高等学校教材

LILUN LIXUE

理论力学

邹春伟 主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

高等学校教材

理论力学

邹春伟 主编

中国铁道出版社

2008 · 北京

内容简介

本书根据教育部高等学校工科专业理论力学课程教学基本要求编写，对理论力学教学内容和体系进行了改进，强调了分析力学知识，内容精炼，起点较高，强调了工程背景与实际应用，注重了工程问题力学模型的建立，以适应新时代创新人才培养的要求。全书共分为五篇，第一篇静力学，包括：静力学公理、力的投影、力矩与力偶、力系的简化、力系的平衡、桁架的内力分析和摩擦平衡问题；第二篇运动学，包括：点的运动与刚体的基本运动、点的合成运动、刚体的平面运动和机构运动分析；第三篇动力学，包括：质点动力学、动量定理、动量矩定理、动能定理、达朗贝尔原理；第四篇分析力学基础，包括：分析力学基本概念、虚位移原理、动力学基本方程、拉格朗日方程；第五篇动力学专题，包括：质点、刚体的碰撞和单自由度振动。书中精选了很多有代表性的例题，以及足量的习题，并在书后附有习题参考答案。

本书可作为高等学校工科理论力学通用教材，适用于机械、土木、工程力学、动力、采矿、材料、化工、水利等各专业，可作为成教、自考学生的辅导教材，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学/邹春伟主编．—北京：中国铁道出版社，2008.6
高等学校教材
ISBN 978-7-113-08891-0

Ⅰ.理…　Ⅱ.邹…　Ⅲ.理论力学—高等学校—教材　Ⅳ.031

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 053686 号

书　　名：**理论力学**
作　　者：邹春伟　主编

责任编辑：刘红梅　**电话**：010-51873134　**电子信箱**：mm2005@tom.com
封面设计：薛小卉
责任校对：孙　玫
责任印制：金洪泽　陆　宁

出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
印　　刷：三河市华业印装厂
版　　次：2008 年 6 月第 1 版　2008 年 6 月第 1 次印刷
开　　本：787mm×1092mm　1/16　印张：21.75　字数：543 千
印　　数：0 001～3 000 册
书　　号：ISBN 978-7-113-08891-0/O・183
定　　价：32.00 元

前　言

理论力学是高等学校工科专业的技术基础课，研究的内容是物体机械运动的一般规律及其在工程实际中的应用，是后续课程（如材料力学、机械设计、结构计算）的重要理论基础，一直受到工科专业的重视。

根据教育部高等学校工科专业理论力学课程教学基本要求，结合编者多年的教学经验编写的本教材，力图反映编者对理论力学课程教学要求的理解以及对理论力学教学内容改革的一些想法，不仅注意了理论力学结构紧凑、理论严密、演绎性强的特点，还注重了教学内容的改革和教材结构的安排，以使其满足目前工科各专业理论力学课程教学的要求。在编写过程中作了以下考虑：

1. 避免与大学物理相关内容的重复，提高起点，精炼内容。

2. 强调工程背景与实际应用，加深物理概念，注重工程问题的建模能力培养。

3. 在保证理论严谨、逻辑性强的前提下，重组了理论力学教学内容，强调了分析力学基础知识；结构安排注重教学的方便，力图通俗易懂。

4. 注重理论联系实际，根据典型工程实例的研究，讲述理论的应用，以及处理工程问题的一般方法。

5. 注意了创新意识的培养，精选了有代表性的例题以及足量的习题供教师选用和学生练习，并在书后附有答案。

根据不同专业和学时进行必要的取舍，本书可作为高等学校工科理论力学通用教材，适用于机械、土木、动力、采矿、材料、化工等各专业，也可作为成教、自考学生的辅导教材。

本书由邹春伟主编，喻爱南、陈德怀参编，其中邹春伟编写绪论、第三、第四、第五、第六、第七、第八、第九、第十三、第十四章以及附录 B、C、D 和习题参考答案，喻爱南编写第一、第二章，陈德怀编写第十、第十一、第十二章、以及附录 A。

湖南大学刘又文教授对本稿进行了审阅，提出了很多宝贵的意见和建议，特此致谢。

本书的编写参考了大量的国内外有关教材，吸取了他们的许多长处，并得到了中南大学土木建筑学院以及力学系老师们的大力支持，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中疏漏与不妥之处在所难免，恳请读者指正。

编　者

2008 年 4 月

目　录

第三篇 动力学

第四篇 分析力学基础

第五篇　动力学专题

绪　论

力学是研究物体宏观机械运动的科学，不仅可以用来解释与分析物体机械运动，而且也是研究物质其他运动形式的基础。理论力学研究物体机械运动的一般规律。所谓**机械运动**是指物体的空间位置随时间的变化，如固体的运动与变形、流体的流动等，它是宇宙间物质运动最基本、最普遍的一种形式，任何比较复杂的物质运动形式总是与机械运动存在着或多或少的联系。

