高等学校规划教材

运筹学简明教程

主 编 李苏北

煤炭工业出版社

高等学校规划教材

运筹学简明教程

主　编　李苏北
副主编　姜英姿　张红雷
　　　　赵建强

煤 炭 工 业 出 版 社
·北　京·

内 容 提 要

本书是普通高等教育运筹学课程的教材．全书系统而简明地介绍了运筹学的线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、网络规划和决策分析等各分支的主要内容．本书力避复杂的理论证明，力求通俗易懂、简明扼要，以大量事例讲解了运筹学的基本原理、方法思路和算法步骤．各章后附有复习思考题和习题，以便进一步地复习、消化课本知识和深入学习．

本书可供高等院校信息与计算科学、管理等各相关专业的本科生、专科生使用，也可供政府管理部门、企业、公司等管理干部及工程技术人员学习使用．

图书在版编目（CIP）数据

运筹学简明教程/李苏北主编．北京：煤炭工业出版社，2008.12

ISBN 978－7－5020－3440－5

Ⅰ．运… Ⅱ．李… Ⅲ．运筹学－教材 Ⅳ．O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 169712 号

煤炭工业出版社 出版
（北京市朝阳区芍药居 35 号 100029）
网址：www.cciph.com.cn
北京京科印刷有限公司 印刷
新华书店北京发行所 发行
*
开本 787mm×1092mm 1/16 印张 12½
字数 303 千字 印数 1—3,000
2008 年 12 月第 1 版 2008 年 12 月第 1 次印刷
社内编号 6245 定价 25.00 元

前　言

运筹学是20世纪40年代开始形成的一门应用学科.它广泛应用于工业、农业、交通运输、国防、通信、政府机关等各个部门、各个领域，主要解决最优生产计划、最优分配、最佳设计、最优决策、最佳管理等最优化问题.掌握优化思想并善于对遇到的问题进行优化处理，是当今社会各级各类管理人员必须具备的基本素质.运筹学就是帮助读者学会如何根据实际问题的特点，抽象出不同类型的数学模型，然后选择不同的方法进行计算.运筹学解决实际问题的系统优化思想，以及从提出问题、分析建模、求解到方案实施的一套严格科学的方法，使得它在培养和提高人才素质方面起到了十分重要的作用.运筹学已成为高等院校许多专业的必修课.

本教材是为适应应用型本科院校各相关专业对运筹学课程教学的需要而编写的.它是在我们多年的教学实践基础上，吸收了目前国内运筹学教材的优秀成果，反映了近年来运筹学的最新发展成果，涵括了由教育部所规定的运筹学课程要求的基本内容.本教材尽量避免复杂的理论证明，力求通俗易懂、简明扼要地讲解运筹学的基本原理、方法思路和算法步骤.本教材注重联系实际，以各种实际问题为背景引出运筹学各分支的基本概念、模型和方法，并侧重各种方法及其应用.

本教材在内容选择上，兼顾了各层次读者的需要，包含了运筹学的线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、网络规划和决策分析等主要分支，可适合本科生、专科生等各层次教学的需要.为帮助读者掌握教材的重点，本教材每章后附有复习思考题和习题供读者练习.

本教材由李苏北任主编.绪论、第1章、第2章、第3章和第8章由李苏北编写，第4章由姜英姿编写，第5章由张红雷编写，第6章由赵建强编写，第7章由姜英姿和张红雷共同编写.李苏北对全书进行了统稿.

由于编者水平有限，书中若有不妥或错误之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2008年11月

目　录

绪　论

一、概　述

运筹学是用数学方法研究各种系统最优化问题的一门学科．其研究方法是应用数学语言来描述实际系统，建立相应的数学模型并对模型进行研究和分析，据此求得模型的最优解．其目的是制定合理运用人力、物力和财力的最优方案；为决策者提供科学决策的依据．其研究对象是各种社会系统，可以是对新的系统进行优化设计，也可以是研究已有系统的最佳运营问题．因此，运筹学既是应用数学，也是管理科学，同时也是系统工程的基础之一．

