普 通 高 等 教 育“十 一 五” 规 划 教 材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

DIANCICHANG
LILUN JICHU

电磁场理论基础

汤红卫 赵睿明 主 编
索雪松 高 亮 副主编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

DIANCICHANG
LILUN JICHU

电磁场理论基础

主　编　汤红卫　赵睿明
副主编　索雪松　高　亮
编　写　张　莉　王冉冉
主　审　崔　翔　杨宪章

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十一五”规划教材。

本书系统地阐述了电磁场与电磁波的基本规律、基本分析方法及其简单应用。全书共分九章，主要内容包括矢量分析、静电场、恒定电场、恒定磁场、静态电磁场边值问题的解、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波以及电磁波的辐射。本书内容精练、概念清晰、易于读懂、易于领会、便于自学，例题和习题有代表性，有助于加深对物理概念的理解。

本书可作为普通高等院校电气信息类相关专业的教学用书，也可作为相关工程科技人员的自学或参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

电磁场理论基础/汤红卫，赵睿明主编．—北京：中国电力出版社，2009

普通高等教育“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5083-8331-6

Ⅰ．电…　Ⅱ．①汤…②赵…　Ⅲ．电磁场—理论—高等学校—教材　Ⅳ．O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 214368 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号　100044　http://jc.cepp.com.cn）

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2009年3月第一版　　2009年3月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米　16开本　15.25印张　369千字

定价 **24.60** 元

前　言

为贯彻落实教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》和《教育部关于以就业为导向深化高等职业教育改革的若干意见》的精神，加强教材建设，确保教材质量，中国电力教育协会组织制订了普通高等教育"十一五"教材规划。该规划强调适应不同层次、不同类型院校，满足学科发展和人才培养的需求，坚持专业基础课教材与教学急需的专业教材并重、新编与修订相结合。本书为新编教材。

早在2000年前，人们就已经发现了磁石和摩擦起电的知识。我们的祖先利用地球磁场发明了指南针，为人类文明作出了巨大贡献。但是，人类对电、磁现象的系统性研究是从18世纪后期开始的。

1785年，库仑建立了静电、静磁的平方反比定律，标志着电学和磁学定量研究的开始。从此，电磁学进入了第一次飞跃发展时期。随后，欧姆与基尔霍夫又建立了以他们的名字命名的电路定律。但是在很长一段时间内，人们一直把电和磁看作是两个独立的现象，并不知道它们之间有什么联系。人类将电和磁作为一个整体加以研究，是从1831年法拉第发现电磁感应现象开始的。从此，电磁学进入了第二次飞跃发展时期。1865年英国学者麦克斯韦在总结和概括法拉第、安培、高斯等前人研究理论的基础上，创造性地提出了位移电流的假说，建立了电磁现象满足的基本规律，即麦克斯韦方程组，并预言了电磁波的存在。它构成了完整的经典电磁场理论体系，这标志着电磁学完成了第三次飞跃。从此，电磁场理论及其应用受到了物理学研究者的广泛而深入的研究，这些研究对20世纪初物理学中几个重大理论体系如相对论理论、量子理论等的建立起了重大作用。近30年来，电子技术、计算机和网络技术的发展，生物电磁学、环境电磁学和电磁兼容性等学科的建立，向电磁场理论提出了许多新的研究课题，也使现代电磁场理论得到了飞速发展。电磁场作为电磁能量的一种存在形式、信息传输的重要载体、探求未知世界的重要手段，它是通信、电子、电气等应用学科的重要理论基础。同时，在材料科学、生命科学和环境科学以及空间科学等新兴学科和边缘学科中也有非常广泛的应用。正因为如此，世界各国高等院校都将它作为一门必修的专业基础课程。

通常在分析求解一个物理系统中的时变电磁场问题时，严格地说都应采用电磁场理论中的分析方法，即所谓的"场"的方法，但在实际中很多情形下，也可采用电路理论中的分析方法，即所谓的"路"的方法，而且后者要简便得多。但是，"场"的方法具有普遍性，而"路"的方法具有特殊性。"路"的方法只在时变电磁场问题满足准静态的情况下适用。

电磁场理论这门课程具有理论性强、概念抽象、逻辑性严密、数学工具应用多、涉及应用领域广泛等特点。

本书在内容不浅显也不深奥、容易让学生读懂并领会的指导思想下，力求比较系统地介绍电磁场的基础理论和基本分析方法。对本课程，有如下总体要求：

（1）掌握电磁场的基本属性和规律；

（2）掌握电磁场问题的基本求解方法；

（3）了解电磁场的主要应用领域及其原理；

（4）培养用数学工具解决电磁场问题的能力。

学习本课程必须先修高等数学、大学物理等基础课程。本课程适宜安排在二年级第二学期或三年级第一学期。

由于本课程的特点，学习时应注意学习方法，否则会事倍功半。编者建议：

（1）学习本课程，首先应抓住每一章节的主要内容和重点内容。

比如在学习第一章静电场时，应明确电场强度和标量电位的计算以及电介质极化的概念和相关计算等，这是第一章的主要内容，也是重点内容。为掌握上述重点内容，还应明确电场强度、标量电位的计算方法，总体上概括起来有以下三种。