物体的机械运动都服从某些一般规律，这些一般规律就是理论力学的研究内容。

理论力学属于以牛顿提出的基本定律为基础的经典力学范畴，只限于以宏观物体为研究对象，运动速度必须远小于光速，即宏观、低速运动物体。现代工业进步的成果，如航天飞机、卫星、导弹、巨型轮船、高速列车等，虽然速度有了很大的提高，但仍然属于经典力学的范畴，还是可以用理论力学的方法去研究的。

与任何一门科学一样，理论力学的研究方法也遵循认识过程的客观规律，即先从观察、实践和科学实验出发，经过分析、综合和归纳，总结出力学最基本的概念和规律，如“力”和“力矩”的基本概念、“二力平衡”、“杠杆原理”、“力的平行四边形法则”、“万有引力定律”等基本规律；然后在对事物观察和试验的基础上，经过抽象化建立力学模型，并在建立力学模型的基础上，从基本规律出发，利用数学工具推理演绎，得出正确的结论和定理，将通过实践得来的感性认识上升为理性认识，构成力学理论，如将实际对象简化为质点、质点系、刚体、刚体系，根据物体间相互限制的实际情况，提出约束模型，从牛顿定律出发，推导出动力学普遍定理，等等；最后再回到实践中去验证理论的正确性，并指导实践，同时完善理论本身。

在研究物体宏观机械运动时，必须根据不同的研究目的建立合理的力学模型。当物体运动范围远远大于其本身的大小，或它的形状对其运动的影响可以忽略不计时，可将该物体简化为有质量而无几何尺寸的点，称为**质点**。例如在研究天体或卫星在空间的运行轨迹时，可以将它们的力学模型定义为质点。如果将物体看成质点会失去其研究意义，则可将物体定义为由多个质点组成的系统，该模型称为**质点系**。在研究物体的运动时，若物体的变形可忽略不计，则该物体力学模型为一种特殊的质点系，称为**刚体**。多个刚体组成的系统称为**刚体系**。例如在对机械、机构运动进行分析时，当构成工程对象各部件的变形对其运动状态的影响可忽略不计时，各部件的力学模型可定义为刚体，整个对象为刚体系。质点、质点系、刚体与刚体系通称为**离散系统**，它是理论力学的研究对象。

理论力学不仅仅是要建立力学基本概念与理论，更重要的是要得到解决工程实际中力学问题的基本方法。所以，理论力学尽管起源于物理学的一个独立分支，但其研究内容与方法已大大超出物理学中的相关内容，所解决的问题也是工程中常见的，其研究方法是工程中通用的。

理论力学的研究内容包括三部分：

静力学——研究物体的受力、力系的简化与平衡条件及其应用。

运动学——研究点和刚体运动的几何性质（包括位移、轨迹、速度和加速度），不考虑引起

物体运动的物理原因。

动力学——研究物体的运动与受力之间的关系。

理论力学研究力学中最普遍、最基本的规律，是一门理论性较强的技术基础课，对训练逻辑思维有很大的帮助。通过理论力学的学习，可以建立工程意识、直接解决许多工程实际问题；同时，理论力学还是工科专业一系列后续课程如材料力学、结构力学、弹性力学、流体力学、振动学、机械原理及设计等的重要基础，一些新兴的力学学科如生物力学、物理力学等也是以理论力学为基础的。

理论力学的课程系统性和实践性较强，学习过程中不仅要掌握基本概念，领会公式的推导依据、物理意义、应用条件及范围，还要重视分析问题与解决问题的方法，善于抓住工程问题的本质，建立合理的力学模型，培养抽象和逻辑思维能力。通过新颖灵活、不同层次的习题训练，培养综合分析和创新能力，为今后解决工程实际问题、从事科学研究工作打下坚实的基础。

第一篇 静 力 学

静力学主要研究作用于物体上的力系的平衡规律。所谓“**平衡**”是指物体相对于惯性参考系(如地面)处于静止或作匀速直线运动。

在静力学中把物体都看作**刚体**,故称为刚体静力学。所谓刚体是指在任何受力情况下都不产生变形的物体,这是一个理想的力学模型。

力是物体间相互的机械作用。力对物体的作用效应有两方面:一方面是使物体的运动状态发生改变,这种效应称为**运动效应**或**外效应**;另一方面是使物体形状或尺寸发生改变,这种效应称之为**变形效应**或**内效应**。由于静力学中只研究刚体,因而只研究力的运动效应。

力有三要素:大小、方向(包括方位与指向)、作用点,故力是矢量。常用黑体字母 $\boldsymbol{F}$ 表示力矢量。力的单位是牛[顿](N)或千牛(kN)。

力系是指作用在物体上的一群力。

在静力学中将研究以下两个问题:

①力系的简化(或合成):用一个简单力系(甚至用一个力)等效替换一个复杂力系,以及分析物体所受外力,作出受力图。

②力系的平衡条件:使物体处于平衡的力系必须满足的条件。

工程中常见的力系,按作用线的位置,可分为平面力系和空间力系;按作用线的相互关系,可分为汇交力系、平行力系和任意力系。

力系的平衡条件在结构、构件和机械零件设计时的静力计算中有着广泛的应用。

第一章 力系的简化

工程问题中物体的受力是比较复杂的,物体之间相互作用力的真实情况更是难以完全弄清。为了分析力系对物体的总作用效应,研究力系的平衡规律,弄清物体间相互作用的整体情况,必须将力系进行简化,即将力或力系进行等效变换,得到与原来的力或力系具有同等作用效应的力系,为研究复杂力系的作用效应、分析一般情况下力系的平衡条件、得到平衡方程提供基础。本章先介绍静力学公理,力的矢量运算、力矩与力偶的概念和性质,再研究力系简化的一般方法和应用。

§1-1 静力学公理

公理是人们在生活和生产实践中长期积累的经验的总结,又经实践反复验证,被确认为符合客观实际的普遍规律。静力学公理是静力学的理论基础。

公理1(二力平衡公理) 作用在刚体上的两个力,使刚体处于平衡的必要且充分条件是这两个力等值、反向、共线,如图1-1所示。需注意,等值、反向、共线的两个力作用下的变形体

却不一定平衡。如软绳只能在等值、反向、共线的拉力作用下平衡，而不能在一对压力作用下平衡，所以对于变形体而言，公理 1 只是其平衡必要条件而非充分条件。二力平衡公理给出了最简单的力系平衡条件。仅受两个力作用处于平衡的刚体称为**二力构件(二力杆)**。

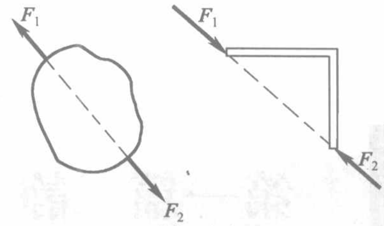


图　1-1

公理 2(加减平衡力系公理)　在作用于刚体上的力系中加上或减去任一平衡力系，不会改变原力系对刚体的作用效应。这是力系简化的重要依据。这一公理应用于某一物体，力系对物体的运动效应不会改变，但会改变对物体的变形效应，故仅适用于刚体。由此公理还可得出如下重要推论。

推论 1(力的可传性原理)　作用在刚体上的力可沿其作用线滑移到刚体内的任一点，并不会改变其对刚体的运动效应。所以对于刚体，力的三要素是大小、方向、作用线，力是滑动矢量。这一推论可由图 1-2 的等效变换得以证明。必须注意的是，该推论只能用于单个刚体，如果将其用于刚体系统，则会改变刚体的受力。如图 1-3 所示，将作用在点 K 的力沿其作用线移到另一个刚体的点 H，刚体系统中各刚体的受力肯定不同。

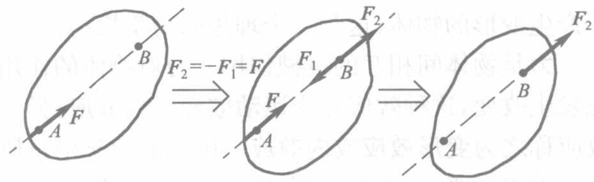


图　1-2

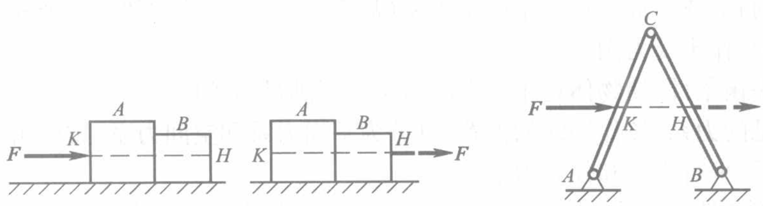


图　1-3

公理 3(力的平行四边形法则)　作用在物体上同一点的两个力可合成为一个合力，其合力作用点仍在该点，而合力的大小和方向由这两个力为邻边所构成的平行四边形的对角线来确定。如图 1-4(a)所示，即

$$\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$$

应用公理 3 求两个汇交于 A 点的合力时，以 A 为起点，以 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 为边，首尾相连作一**力三角形**，第三边 $\boldsymbol{F}_R$，即代表合力的大小和方向，如图 1-4(b)、(c)所示。这种合成法称为力三角形法则，或称为首尾相连法则。

如果作用于物体上 A 点的汇交力系为 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$ 和 $\boldsymbol{F}_5$，如图 1-5(a)所示，此时可连续应用力三角形法则，把各力顺次合成，求得其合力 $\boldsymbol{F}_R$，如图 1-5(b)所示。可以看出，如果将力系中各力矢按首尾相连的法则顺次画出，则连接第一个力矢的始端与最后一个力矢的末端的矢量，就是合力