运筹学一词起源于20世纪30年代，其英文原名为Operations Research或Operational Research，缩写为“O.R.”，可直译为“运用研究”或“作业研究”．由于运筹学涉及的主要领域是管理问题，研究的基本手段是建立数学模型，并比较多地运用各种数学工具，从这点出发，曾有人将运筹学称作“管理数学”．1957年我国数学家从“夫运筹策帷幄之中，决胜于千里之外”（见《史记·高祖本纪》）这句古语中摘引“运筹”二字，将“O.R.”正式译作运筹学，比较恰当地反映了这门学科的性质和内涵．

朴素的运筹学思想在我国古代文献中就有不少记载，例如田忌赛马和丁渭主持皇宫的修复等故事，但运筹学这个名词的正式使用是在1938年，当时英国为解决空袭的早期预警，做好反侵略战争准备，积极进行雷达的研究．但随着雷达性能的改善和配置数量的增多，出现了来自不同雷达站的信息以及雷达站同整个防空作战系统的协调配合问题．1938年7月，波得塞（Bawdesey）雷达站的负责人罗伊（A.P.Rowe）提出立即进行整个防空作战系统运行的研究，并用“Operational Research”一词作为这方面研究的描述，这就是“O.R.”（运筹学）这个名词的起源．运筹学小组的活动开始局限于对空军战术的研究，以后扩展到海军和陆军，并参与战略决策的研究．这种研究在美国、加拿大等国很快得到效法．第二次世界大战中，各国的运筹学小组广泛进行了如何提高轰炸效果或侦察效果，如何用水雷有效封锁敌方海面和其他战略战术方面的分析，为取得反法西斯战争的胜利作出了贡献．1939年苏联学者康托洛维奇出版了《生产组织与计划中的数学方法》一书，对列宁格勒胶合板厂的计划任务建立了一个线性规划的模型，并提出了“解乘数法”的求解方法，为数学与管理科学的结合作出了开创性的工作．

第二次世界大战后运筹学的研究主要转向经济方面，重点集中在如何用一定的投入生产更多的产出或一定的产出如何用更少的投入来生产，从而使运筹学在管理科学中获得了长足的发展．随着战后各国工业的逐步恢复和繁荣，由于组织内与日俱增的复杂性和专门化所产生的问题，人们认识到这些问题基本上与战争中所曾面临的问题类似，只是

具有不同的现实环境而已，运筹学就这样深入工商企业和其他部门，并在20世纪50年代以后得到了广泛的应用．对于系统配置、聚散、竞争的运用机理的深入研究和应用形成了比较完备的一套理论，如规划论、排队论、存贮论、决策论等．由于其理论上的不断成熟，加上电子计算机的问世又反过来促进了运筹学的发展，经过科学家们50多年的不断探索，目前运筹学已成为一个门类齐全、理论完善、有着广泛应用前景的学科．

近年来，有关运筹学的应用和理论研究都得到迅速发展．在理论研究方面，涌现出许多新的模型方法和算法．随着运筹学在各种专业学科中的广泛应用，结合专业特点，产生和发展了许多新的专业分支．研究的内容有：军事运筹学、运筹学在卫生医疗系统中的应用、运筹学在交通运输中的应用、运筹学在旅游观光事业中的应用、运筹学在体育运动中的应用、能源运筹学模型、教育运筹学模型和刑事司法运筹学模型等．而且，运筹学与相关学科的交叉渗透还将进一步得到发展．

另一方面，随着运筹学应用逐渐向复杂的社会大系统渗透，运筹学的研究内容已出现了定量分析和定性分析相结合的发展趋势．同时，运筹学的发展与计算机技术的发展密切相关，计算机的飞速发展将深刻地影响着运筹学将来的发展．随着计算机技术的提高，许多目前还不能求解的运筹学问题在将来会被解决．运筹学的应用也会被推向越来越广的领域．