1）利用矢量积分公式法。电场强度计算式为

$$\vec{E}=\int\frac{\vec{R}}{4\pi\varepsilon R^{2}}\,\mathrm{d}q,\quad \varphi=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon R}\mathrm{d}q$$

2）利用高斯定律求解法。

3）利用泊松方程或拉普拉斯方程求解法。

抓住了上述重点内容，在学习时，思路会很清晰，也会比较轻松。

（2）围绕每一章节的主要内容或重点内容，一方面加深概念的理解，一方面进行相应的典型习题训练。

比如关于电介质极化削弱电场的概念，应明确电介质极化削弱电场的物理根源是：极化电荷产生的场与源（电荷）产生的场方向相反，而削弱了电场。在理解此概念的同时，做一些有关极化电荷的计算，能够有助于从量化的角度去理解极化对电场的影响，这样，学生接受起来会更直接，也就更容易领会。再如，要真正掌握电场强度和标量电位的计算，针对其三种计算方法，做相应的习题是必不可少的。

（3）本课程公式繁多，推导尤其多，最好对一些重要公式、定律等进行理解性记忆，如不能理解，进行机械的记忆有时对顺利完成本课程的学习也是必要的。

比如，第 2 章静电场中分布电荷在距离 $\vec{R}$ 远处引起的电场强度为

$$\vec{E}=\int\frac{\vec{R}}{4\pi\varepsilon R^{2}}\mathrm{d}q$$

学生要明白该公式是点电荷在它周围 $\vec{R}$ 远处引起的电场

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\hat{R}$$

之基础上，引入分布电荷的概念，并利用将分布电荷无限分割后再叠加的思想得到的。

一般情况下，学生都能理解这一思想和过程，但未必能记住这一过程。只要能记住此式就可进行相应的计算，当然，前提是应理解公式中每一物理量所表达的含义。

再如，学生没必要掌握坡印廷定理的推导过程，但应清楚坡印廷矢量的表达式，并能理解坡印廷矢量所表达的物理含义，通过坡印廷矢量进行相关的计算。

（4）学会对比学习和重点学习，对掌握这门课程有重要作用。

比如，静电场、恒定电场、恒定磁场这三种静态场在内容安排和学习思路上，有着很多共同点：都是先引入描述这种场的基本物理量，再引入求解此基本物理量的方法（矢量积分

公式法和利用定律求解的方法），再引入位函数（电位函数和磁位函数），最后引入位函数所满足的微分方程等。这样，通过对比学习，主线会非常清晰，有助于知识的掌握。

（5）由于本课程学习起来相对较难，踏实、努力、认真听讲、积极完成课后习题训练是学好本课程必不可少的。

本书的主要内容及学时安排如下：

第 1 章：矢量分析（4 学时）；

第 2 章：静电场（8 学时）；

第 3 章：恒定电场（4 学时）；

第 4 章：恒定磁场（6 学时）；

第 5 章：静态电磁场边值问题的解（6 学时）；

第 6 章：时变电磁场（6 学时）；

第 7 章：平面电磁波（14 学时）；

第 8 章：导行电磁波（6 学时）；

第 9 章：电磁波的辐射（4 学时）。

本书第 1、2、5、7 章由汤红卫编写，第 3、4 章由赵睿明、汤红卫编写，第 6 章由汤红卫、高莉编写，第 8、9 章由索雪松编写。全书由汤红卫主编并统稿，历时两年半完成。

本书由华北电力大学崔翔主审，武汉大学杨宪章审大纲，提出了许多意见，在此表示衷心的感谢。

由于作者的学术水平和知识结构有限，书中必有许多不足甚至错误之处，欢迎广大读者和同行专家批评指正。

编　者

2008 年 10 月

目　　录

第1章　矢　量　分　析

在许多科学技术问题中，常常要研究某种物理量的空间分布状况、时间变化规律，以及该物理量与产生它的源的相互关系。人们将某种物理量的时空分布定义为"场"，并总结了一套研究场与源的数学语言和方法，称为"场论"，又称矢量分析。电磁场理论课程中便涉及大量的作时空分布的物理量，如电场强度矢量、磁场强度矢量，还有标量电位等，通常在进行电磁场理论问题的分析时，需借助矢量分析。因此，矢量分析成为研究电磁场理论的重要工具。本章首先介绍矢量的基本概念及其代数运算和微分运算，在此基础上，引入场的基本概念，并重点讨论标量场的梯度、矢量场的散度和旋度以及矢量积分定理。