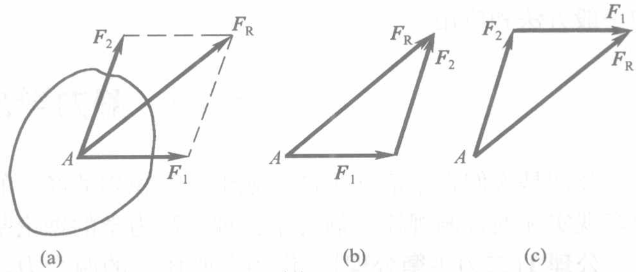


图　1-4

$\boldsymbol{F}_R$，如图 1-5(c)所示。这样画出的多边形称为**力多边形**。合力为力多边形的封闭边。

这一公理是力系合成和分解的理论基础。

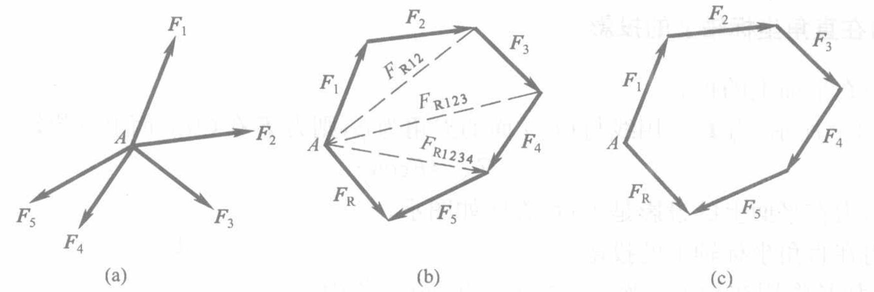


图　1-5

推论 2（三力平衡汇交定理）　刚体受三个力作用处于平衡，若其中两个力作用线相交，则这三个力必共面，且第三个力作用线必过汇交点。

证明：刚体受三个力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 作用处于平衡，如图 1-6 所示，其中 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的作用线相交于 O 点。由力的可传性原理，将 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 分别沿其作用线滑移至交点 O，再由平行四边形法则求得其合力 $\boldsymbol{F}_{12}$，由于刚体是平衡的，故 $\boldsymbol{F}_{12}$ 与 $\boldsymbol{F}_3$ 必满足二力平衡条件，二力共线。即有 $\boldsymbol{F}_3$ 的作用线必定过交点 O，且与 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 共面。

三力平衡汇交定理常用于确定三力问题中第三个力作用线的位置。由于在证明过程中应用了力的可传性原理，故该定理也只适用于刚体。

公理 4（作用与反作用定律）　作用力和反作用力总是同时存在，且大小相等、方向相反，沿同一条直线分别作用在两个相互作用的物体上。

图 1-7 中的 $\boldsymbol{F}_N$ 和 $\boldsymbol{F}_N'$ 就是作用力与反作用力的关系。必须注意，作用力与反作用力虽等值、反向、共线，但分别作用在两个不同的物体上，因而不能互相平衡。该公理是物体系统受力分析的依据。

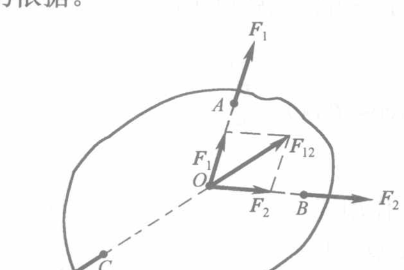


图　1-6

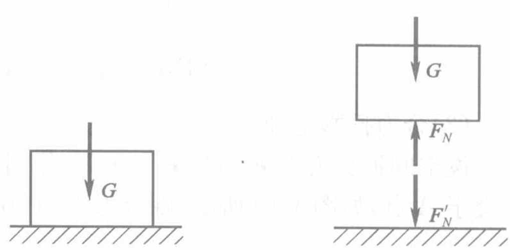


图　1-7

公理 5（刚化公理）　变形体在某一力系作用下处于平衡，若把变形体刚化为刚体，则其平衡状态不变。

刚化原理建立了刚体与变形体平衡条件的联系，提供了用刚体模型研究变形体平衡的依据。但需注意，刚体平衡条件对变形体来说必要而非充分，如图 1-8 所示的刚体受压平衡，相应变形体（软绳）受同样压力却不平衡。

图　1-8

§1-2　力的投影、力矩与力偶

1. 力在直角坐标轴上的投影

(1)力在平面上的投影

如图 1-9 所示，力 $\boldsymbol{F}$ 作用线与 Oxy 面的夹角为 φ，则力 $\boldsymbol{F}$ 在 Oxy 面上的投影大小为

$$F_{xy}=F\cos\varphi \tag{1-1}$$

注意，力在平面上的投影是矢量，方向如图示。

(2)力在直角坐标轴上的投影

已知力 $\boldsymbol{F}$ 作用在 O 点，坐标系如图 1-9 所示，若用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示 x、y、z 三个坐标轴方向的单位矢量，则力 $\boldsymbol{F}$ 在这三个坐标轴上的投影分别为

$$\left.\begin{aligned}F_x&=F\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{i})\\F_y&=F\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{j})\\F_z&=F\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{k})\end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

