的不同，比较它们在解法上的差异.

【例 2】 求 $y=\log_2(a^x-k\cdot 2^x)$ $(a>0,a\neq 1)$ 当 $k<1$ 时的定义域.