随着信息技术的飞速发展，运筹学的应用领域还将进一步得到拓宽和发展．研究如何应用现代信息技术和运筹学为社会经济系统服务将成为运筹学的一项重要内容．

二、运筹学研究的基本特点及步骤

（一）运筹学研究的基本特点

运筹学研究的基本特点是：考虑系统的整体优化、多学科的配合以及模型方法的应用．

系统的整体优化　所谓系统可以理解为是由相互关联、相互制约、相互作用的一些部分组成的具有某种功能的有机整体．例如，一个企业的经营管理是由很多子系统组成，包括生产、销售、技术、供应、财务等，各子系统的工作好坏直接影响企业经营管理的好坏．但各子系统的目标往往不一致，生产部门为提高劳动生产率希望尽可能增大批量；销售部门为满足更多用户需要，要求增加花色品种；财务部门希望减少积压，加速流动资金周转，降低成本．运筹学不是对每一个决策行为孤立地进行评价，而是把它同系统内所有其他重要的相互作用结合起来作出评价，把相互影响的各方面作为一个统一体，从总体利益的观点出发，寻找出一个优化协调的方案．

多学科的配合　一个企业的有效管理涉及到很多方面，运筹学研究中吸收来自不同领域、具有不同经验和技能的专家．由于专家们来自不同的学科领域，具有不同的经历经验，增强了发挥小组集体智慧提出问题和解决问题的能力．这种多学科的协调配合在研究的初期、在分析和确定问题的主要方面、在选定和探索解决问题的途径时，显得特别重要．

模型方法的应用　在各门学科的研究中广泛应用实验的方法，但运筹学研究的系统

往往不能搬到实验室来，代替的方法是建立这个问题的数学模型或模拟模型．如果说辅助决策是运筹学应用的核心，建立模型则是运筹学方法的精髓．围绕着模型的建立、修正与应用，运筹学的研究可划分为如下步骤．

（二）运筹学的研究步骤

1．分析与表述问题

首先对研究的问题和系统进行观察分析，归纳出决策的目标及制订决策时在行动和时间等方面的限制．分析时往往先提出一个初步的目标，通过对系统中各种因素和相互关系的研究，使这个目标进一步明确化．此外还需要向有关人员进一步讨论，明确有关研究问题的过去与未来，问题的边界、环境以及包含这个问题在内的更大系统的有关情况，以便在对问题的表述中明确要不要把整个问题分成若干较小的子问题，确定问题中哪些是可控的决策变量，哪些是不可控的变量、确定限制变量取值的工艺技术条件及对目标的有效度量等．

2．建立模型

模型是真实系统的代表，是对实际问题的抽象概括和严格的逻辑表达．模型表达了问题中可控的决策变量、不可控变量、工艺技术条件及目标有效度量之间的相互关系．模型的正确建立是运筹学研究中的关键一步．对模型的研制是一项艺术，它是将实际问题、经验、科学方法三者有机结合的创造性的工作．建立模型的好处：① 使问题的描述高度规范化，如管理中，对人力、设备、材料、资金的利用安排都可以归纳为所谓资源的分配利用问题，可建立起一个统一的规划模型，而对规划模型的研究代替了对一个个具体问题的分析研究．② 建立模型后，可以通过输入各种数据资料，分析各种因素同系统整体目标之间的因果关系，从而确立一套逻辑的分析问题的程序方法．③ 建立系统的模型为应用计算机来解决实际问题架设起桥梁．建立模型时既要尽可能包含系统的各种信息资料，又要抓住本质的因素．一般建模时应尽可能选择建立数学模型，但有时问题中的各种关系难以用数学语言描绘，或问题中包含的随机因素较多时，也可以建立起一个模拟的模型，即将问题的因素、目标及运行时的关系用逻辑框图的形式表示出来．

一个典型的运筹学模型包括以下部分：

(1) 一组需要通过求解模型确定的决策变量；

(2) 一个反映决策目标的目标函数；

(3) 一组反映系统复杂逻辑和约束关系的约束方程；

(4) 模型要使用的各种参数．

3．对问题求解

即用数学方法或其他工具对模型求解．根据问题的要求，可分别求出最优解、次最优解或满意解；依据对解的精度的要求及算法上实现的可能性，又可区分为精确解和近似解等．

4．对模型和由模型导出的解进行检验

将实际问题的数据资料代入模型，找出精确的或近似的解．为了检验得到的解是否正确，常采用回溯的方法，即将历史的资料输入模型，研究得到的解与历史实际的符合程度，以判断模型是否正确．当发现有较大误差时，要将实际问题同模型重新对比，检查实