1.1　矢量的基本概念及其代数运算

1.1.1　矢量的基本概念

一、矢量与标量

既有大小又有方向的量，称为矢量（vector），如力、速度等。矢量通常用大写的黑体字母表示，如 A，或用 $\vec{A}$ 表示；其大小（即模）直接用大写的字母表示，如 A，或用 $|\vec{A}|$ 表示。

只有大小、没有方向的量，称为标量（scalar），如温度、密度等。

二、单位矢量与矢量的分量

模为1的矢量，称为单位矢量。本书以上方带有"∧"符号的黑体字母表示，如 $\hat{\boldsymbol{R}}$、$\hat{\boldsymbol{r}}$ 等。

在直角坐标系中，有一组基本单位矢量 $\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$，它们的方向与右手直角坐标系中的 x、y、z 轴方向一致，如图1-1所示。

三维空间中，任何矢量 $\vec{A}$ 可用直角坐标系中一始于原点、带箭头的有向线段来表示。箭头方向就是矢量的方向，线段的长短表示矢量的大小（模）。如图1-2所示，设矢量 $\vec{A}$ 的终点坐标为：(A_x、A_y、A_z)，则矢量 $\vec{A}$ 可表示为

$$\vec{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z \tag{1-1}$$

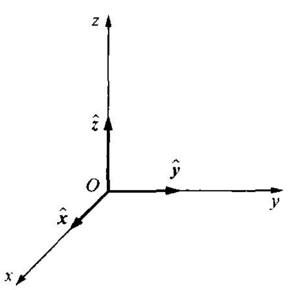

图1-1　直角坐标系中的单位矢量

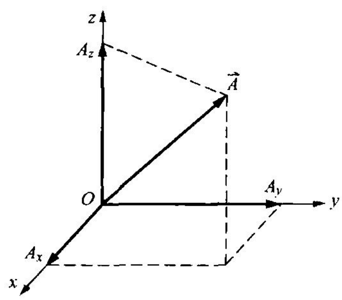

图1-2　矢量的分量

A_x、A_y、A_z 分别是矢量 $\vec{A}$ 在 x、y、z 轴方向上的分量。

矢量 $\vec{A}$ 的大小，即模为

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1-2}$$

三、位置矢量

设空间有一点 P，如图 1-3 所示。它的位置在所选择的坐标系下可以用一从原点出发的矢量 $\vec{r}$ 来表示，称矢量 $\vec{r}$ 为点 P 的位置矢量。P 点的坐标为 (x, y, z)，显然，矢量 $\vec{r}$ 的分量就是点 P 的坐标值，即

$$\vec{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$$

空间中另一点 $P'(x', y', z')$，类似地，其位置矢量 $\vec{r}'$ 可表示为

$$\vec{r}' = x'\hat{\boldsymbol{x}} + y'\hat{\boldsymbol{y}} + z'\hat{\boldsymbol{z}}$$

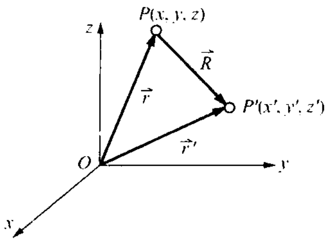

图 1-3 位置矢量、距离矢量

P 点到 P' 点的距离矢量用 $\vec{R}$ 来表示，则

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = (x - x')\hat{\boldsymbol{x}} + (y - y')\hat{\boldsymbol{y}} + (z - z')\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1-3}$$

$\vec{R}$ 的模为

$$|\vec{R}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \tag{1-4}$$

1.1.2 矢量的代数运算

一、矢量的和

两个矢量的和遵循平行四边形法则，如图 1-4 所示。则

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

二、矢量的差

两个矢量的差遵循三角形法则，如图 1-5 所示。则

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$$

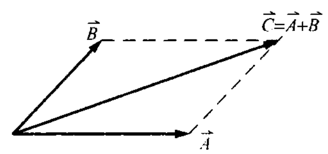

图 1-4 两个矢量的和

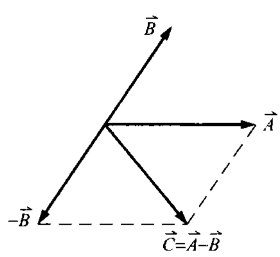

图 1-5 两个矢量的差

三、矢量点积

矢量 $\vec{A}$ 和矢量 $\vec{B}$ 的点积为

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos\theta \tag{1-5}$$

它是一标量。θ 为矢量 $\vec{A}$ 和矢量 $\vec{B}$ 的夹角。

四、矢量叉积

矢量 $\vec{A}$ 和矢量 $\vec{B}$ 的叉积为

$$\vec{A}\times\vec{B}=\hat{\boldsymbol{n}}|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\sin\theta \tag{1-6}$$