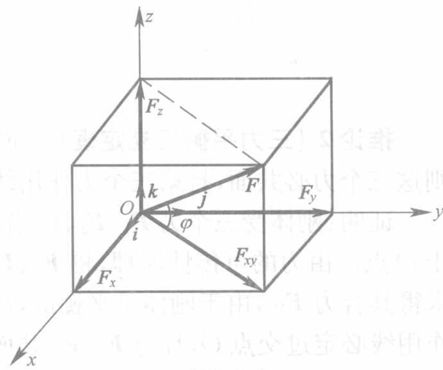


图 1-9

计算力在 x、y 坐标轴上的投影时也可先将力 $\boldsymbol{F}$ 投影到轴所在的 Oxy 平面上，然后把在该平面上的投影 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 再投影到轴上。如图 1-9 所示，于是得到

$$\left.\begin{aligned}F_x&=F_{xy}\cos(\boldsymbol{F}_{xy},\boldsymbol{i})\\F_y&=F_{xy}\cos(\boldsymbol{F}_{xy},\boldsymbol{j})\end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

按平行四边形法则，将力 $\boldsymbol{F}$ 分解为沿三个坐标轴方向的分力 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$、$\boldsymbol{F}_z$(图 1-9)，则

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_x+\boldsymbol{F}_y+\boldsymbol{F}_z=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k} \tag{1-4}$$

式(1-4)为力 $\boldsymbol{F}$ 的解析表达式。

反之，若已知力 $\boldsymbol{F}$ 的投影 F_x、F_y、F_z，则力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向余弦可求出：

$$\left.\begin{aligned}&F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\\&\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{i})=\frac{F_x}{F},\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{j})=\frac{F_y}{F},\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{k})=\frac{F_z}{F}\end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

(3)合力投影定理

设空间汇交力系 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、…、$\boldsymbol{F}_n$ 作用于刚体上，作用线汇交于 A 点，如图 1-10 所示，则合力 $\boldsymbol{F}_R$ 作用点仍为 A 点，且

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\cdots+\boldsymbol{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$$

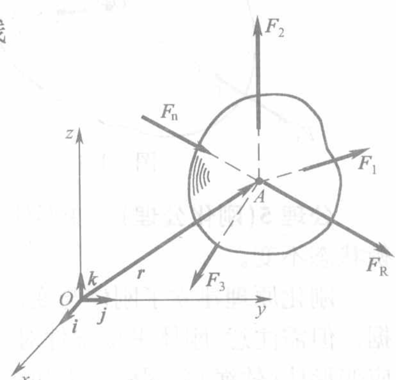


图　1-10

将每一个分力和合力都进行解析表达：

$$\boldsymbol{F}_i=F_{ix}\boldsymbol{i}+F_{iy}\boldsymbol{j}+F_{iz}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=F_{\mathrm{R}x}\boldsymbol{i}+F_{\mathrm{R}y}\boldsymbol{j}+F_{\mathrm{R}z}\boldsymbol{k}$$

其中 $F_{\mathrm{R}x}$、$F_{\mathrm{R}y}$、$F_{\mathrm{R}z}$ 为合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 在三个坐标轴上的投影，从而有

$$F_{\mathrm{R}x}\boldsymbol{i}+F_{\mathrm{R}y}\boldsymbol{j}+F_{\mathrm{R}z}\boldsymbol{k}=\sum_{i=1}^{n}F_{ix}\boldsymbol{i}+\sum_{i=1}^{n}F_{iy}\boldsymbol{j}+\sum_{i=1}^{n}F_{iz}\boldsymbol{k}$$

所以

$$F_{\mathrm{R}x}=\sum_{i=1}^{n}F_{ix},F_{\mathrm{R}y}=\sum_{i=1}^{n}F_{iy},F_{\mathrm{R}z}=\sum_{i=1}^{n}F_{iz} \tag{1-6}$$

上式表明：合力在某一轴上的投影等于各分力在同一轴上投影的代数和，这就是**合力投影定理**。

求出合力的投影后，则合力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{R}$ 的大小及与三个坐标轴间的方向余弦可确定：

$$F_\mathrm{R}=\sqrt{(\sum F_{ix})^2+(\sum F_{iy})^2+(\sum F_{iz})^2}$$
$$\cos(\boldsymbol{F}_\mathrm{R},\boldsymbol{i})=\frac{\sum F_{ix}}{F_\mathrm{R}},\cos(\boldsymbol{F}_\mathrm{R},\boldsymbol{j})=\frac{\sum F_{iy}}{F_\mathrm{R}},\cos(\boldsymbol{F}_\mathrm{R},\boldsymbol{k})=\frac{\sum F_{iz}}{F_\mathrm{R}} \tag{1-7}$$

2. 力　矩

力对刚体的运动效应是使刚体的运动状态发生改变（包括移动和转动），其中力对刚体的移动效应可用力矢来度量，而力对刚体的转动效应可用力矩来度量。

(1)力对点之矩

用扳手紧螺钉时，力可以使扳手绕螺钉中心转动，且力愈大，螺钉就上得愈紧；力的作用线距螺钉中心的距离（力臂）愈远，就愈省力。这说明力使物体绕某点的转动效应，取决于力的大小及力臂的大小。这种转动效应可用力对点之矩来度量。