际问题中的重要因素在模型中是否已考虑，检查模型中各公式的表达是否前后一致，检查模型中各参数取极值情况时问题的解，以便发现问题进行修正．

5．建立起对解的有效控制

任何模型都有一定的适用范围，模型的解是否有效要首先注意模型是否有效，并依据灵敏度分析的方法，确定最优解保持稳定时的参数变化范围．一旦外界条件参数变化超出这个范围时，要及时对模型及导出的解进行修正．

6．方案的实施

这是很关键但也是很困难的一步．只有实施方案后，研究成果才能有收获．这一步要求明确：方案由谁去实施，什么时间去实施，如何实施，要求估计实施过程可能遇到的阻力，并为此制订相应的克服困难的措施．

三、运筹学的主要研究分支

运筹学按所解决问题性质上的差别，将实际的问题归结为不同类型的数学模型．这些不同类型的数学模型构成了运筹学的各个分支，主要的分支有：

线性规划 经营管理中如何有效地利用现有人力、物力完成更多的任务，或在预定的任务目标下，如何耗用最少的人力、物力去实现．这类统筹规划的问题用数学语言表达，先根据问题要达到的目标选取适当的变量，问题的目标通过用变量的函数形式表示(称为目标函数)，然后对问题的限制条件用有关变量的等式或不等式表达（称为约束条件)．当变量连续取值，且目标函数和约束条件均为线性时，称这类模型为线性规划模型．有关对线性规划问题建模、求解和应用的研究构成了运筹学中的线性规划分支．

非线性规划 如果上述模型中目标函数或约束条件不全是线性的，对这类模型的研究便构成了非线性规划的分支．

动态规划 有些经营管理活动由一系列阶段组成，在每个阶段依次进行决策，而且各阶段的决策之间互相关联，因而构成一个多阶段的决策过程．动态规划则是研究一个多阶段决策过程总体优化的问题．

图与网络分析 生产管理中经常碰到工序间的合理衔接搭配问题，设计中经常碰到研究各种管道、线路的通过能力以及仓库、附属设施的布局等问题，运筹学中把一些研究的对象用节点表示，对象之间的联系用连线（边）表示，点边的集合构成图．如果给图中各边赋予某些具体的权数，并指定了起点和终点，称这样的图为网络图．图与网络分析这一分支通过对图与网络性质及优化的研究，解决设计与管理中的实际问题．

存贮论 为了保证企业生产正常进行，需一定数量材料和物资的贮备．存贮论则是研究在各种供应和需求条件下，应当在什么时间，提出多大的订货批量来补充贮备，使得用于采购、贮存和可能发生的短缺的费用损失的总和为最少等问题的运筹学分支．

排队论 排队论是一种研究排队服务系统工作过程优化的数学理论和方法．在这类系统中，服务对象何时到达以及系统对每个对象的服务时间是随机的．排队论通过找出这类系统工作特征的数值，为设计新的服务系统和改进现有系统提供数量依据．工业企业生产中多台设备的看管、机修服务等都属于这类服务系统．

对策论 一种用来研究具有对抗性局势的模型. 在这类模型中, 参与对抗的各方均有一组策略可供选择, 对策论的研究为对抗各方提供为获取对自己有利的结局应采取的最优策略.

决策论 在一个管理系统中, 采用不同的策略会得到不同的结局和效果. 由于系统状态和决策准则的差别, 对效果的度量和决策的选择也有差异. 决策论通过对系统状态的性质、采取的策略及效果的度量进行综合研究, 以便确定决策准则, 并选择最优的决策方案.