它也是一个矢量，其大小为$|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\sin\theta$，其中，$\theta$为矢量$\vec{A}$和矢量$\vec{B}$的夹角；方向为四指由$\vec{A}$指向$\vec{B}$右手螺旋大拇指所指的方向。

五、并矢运算

设有一矢量函数$\vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}$，现取它的梯度

$$\begin{aligned}\nabla\vec{A}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right)(A_x\hat{\boldsymbol{x}}+A_y\hat{\boldsymbol{y}}+A_z\hat{\boldsymbol{z}})\\&=\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right)\hat{\boldsymbol{x}}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial A_y}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right)\hat{\boldsymbol{y}}\\&\quad+\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right)\hat{\boldsymbol{z}}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned}$$

可见所得到的量是一个矢量，所不同的是这种矢量的每一个分量又是由3个分量组成的矢量，实际共有9个分量，把这种有9个分量的矢量称为并矢。

并矢是两个矢量的形式组合，这种组合并不代表任何矢量运算含义。并矢定义为

$$\vec{D}=\vec{A}\vec{B}$$

式中，$\vec{A}$称为前项；$\vec{B}$称为后项。它们的相互位置不能随意改变。

1.2 矢量函数和微分

1.2.1 矢量函数的概念

模和方向都保持不变的矢量为常矢量。比如，空间中某一矢量$\vec{A}$，其各分量均为常数。假设

$$\vec{A}=2\hat{\boldsymbol{x}}+2\hat{\boldsymbol{y}}+3\hat{\boldsymbol{z}}$$

其模为

$$|\vec{A}|=|\vec{r}|=\sqrt{2^2+2^2+3^2}=\sqrt{17}$$

方向为

$$\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\frac{2}{\sqrt{17}}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{2}{\sqrt{17}}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{3}{\sqrt{17}}\hat{\boldsymbol{z}}$$

可见，该矢量的模为常数，即不随空间的变化而变化，其方向也不随空间的变化而变化。因此，该矢量就是常矢量。

如果空间中某一矢量$\vec{A}=A_x\hat{\boldsymbol{x}}+A_y\hat{\boldsymbol{y}}+A_z\hat{\boldsymbol{z}}$的各分量不是常数，而是空间$x$、$y$、$z$的函数，即$A_x=A(x,\ y,\ z)$、$A_y=A(x,\ y,\ z)$、$A_z=A(x,\ y,\ z)$，这时的矢量$\vec{A}$就是矢量函数。

由于矢量$\vec{A}$各分量不是常数，而是空间的函数，即随空间x、y、z的变化而变化。因此，矢量$\vec{A}$又可表示为

$$\vec{A}(x,y,z)=A_x(x,y,z)\hat{\boldsymbol{x}}+A_y(x,y,z)\hat{\boldsymbol{y}}+A_z(x,y,z)\hat{\boldsymbol{z}}$$

1.2.2 矢量函数的偏导数

矢量函数 $\vec{A}(x, y, z)$ 对 $(x、y、z)$ 的偏导数分别为

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(A_x\hat{\boldsymbol{x}}+A_y\hat{\boldsymbol{y}}+A_z\hat{\boldsymbol{z}})=\frac{\partial A_x}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1-7a}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(A_x\hat{\boldsymbol{x}}+A_y\hat{\boldsymbol{y}}+A_z\hat{\boldsymbol{z}})=\frac{\partial A_x}{\partial y}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1-7b}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(A_x\hat{\boldsymbol{x}}+A_y\hat{\boldsymbol{y}}+A_z\hat{\boldsymbol{z}})=\frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial A_y}{\partial z}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1-7c}$$

矢量函数的全微分又可表示为

$$\mathrm{d}\vec{A}=\mathrm{d}(A_x\hat{\boldsymbol{x}}+A_y\hat{\boldsymbol{y}}+A_z\hat{\boldsymbol{z}})=\mathrm{d}A_x\hat{\boldsymbol{x}}+\mathrm{d}A_y\hat{\boldsymbol{y}}+\mathrm{d}A_z\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1-8}$$