力对点之矩是力使刚体绕某点（矩心）转动效应的度量。

作用于 A 点的力 $\boldsymbol{F}$ 使刚体绕矩心 O 转动（图 1-11），这转动效应不仅与力矩的大小、转向有关，还与由力的作用线与矩心所组成的平面的方位有关。所以力对点之矩是矢量，叫**力矩矢**，用 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 表示。$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 的大小等于力的大小与矩心到力作用线的垂直距离 h（力臂）的乘积，其方位和该力与矩心组成的平面的法线方位相同，其指向由右手螺旋规则来确定，如图 1-11所示。从图中可知力矩的大小为

$$M_O(\boldsymbol{F})=Fh$$

若以 $\boldsymbol{r}$ 表示力作用点 A 的矢径，则矢积 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 的大小和方向与力矩矢 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 的大小和方向分别相同，故可得

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{1-8}$$

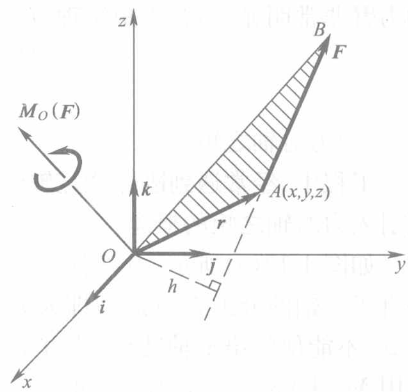


图 1-11

上式为力对点之矩的矢积表达式，即：力对点的力矩矢等于矩心到该力作用点的矢径与该力的矢积。

在矩心 O 点作空间直角坐标系 $Oxyz$ 如图 1-11 所示，坐标轴 x、y、z 方向的单位矢量分别为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$。力作用点 A 的坐标为 $A(x, y, z)$，力在三个坐标轴上的投影分别为 F_x、F_y、F_z，则矢径 $\boldsymbol{r}$ 和力 $\boldsymbol{F}$ 可分别解析表达为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$$

代入式(1-8)，得

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=(yF_z-zF_y)\boldsymbol{i}+(zF_x-xF_z)\boldsymbol{j}+(xF_y-yF_x)\boldsymbol{k} \tag{1-9}$$

式(1-9)为力矩矢 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 的解析表达式，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 前面的三个系数分别为 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 在三个坐标轴上的投影。

从定义可知，力矩矢 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 的大小和方向与矩心 O 的位置密切相关，矩心位置改变，力矩矢 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 随之改变，故力矩矢的始端必须在矩心，不可随意变动，这种矢量称为**定位矢量。**

在平面问题中，只需力矩的大小和转向就可以确定力矩对刚体的转动效应。因此，平面力矩是一代数量，通常规定力使刚体绕矩心逆时针转动的力矩为正，反之为负。

(2)合力矩定理

如图 1-10 所示，设汇交于刚体上 A 点的空间汇交力系为 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、…、$\boldsymbol{F}_n$，选坐标原点 O 为矩心，汇交点 A 的矢径为 $\boldsymbol{r}$，则合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 对 O 点的力矩为

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\cdots+\boldsymbol{F}_n)=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_n$$

由于力是滑移矢量，将 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、…、$\boldsymbol{F}_n$ 都移至 A 点，则：

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_1),\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_2),\cdots,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_n=\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_n)$$

所以
$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}})=\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_1)+\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_2)+\cdots+\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_n)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) \tag{1-10}$$

即合力对某点之矩等于各分力对同一点之矩的矢量和，这就是**合力矩定理。**

在平面问题中，合力对某点之矩等于各分力对同一点之矩的代数和。

例 1-1 如图 1-12 所示，垂直折杆 OAB 在 B 端受力 $\boldsymbol{F}$ 作用，试求力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点之矩。

解:在这一问题中，把力 $\boldsymbol{F}$ 分解成两个分力 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$，而分力 $\boldsymbol{F}_x$ 的作用线过矩心，分力 $\boldsymbol{F}_y$ 的力臂非常明显，由合力矩定理有

$$\begin{aligned}M_O(\boldsymbol{F})&=M_O(\boldsymbol{F}_x)+M_O(\boldsymbol{F}_y)\\&=F\sin\beta\cdot(a^2+b^2)\end{aligned}$$