第 1 章　线性规划

线性规划是运筹学的一个重要分支，它所研究的问题大致可分为两类：一类是已知一定量的人力、财力、物力等资源，研究如何运用这些资源使完成的任务最多；另一类是给定一项任务，研究如何统筹安排，才能以最少的人力、财力、物力等资源来完成该任务．这两类问题实际上是同一问题的两个方面，都是寻求某个整体指标的最优化问题．

§1.1　线性规划问题及其数学模型

在经济活动及工程技术中会遇到各种各样的实际问题，描述实际问题共性的抽象的数学形式称为该问题的数学模型．通常建立线性规划问题数学模型要遵循以下步骤：

(1) 明确问题中有待确定的未知量（称为决策变量），并用数学符号表示；

(2) 明确问题中所有的限制条件（称为约束条件），并用决策变量的一组线性方程或线性不等式表示；

(3) 明确问题的目标，并用决策变量的一个线性函数（称为目标函数）表示，按问题的不同取最大值或最小值．

下面结合几个实际例子来介绍线性规划问题的特点，并按上面给出的三个步骤来建立它们的数学模型．

1.1.1　线性规划问题的几个实例

例 1.1-1　生产计划问题　假设某厂计划生产甲、乙两种产品，这两种产品都要分别在 A，B，C 三种不同设备上加工．按工艺资料规定：生产每件甲产品需占用设备的小时数分别为 2，1，4；生产每件乙产品需占用设备的小时数分别为 2，2，0．已知各设备计划期内用于生产这两种产品的能力（小时数）分别为 12，8，16；又知每生产一件甲产品，该厂能获得利润 2 元，每生产一件乙产品，该厂能获得利润 3 元，问该厂应安排生产两种产品各多少件才能使总的利润收入为最大？

解　(1) 明确决策变量

工厂需要确定的是甲、乙两种产品的计划生产量，设 x_1，x_2 分别为甲、乙两种产品的计划生产量，总的利润为 z．

(2) 明确约束条件

因设备 A 在计划期内有效时间为 12 小时，不允许超过．故有

$$2x_1+2x_2\leqslant 12$$

对设备 B，C 也可列出类似的不等式

$$x_1+2x_2\leqslant 8;\qquad 4x_1\leqslant 16$$

此外，产品的产量 x_1，x_2 只能取非负值，即 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$．这种限制称为变量的非负约束条件．

(3) 明确目标

工厂的目标是在各种设备能力允许的条件下，使总利润收入 $z = 2x_1 + 3x_2$ 为最大．

综合起来，该问题的数学模型为：求一组变量 x_1，x_2 的值在满足约束条件

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

的情况下，使利润 $z = 2x_1 + 3x_2$ 为最大．

例 1.1－2　运输问题　设有三个地方 A_1，A_2，A_3 生产某种物资（A_1，A_2，A_3 简称为产地），四个地方 B_1，B_2，B_3，B_4 需要该种物资（B_1，B_2，B_3，B_4 简称为销地），产地的产量和销地的销量以及产地到销地的单位运价见表 1.1－1，问如何组织物资的运输，才能在满足供需的条件下使总的运费最少？

表 1.1－1　产销运输表

单位运价/(元/t)　销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产地的产量/t
A_1	2	9	10	7	9
A_2	1	3	4	2	5
A_3	8	4	2	5	7
销地的销量/t	3	8	4	6	21 21

本问题是一个总产量等于总销量的运输问题，通常称为产销平衡运输问题．

解　建立数学模型

(1) 问题是要确定从产地 A_i $(i = 1,2,3)$ 调运多少物资到销地 B_j $(j = 1,2,3,4)$．设 x_{ij} 表示由 A_i 调到 B_j 的物资数量．

(2) 由于产销平衡，因而从 A_i $(i = 1,2,3)$ 运到 B_1，B_2，B_3，B_4 的物资数量之和应等于 A_i 的产量，即

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 9$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 5$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 7$$

而且 B_j $(j = 1,2,3,4)$ 收到 A_1，A_2，A_3 的物资数量之和应等于 B_j 的销量，即

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 8$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 6$$

在不允许有倒运条件下运量必须非负，即

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i=1,2,3;j=1,2,3,4)$$

(3) 目标是使调运的总运费最少，即

$$z=2x_{11}+9x_{12}+10x_{13}+7x_{14}+x_{21}+3x_{22}+4x_{23}+2x_{24}+8x_{31}+4x_{32}+2x_{33}+5x_{34}$$

达到最少.