式中，$\mathrm{d}A_x$、$\mathrm{d}A_y$、$\mathrm{d}A_z$ 均是标量函数的全微分。

由式（1-8）还可以看出，矢量函数的全微分实际可转化为它的三个分量即三个标量函数的全微分。

类比标量函数 $f(x, y, z)$ 的全微分

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1-9}$$

得到式（1-8）中，$\mathrm{d}A_x$、$\mathrm{d}A_y$、$\mathrm{d}A_z$ 三个标量函数的全微分

$$\mathrm{d}A_x=\frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial A_z}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial A_x}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1-10a}$$

$$\mathrm{d}A_y=\frac{\partial A_y}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial A_y}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial A_y}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1-10b}$$

$$\mathrm{d}A_z=\frac{\partial A_z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial A_z}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial A_z}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1-10c}$$

于是，得到矢量函数的全微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{A}&=\mathrm{d}A_x\hat{\boldsymbol{x}}+\mathrm{d}A_y\hat{\boldsymbol{y}}+\mathrm{d}A_z\hat{\boldsymbol{z}}\\&=\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial A_x}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial A_x}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\hat{\boldsymbol{x}}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial A_y}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial A_y}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\hat{\boldsymbol{y}}\\&\quad+\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial A_z}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial A_z}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned} \tag{1-11}$$

与标量函数 $f(x, y, z)$ 的全微分，即式（1-9）完全类似。

1.3 梯度、散度和旋度的定义及其运算

1.3.1 场的概念和数学表示

一、场的概念

一个确定区域的场被定义为：某物理量在该区域的一种分布。该物理量被称为场量。也可简单地理解为：场就是在空间中分布的某物理量。这样，便可把“场”简单地理解为，只要某一区域中分布有某物理量，那么这一区域中就存在着这种物理量的场。比如，某区域中各点的温度分布，构成温度场；某水流区域中各点的水流速度分布，构成流速场；电磁场理论中涉及许多“空间分布的物理量”，按此定义，有 $\vec{E}$ 场、$\vec{D}$ 场、$\vec{\Phi}$ 场、$\vec{B}$ 场、$\vec{H}$ 场等。事

实上，习惯上我们并不这样称谓，而是把分布有电场强度 $\vec{E}$、电位移 $\vec{D}$ 等物理量的空间称为电场；把分布有磁场强度 $\vec{H}$、磁感应强度 $\vec{B}$ 等物理量的空间称为磁场；而把同时分布有上述物理量的空间，即电场和磁场的统一体，称为电磁“场”。

二、场的分类

按照空间中分布的物理量的特性，可将场简单地分为标量场和矢量场。

如果空间中分布的物理量是标量，那么所描述的场就是标量场；如果空间中分布的物理量是矢量，那么所描述的场就是矢量场。

三、场的表示方法

场可用函数表示，具体地说，可以用某物理量在某个区域内的单值时空函数来表示。通常，标量场用标量函数表示，矢量场用矢量函数表示。比如：一个静态的标量场，可用 $f(x, y, z)$ 来表示；一个动态的标量场，则用 $f(x, y, z, t)$ 来表示。一个静态的矢量场可用 $\vec{E}(x, y, z)$ 表示；一个动态的矢量场，则用 $\vec{E}(x, y, z, t)$ 表示。

值得注意的是，函数可以用来表示场，而且函数可以准确地表达场，但是不能错误地理解为：只要是函数就表示场。

场也可用图形表示。标量场可用等值面表示，如等位面和等位线，如图 1-6 所示。矢量场可用矢量线表示，如电场线和磁场线，如图 1-7 所示。

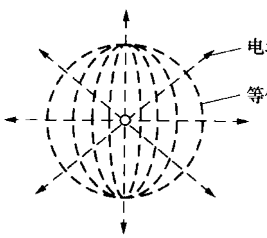

图 1-6 等位面与等位线

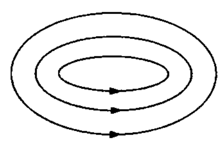

图 1-7 电场线和磁场线

场的图形表示方法相对直观，但不够精确。比如，在等位面上我们能够获悉面上各点电位相等，由矢量线的疏密可以获悉矢量场的强弱，但并不知道确切的值。

1.3.2 标量场的梯度

虽然，表征电磁场的基本物理量大都是矢量，但是，在某些情况下，借助标量场以及标量场的有关性质，可以使问题得以简化。因此，有必要研究标量场的有关性质。

电磁场理论中涉及标量电位和标量磁位，它们都是标量位函数，也就是标量场。标量场在空间各点处的值，可由标量位函数明确给出。

另外，在某些情况下，仅仅知道标量场在空间各点处的值，还远不够详尽，可能还需要了解它在不同方向上变化的趋势，如它沿哪个方向变化最快、最快的变化率又是多少等。这时，则需要借助标量场的方向导数和梯度来给出答案。