(3)力对轴之矩

工程中，经常遇到刚体绕定轴转动的情形，为了度量力使刚体绕定轴转动的作用效果，必须引入力对轴之矩的概念。

如图 1-13(a)所示，力 $\boldsymbol{F}$ 使门绕其固定轴 z 转动。现将力 $\boldsymbol{F}$ 分解为平行于 z 轴分力 $\boldsymbol{F}_z$ 和垂直于 z 轴的分力 $\boldsymbol{F}_{xy}$(此力即为力 $\boldsymbol{F}$ 在垂直于 z 轴的平面 Oxy 上的投影)。由经验可知：分力 $\boldsymbol{F}_z$ 不能使门绕 z 轴转动，故力 $\boldsymbol{F}_z$ 对 z 轴的力矩为零；只有分力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 才能使门绕 z 轴转动。现用 $M_z(\boldsymbol{F})$ 表示力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的矩，点 O 为平面 Oxy 与 z 轴的交点，h 为点 O 到力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 作用线的距离。因此，力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的力矩就是分力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 对点 O 的力矩，即

$$M_z(\boldsymbol{F})=M_O(\boldsymbol{F}_{xy})=\pm F_{xy}h \tag{1-11}$$

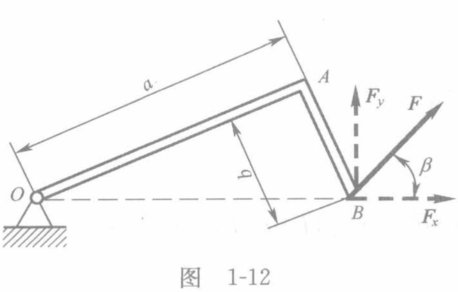


图 1-12

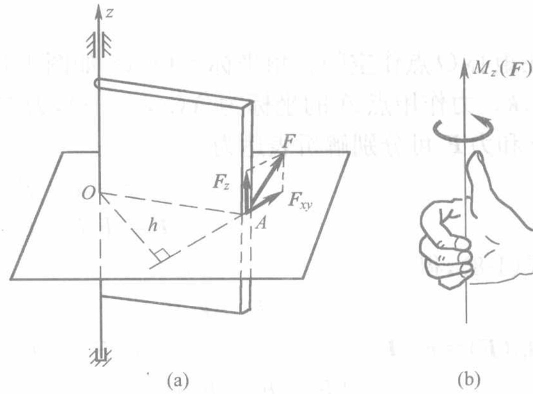


图 1-13

因此，**力对轴之矩**是力使刚体绕该轴转动效应的度量，是一个代数量，其绝对值等于该力

在垂直于该轴的平面上的投影对于这个平面与该轴的交点之矩的大小，按右手螺旋法则来确定其正负号，如图 1-13(b)所示，拇指指向与 z 轴正向一致为正，反之为负。

从定义可知，当力 $\boldsymbol{F}$ 与轴相交(此时 $h=0$)或与轴平行(此时 $F_{xy}=0$)时，力对轴之矩为零，即当力与轴在同一平面时，力对该轴的矩等于零。

设力 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 F_x、F_y、F_z，这三个投影的大小分别等于力 $\boldsymbol{F}$ 沿三个坐标轴方向的分力 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$、$\boldsymbol{F}_z$ 的大小，力作用点 A 的坐标为 x、y、z，如图 1-14 所示。根据合力矩定理，得

$$M_z(\boldsymbol{F})=M_O(\boldsymbol{F}_{xy})=M_O(\boldsymbol{F}_x)+M_O(\boldsymbol{F}_y)$$

即
$$M_z(\boldsymbol{F})=xF_y-yF_x$$

同理可得 $M_y(\boldsymbol{F})$、$M_x(\boldsymbol{F})$的表达式。三式合写为

$$\left.\begin{aligned}M_x(\boldsymbol{F})&=yF_z-zF_y\\M_y(\boldsymbol{F})&=zF_x-xF_z\\M_z(\boldsymbol{F})&=xF_y-yF_x\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}12)$$

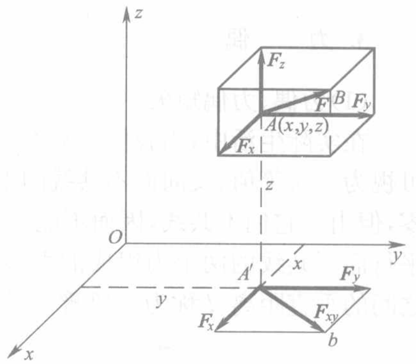


图　1-14

以上三式是计算力对轴之矩的解析式。

(4)力对点之矩与力对通过该点的轴之矩的关系

对比式(1-9)和式(1-12)可看出，力对点的矩矢 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$在三个坐标轴上的投影与力对相应坐标轴之矩相等：

$$\left.\begin{aligned}[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_x&=M_x(\boldsymbol{F})\\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_y&=M_y(\boldsymbol{F})\\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z&=M_z(\boldsymbol{F})\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}13)$$

即力对点的矩矢在通过该点的某轴上的投影，等于力对该轴之矩。

式(1-13)建立了力对点之矩与力对轴之矩之间的关系。如果力对通过点 O 的直角坐标轴 x、y、z 的矩是已知的，则可求得该力对点 O 之矩的大小和方向余弦为

$$\left.\begin{aligned}&|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})|=\sqrt{[M_x(\boldsymbol{F})]^2+[M_y(\boldsymbol{F})]^2+[M_z(\boldsymbol{F})]^2}\\&\cos\alpha=\frac{M_x(\boldsymbol{F})}{|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})|},\cos\beta=\frac{M_y(\boldsymbol{F})}{|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})|},\cos\gamma=\frac{M_z(\boldsymbol{F})}{|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})|}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}14)$$