综合起来，该运输问题的数学模型为：求一组变量 $x_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$在满足约束条件

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=9 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=5 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=7 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=3 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=8 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=4 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=6 \\ x_{ij} \geqslant 0 \quad (i=1,2,3;j=1,2,3,4) \end{cases}$$

的情况下，使运费

$$z=2x_{11}+9x_{12}+10x_{13}+7x_{14}+x_{21}+3x_{22}+4x_{23}+2x_{24}+8x_{31}+4x_{32}+2x_{33}+5x_{34}$$

取得最小值.

例 1.1-3 合理下料问题 某工厂生产某一种型号的机床，每台机床上需要 2.9 m，2.1 m，1.5 m 的轴分别为一根、二根、一根，这些轴需用同一种圆钢制作，圆钢的长度为 7.4 m，如果要生产 100 台机床，问应如何安排下料，才能使用料最省?

解 建立数学模型

对于每一根 7.4 m 长的钢材，可有若干种下料方式把它截取成我们所需要的轴，比如可在 7.4 m 的钢材上截取 2 根 2.9 m 的轴和 1 根 1.5 m 的轴，合计用料 2.9×2+1.5=7.3 m，残料为 0.1 m，现把所有可能的下料方式列表（见表 1.1-2）.

表 1.1-2 合理下料

下料方式 / 各方式下的轴的根数 / 轴	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	轴的需要量
2.9 m	2	1	1	1	0	0	0	0	100
2.1 m	0	0	2	1	2	1	3	0	200
1.5 m	1	3	0	1	2	3	0	4	100
残料/m	0.1	0	0.3	0.9	0.2	0.8	1.1	1.4	

(1) 问题所要确定的是每种下料方式应各用多少根 7.4 m 的圆钢，于是设 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，x_8 分别为按 B_1，B_2，B_3，B_4，B_5，B_6，B_7，B_8 方式下料的圆钢根数.

(2) 由于每台机床所需不同长度的轴的根数是确定的，因此，生产 100 台机床所需

2.9 m 的轴 100 根，2.1 m 的轴 200 根，1.5 m 的轴 100 根. 如果按 B_1 的方式下料，每根圆钢可截取 2.9 m 长的轴 2 根，则 x_1 根圆钢可截取 2.9 m 的轴 $2x_1$ 根；同样地，分别按 B_2，B_3，B_4 方式下料可在 x_2，x_3，x_4 根圆钢上分别截取 2.9 m 的轴 x_2，x_3，x_4 根，因此，所截下的 2.9 m 长的轴的总数应不少于 100 根，即满足约束条件

$$2x_1+x_2+x_3+x_4 \geqslant 100$$

相仿地，所截下的 2.1 m 长的轴的总数应满足约束条件

$$2x_3+x_4+2x_5+x_6+3x_7 \geqslant 200$$

所截下的 1.5 m 长的轴的总数应满足约束条件

$$x_1+3x_2+x_4+2x_5+3x_6+4x_8 \geqslant 100$$

显然，按每种下料方式的圆钢根数应满足非负要求，且为整数，即 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，$x_8 \geqslant 0$ 且为整数.

(3) 目标是使总的下料根数最小，即

$$z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8$$

达到最小.

综合起来，该下料问题的数学模型为：求一组变量 x_j $(j=1,2,\cdots,8)$在满足约束条件

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4 \geqslant 100 \\ 2x_3+x_4+2x_5+x_6+3x_7 \geqslant 200 \\ x_1+3x_2+x_4+2x_5+3x_6+4x_8 \geqslant 100 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,8)\text{且为整数} \end{cases}$$

使总下料根数 $z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8$ 取最小值.

1.1.2　线性规划问题的数学模型

1. 线性规划模型的一般形式

上述各例具有下列共同特征：

(1) 存在一组变量 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，称为决策变量，通常要求这些变量的取值是非负的.

(2) 存在若干个约束条件，可以用一组线性等式或线性不等式来描述.