一、标量场的方向导数

某标量场 $f(x, y, z)$，C_1、C_2 是它的两个邻近的等值面。从该标量场中等值面 C_1 上取任意点 M，沿任意方向作一条射线 l，与 C_2 的交点为 M'，两点的距离为 Δl，如图 1-8 所示，则有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{f(M)-f(M')}{\Delta l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta l} \tag{1-12}$$

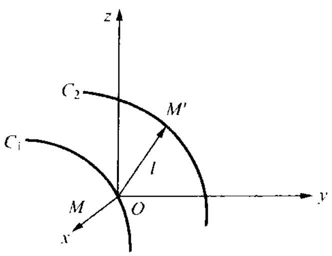

图 1-8 标量场在 M 点处沿 l 方向的方向导数

则称$\frac{\partial f}{\partial l}$为标量场 $f(x, y, z)$ 在 M 点处沿 l 方向的方向导数。

根据上述方向导数的定义，结合图 1-8 可以看出，在标量场中某点处，场沿不同方向上的变化率是不同的，原因是标量场由 C_1 到 C_2，无论沿哪个方向，Δf 是不变的，而方向不同，Δl 将不同，因此$\frac{\Delta f}{\Delta l}$就不同，必然存在一个变化最大的方向。

二、标量场的梯度

既然，在标量场的某一点上存在一个方向，并且沿该方向场的变化率最大，就将该方向定义为该标量场的梯度的方向，其数值即为该标量场在该点的梯度值。

令标量场 $f(x, y, z)$ 是 x、y、z 的实可微函数，C_1、C_2 是它的两个邻近的等值面。如图 1-9 所示。从 M 点到 M' 点 $f(x, y, z)$ 的微分变化 $\mathrm{d}f$ 为

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

从 M 点到 M' 点的位移为

$$\mathrm{d}\vec{l}=\hat{x}\mathrm{d}x+\hat{y}\mathrm{d}y+\hat{z}\mathrm{d}z$$

如果令

$$\vec{A}=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial f}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial f}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial f}{\partial z}$$

显然，$\mathrm{d}f$ 可以看成是 $\vec{A}$ 和 $\mathrm{d}\vec{l}$ 两个矢量的点积，即

$$\mathrm{d}f=\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

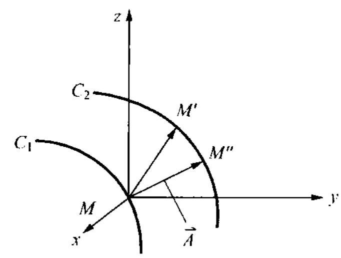

图 1-9 标量场的梯度

可见，当场由 M 点沿 $\vec{A}$ 方向移动到 C_2 上时，也就是 $\vec{A}$ 与 $\mathrm{d}\vec{l}$ 方向一致时，$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}l}$取得最大值，即标量场 $f(x, y, z)$ 沿此方向的变化率最大。因此，$\vec{A}$ 的方向就是标量场 $f(x, y, z)$ 的梯度方向，也就是 M 点处等值面（线）的切面（线）的垂线方向，其值就是场的最大变化率，称矢量 $\vec{A}$ 为标量场 $f(x, y, z)$ 在 M 点的梯度，记为

$$\vec{A}=\mathrm{grad}f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1-13}$$

综上所述，标量场梯度有如下性质：

（1）将一标量转化为一矢量。

（2）标量场的梯度方向是标量场变化最大的方向。

（3）标量场的梯度垂直于标量场的等值面。

例 1-1 标量场 $u(x, y, z)=x^2yz^3$ 在点（1，−1，1）处沿哪个方向的方向导数最大？这个最大值是多少？

解 沿梯度方向的方向导数最大。先求出该标量场的梯度

$$\vec{A} = \mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} = 2xyz^3\hat{x} + x^2z^3\hat{y} + 3x^2yz^2\hat{z}$$

该标量场在点（1，−1，1）处的梯度为

$$\vec{\boldsymbol{A}}\big|_{(1,-1,1)} = (2xyz^3\hat{\boldsymbol{x}} + x^2z^3\hat{\boldsymbol{y}} + 3x^2yz^2\hat{\boldsymbol{z}})\Big|_{(1,-1,1)} = -2\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} - 3\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{-2\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} - 3\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{14}}$$

因此，该标量场沿 $\vec{A}(\hat{\boldsymbol{A}})$ 方向的方向导数最大。这个最大值就是梯度的大小为 $\sqrt{14}$。

1.3.3 矢量场的散度

场都是源作用的结果，为了描述场与源的确定关系，引入通量和散度的概念。

一、矢量场的通量

在矢量场 $\vec{A}(x, y, z)$ 中，任选开曲面 S，在其上任选取面元 $\mathrm{d}\vec{S}$，其方向为面元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的外法线方向 $\hat{n}$，如图 1-10 所示。矢量场 $\vec{A}(x, y, z)$ 穿过面元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的通量被定义为

$$\mathrm{d}\Psi = \vec{A}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{1-14}$$