式中，α、β、γ 分别为力矩矢 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$与 x、y、z 轴间的夹角。

反之，若要求力对某轴之矩，而力臂不是很明了，则可先计算力对该轴上一点之矩，再把这力矩矢投影到该轴上去。

例 1-2　试求图 1-15 所示力 $\boldsymbol{F}$ 对 OD 之矩。$F=10\,\text{kN}$，各边长分别为 20 cm、30 cm、40 cm。

解：由于力对 OD 之力臂不是很明了，故先求出力对 O 点之矩矢，再将其投影到 OD 上去，即

$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_{OD}=M_{OD}(\boldsymbol{F})$$

从图中可知，$x=0$，$y=0.4\,\text{m}$，$z=0.3\,\text{m}$

$$F_x=0,\ F_y=0,\ F_z=10\,\text{kN}$$

由式(1-9)得：

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})=0.4\times10\boldsymbol{i}=4\boldsymbol{i}\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

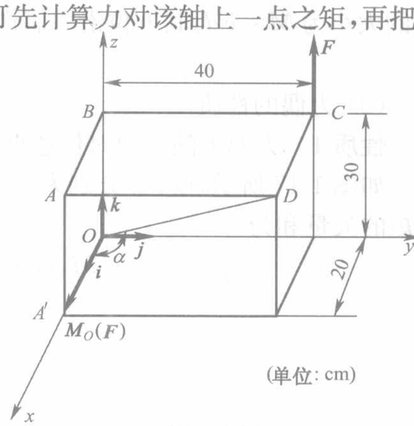


图　1-15

而

$$\cos\alpha=\frac{OA'}{OD}=\frac{20}{\sqrt{20^2+30^2+40^2}}=\frac{20}{53.85}=0.371$$

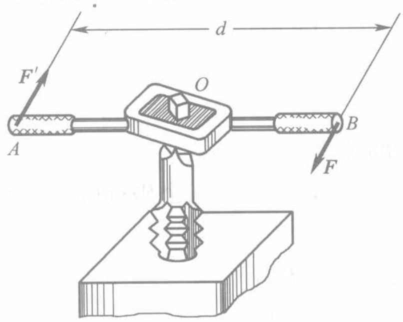
所以

$$M_{OD}(\boldsymbol{F})=M_O(\boldsymbol{F})\cdot\cos\alpha=4\times0.371=1.484\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

3. 力　偶

(1)力偶、力偶矩矢

在实际生活中，当我们转动方向盘或用丝锥攻螺丝时，两手加于方向盘或丝锥铰手上的力可视为一对等值、反向而不共线的平行力 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$，如图 1-16(a)所示。很显然，$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$的矢量和为零，但由于它们不共线，因而不能平衡，且改变物体的转动状态。这种由大小相等、方向相反、平行而不共线的两个力组成的力系，称为**力偶**，如图 1-16(b)所示，记为($\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$)。力偶中两力之间的垂直距离 d 称为**力偶臂**，力偶所在的平面称为**力偶作用面。**



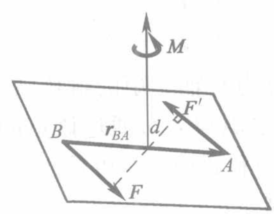


图　1-16

力偶不能合成为一个力，不能用一个力来等效替换，因此，力和力偶是静力学中的两个基本元素。

力偶不是平衡力系，其作用效应是使物体产生转动，这个转动效应取决于以下三要素：力偶中力与力偶臂乘积的大小、力偶的转向和力偶作用面的方位。可用**力偶矩矢**来度量这个转动效应，用 $\boldsymbol{M}$ 表示。如用矢积表达，则

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=\boldsymbol{r}_{AB}\times\boldsymbol{F}\\ \text{或}\quad \boldsymbol{M}&=\boldsymbol{r}_{BA}\times\boldsymbol{F}'\end{aligned}\right\}\tag{1-15}$$

$\boldsymbol{M}$ 的大小为 $M=Fd$，其方位沿力偶作用面的法线，指向按右手螺旋法则确定，如图 1-16(b)所示。

(2) 力偶的性质

性质 1　力偶中的两力对任意点的力矩之和等于力偶矩矢。

如图 1-17 所示，$\boldsymbol{r}_A$、$\boldsymbol{r}_B$ 分别为任一点 O 到 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$作用点 A、B 的矢径，则这两个力对 O 点之矩的矢量和为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})+\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}')&=\boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{F}+\boldsymbol{r}_B\times\boldsymbol{F}'\\&=\boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{F}+\boldsymbol{r}_B\times(-\boldsymbol{F})\\&=(\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{r}_B)\ \boldsymbol{F}\\&=\boldsymbol{r}_{BA}\times\ \boldsymbol{F}\\&=\boldsymbol{M}\end{aligned}$$

由此可见，力偶对空间任一点的矩矢都等于力偶矩矢，与矩心位置无关。