(3) 存在一个目标函数，它是决策变量的线性函数，按实际问题求最大值或最小值.

根据以上特征，可以将线性规划问题抽象为一般的数学表达式，即线性规划问题数学模型（简称线性规划模型）的一般形式为

$$\max(\min)\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_m \\ x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

式中，max 表示求最大值，min 表示求最小值，c_j，b_i，a_{ij}是由实际问题所确定的常数.

$c_j(j=1,2,\cdots,n)$为利润系数或成本系数；$b_i(i=1,2,\cdots,m)$称为限定系数或常数项；$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$称为结构系数或消耗系数；$x_j\ (j=1,2,\cdots,n)$为决策变量；每一个约束条件只有一种符号“$\leqslant$”或“$\geqslant$”或“$=$”.

2. 线性规划模型的标准形式

由于对目标的追求和约束形式的不同，线性规划模型的具体形式是多种多样的. 为了讨论和计算方便，我们要在这众多的形式中规定一种形式，将其称为线性规划模型的标准形式.

通常线性规划模型的标准形式为

$$\max\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ \text{其中}\quad \begin{array}{ll} x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n) \\ b_i\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m) \end{array} \end{cases}$$

上述形式的特点是：

(1) 所有决策变量都是非负的；

(2) 所有约束条件都是“$=$”型；

(3) 目标函数是求最大值；

(4) 所有常数项 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$都是非负的.

线性规划模型的标准形式可以写成简缩形式：

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

线性规划模型的标准形式用矩阵或向量描述往往更为方便. 用向量表示线性规划模型的标准形式为

$$\max\ z=\boldsymbol{CX}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_jx_j=\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X}\geqslant 0 \end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}\quad (j=1,2,\cdots,n),\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

向量 $\boldsymbol{P}_j$ 是变量 x_j 对应的约束条件中的系数列向量. 用矩阵表示线性规划的标准形式为

$$\max\ z=\boldsymbol{CX}$$
$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{2n}\end{bmatrix}$$

其他符号说明同前文. 我们称 $\boldsymbol{A}$ 为约束方程的系数矩阵，一般 $m<n$，m，n 为正整数.

3. 线性规划模型的标准化

我们对线性规划问题的研究是基于标准形式进行的，因此，对于给定的非标准形式线性规划问题的数学模型，则需要将其化为标准形式. 一般地，对于不同形式的线性规划模型，可以采用以下一些方法将其化为标准形式.

(1) 对于目标函数是求最小值的线性规划问题，只要将目标函数的系数反号，即可化为等价的最大值问题.

(2) 约束条件为“$\leqslant$”（或“$\geqslant$”）类型的线性规划问题，可在不等式左边加上（或减去）一个非负的新变量，即可化为等式. 这个新增的非负变量称为松弛变量（或剩余变量），本书统称为松弛变量. 在目标函数中一般认为新增的松弛变量的系数为零.

(3) 如果在一个线性规划问题中，决策变量 x_k 的符号没有限制，我们可用两个非负的新变量 x_k' 和 x_k'' 之差来代替，即将变量 x_k 写成 $x_k=x_k'-x_k''$，且有 $x_k'\geqslant 0$，$x_k''\geqslant 0$. 通常将这样的 x_k 称为自由变量.

(4) 当常数项 b_i 为负值时，可在该约束条件的两边分别乘以 -1 即可.

例 1.1－4 将下列线性规划模型化成标准形式

$$\min\ z=3x_1-x_2-3x_3$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}x_1+x_2+x_3\leqslant 6\\ x_1+x_2-x_3\geqslant 2\\ -3x_1+2x_2+x_3=5\\ x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\ \text{无非负限制}\end{cases}$$

解 通过以下四个步骤：

(1) 目标函数两边乘上 -1 化为求最大值；

(2) 以 $x_3=x_3'-x_3''$ 代入目标函数和所有的约束条件，其中 $x_3'\geqslant 0$，$x_3''\geqslant 0$；

(3) 在第一个约束条件的左边加上松弛变量 x_4；

(4) 在第二个约束条件的左边减去剩余变量 x_5.

于是得到该线性规划模型的标准形式