矢量场穿过整个开曲面 S 的通量则为

$$\Psi = \int \mathrm{d}\Psi = \int_S \vec{A}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{1-15}$$

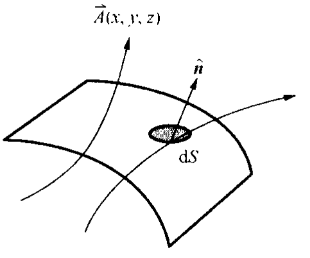

图 1-10 矢量场的通量

如果曲面 S 是闭合的，并规定曲面法矢量由闭合曲面内指向外，矢量场穿过闭合曲面的通量定义为

$$\Psi = \oint_S \vec{A}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{1-16}$$

式（1-16）又可写为

$$\Psi = \oint_S A(x,y,z) \cdot \mathrm{d}S\cos(\vec{A}, \mathrm{d}\vec{S}) \tag{1-17}$$

显然，Ψ 的值有三种结果，说明矢量场（线）$\vec{A}(x, y, z)$ 穿过闭合面 S 的通量有三种情形。一种是通量 $\Psi>0$，表明有净的矢量线从闭合面 S 内穿出，说明闭合曲面内一定存在引起该矢量场的正源，如图 1-11（a）所示；另一种情形是通量 $\Psi=0$，表明没有净的矢量线从闭合面 S 内穿出或穿进，说明闭合曲面内无源或正源与负源相抵消，如图 1-11（b）所示；第三种情形是通量 $\Psi<0$，表明有净的矢量线穿进闭合面 S，说明闭合曲面内存在负源，如图 1-11（c）所示。

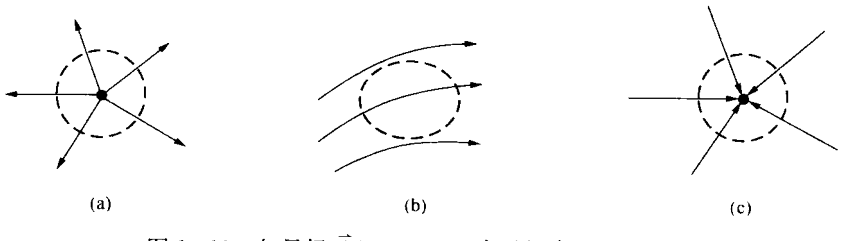

图 1-11 矢量场 $\vec{A}(x, y, z)$ 穿过闭合面 S 的通量

（a）$\Psi>0$ 情形；（b）$\Psi=0$ 情形；（c）$\Psi<0$ 情形

二、矢量场的散度

矢量场通过某闭合曲面的通量是一个积分量。它的值表明了闭合曲面内是否存在引起该矢量场的源，但并不能描述场中某点是否存在源。为了描述场中某点是否存在源，可将包含某点的闭合面无限地收小至该点，此时，包含该点的闭合面 $S\to 0$，相应地，限定该闭合面的体积 $\Delta V\to 0$，并定义矢量场在该点的散度为

$$\mathrm{div}\vec{A}(x,y,z)=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \vec{A}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V} \tag{1-18}$$

由于场中包含某点的体积趋于零（$\Delta V\to 0$），包含该点的闭合面也趋于零（$S\to 0$）。因此，包含该点的闭合面内是否存在源，也就表明了该点是否存在源。既然矢量场穿过某闭合面的通量有三种结果，那么矢量场在某点的散度也有三种结果：某点的散度大于零，即 $\mathrm{div}\vec{A}>0$，表明该点存在正源；某点的散度等于零，即 $\mathrm{div}\vec{A}=0$，表明该点无源；某点的散度小于零，即 $\mathrm{div}\vec{A}<0$，表明该点存在负源。

（1）如果矢量场中各点的散度均为零，该矢量场为无散场（无发散源）。

（2）如果矢量场中有一点的散度不为零，该矢量场则为有散场（有发散源）。

矢量场 $\vec{A}$ 在该点处的散度记作 $\mathrm{div}\vec{A}$，在直角坐标系下

$$\mathrm{div}\vec{A}(x,y,z)=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1-19}$$

例 1-2 求矢量场。

$$\vec{A}=(3x^2y+z)\hat{\boldsymbol{x}}+(y^3-xz^2)\hat{\boldsymbol{y}}+2xyz\hat{\boldsymbol{z}}$$

的散度。

解 利用式（1-19）得

$$\mathrm{div}\vec{A}(x,y,z)=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=6xy+6y^2+2xy=8xy+6y^2$$

1.3.4 矢量场的旋度

通过上述矢量场的通量和散度的概念，我们了解到有一类矢量场由发散源激发，其矢量线既有始点也有终点，并描述了这类矢量场与源的关系。除了上述一类矢量场外，还有另一类矢量场，其矢量线无始点也无终点。比如载流导线周围产生的磁场，其矢量线即磁力线是闭合的，无始点也无终点。为了建立这类矢量场与源的关系，需要引入矢量场的环量与旋度的概念。

一、矢量场的环量

在矢量场 $\vec{A}$ 中，任选一闭合曲线 l，如图 1-12 所示，将矢量场 $\vec{A}$ 沿闭合曲线 l 的积分定义为矢量场 $\vec{A}$ 在 l 上的环量，记为

$$\Gamma=\oint_l \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_l A\,\mathrm{d}l\cos\theta \tag{1-20}$$

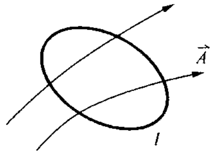

图 1-12 矢量场的环量

由式（1-20）可见，矢量场 $\vec{A}$ 在 l 上的环量是一标量。其值有两种结果：一种结果是环量为零；另一种结果是环量不为零。环量不为零时，又分大于零和小于零两种情形。

如果矢量场沿闭合曲线 l 的环量不为零，则称该矢量场为有旋

场，又叫漩涡场。激发漩涡场的源为漩涡源。图1-13（a）、（b）中所示的长直导线中的电流 I 就是引起磁场（漩涡场）的漩涡源。

如果矢量场沿闭合曲线 l 的环量不为零，表示 l 所围的面内存在漩涡源，矢量场在 l 所围的面上围绕漩涡源旋转，且值越大旋转越快，越小则旋转越慢。

如果矢量场沿某一闭合曲线 l［见图1-13（c）］的环量等于零，表示闭合曲线 l 所围的面内无漩涡源，矢量场在该闭合曲线 l 所围的面上不旋转。

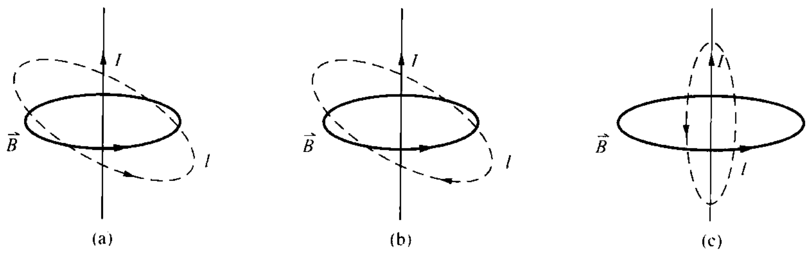

图1-13 环量与源的关系

（a）环量大于零；（b）环量小于零；（c）环量等于零

二、矢量场的旋度

为了给出矢量场在空间任意点 M 上的旋转情况，以及矢量场在该点处与漩涡源的关系，引入矢量场的旋度。将包含 M 点的闭合曲线 l 收缩，使它所包围的面积趋近于零（$\Delta S\to 0$），取极限

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_l \vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

该极限表示环量的面密度。

面元是有方向的，它与封闭曲线 l 的绕行方向成右手螺旋关系。面元 $d\vec{S}$ 取向不同，意味着矢量场与闭合曲线之间的夹角不同，将对应不同的环量，环量面密度也不同。这样，就会对应有一个环量最大值。

鉴于此，定义另一矢量，该矢量的大小为矢量场 $\vec{A}$ 在包含 M 点面元 $d\vec{S}$ 边界上的环量最大值与该面元比值的极限；其方向为矢量场 $\vec{A}$ 在面元边界环量取得最大值时面元的法线方向。将这一矢量称为矢量场 $\vec{A}$ 在 M 点处的旋度，其数学表达式为

$$\mathrm{rot}\vec{A}=\vec{n}\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\left[\oint_l \vec{A}\cdot d\vec{l}\right]_{\max}}{\Delta S} \qquad (1-21)$$

下面以一简单的例子来说明旋度的概念。

如图1-14所示，载有恒定电流 I 的载流导线周围引起恒定磁场。它满足安培环路定律

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=I$$

在场中选闭合路径 l_1，将 l_1（限定的面）按顺时针旋转30°得到闭合路径 l_2。由式（1-20）可知，矢量场 $\vec{H}$ 在闭合

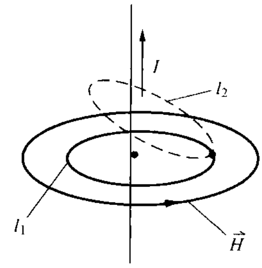

图1-14 矢量场 $\vec{H}$ 的旋度